ВУЗ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

В трех томах

1 том

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2003

УДК 517 (07)
ББК 22.11
Ч-49

Рецензенты:
К. Ф. Черных, доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного университета,
Н. В. Югов, член-корреспондент Центра прикладной математики
и механики Академии наук РФ

Черненко В. Д.

Ч-49 Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1.— СПб.: Политехника, 2003.— 703 с.: ил.

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0767-1 — Т. 1

Предлагаемое учебное пособие содержит краткий теоретический материал по определителям и матрицам, системам линейных уравнений, векторной и линейной алгебре, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, функциям и вычислению, пределов, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных, приложениям дифференциального исчисления к геометрии, неопределенному и определенному интегралам и приложениям определенного интеграла к задачам геометрии, механики и физики, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные методы решения.

ISBN 5-7325-0767-1

9785732507676

УДК 517(07)
ББК 22.11

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Черненко Владимир Дмитриевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ

В трех томах

Том 1

Заведующая редакцией *Е. В. Шарова*. Переплет художника *М. Л. Черненко*.
Корректор *А. Н. Пятницкая*. Макет *Т. Л. Пивоваровой*.
Компьютерный набор и верстка *В. А. Чернявского, М. М. Пивоварова, Т. Л. Пивоваровой*

ЛР № 010292 от 18.08.98

Сдано в набор 22.05.03. Подписано в печать 13.08.03. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 44,0 Уч.-изд. л. 43,2.
Тираж 3000 экз. Зак. 2848.

ФГУП «Издательство “Политехника”». 191023, Санкт-Петербург, Инженерная ул., 6.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Республиканская типография им. П. Ф. Анохина». 185005, г. Петрозаводск, ул. «Правды», 4.

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0767-1 — Т. 1

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В плане изучения высшей математики наибольшие трудности возникают при решении конкретных задач и примеров, которые требуют знание определенных методов и приемов.

Цель книги — помочь студентам научиться самостоятельно решать задачи по курсу высшей математики. Изучение теории должно производится по рекомендованному в программе или учебным заведением учебнику.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, теоремы без доказательств, главнейшие формулы, методы и способы решения задач. Решение типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности.

Одной из отличительных от существующих изданий особенностей пособия является отсутствие задач для самостоятельного решения, что позволяет при одном и том же объеме рассмотреть более широкий спектр методов и приемов решения, охватить больший диапазон задач и разнообразие примеров. Для самостоятельного решения, по мнению автора, имеется в настоящее время достаточное количество прекрасных сборников задач по математике для различных форм и профилей обучения.

Другой характерной особенностью является включение решений задач вычислительного характера, что позволяет охватить шире круг пользователей. Кроме того, значительное внимание уделено методам решения прикладных задач.

При написании пособия автор опирался на многолетний опыт преподавания курса высшей математики в различных вузах Санкт–Петербурга. Часть задач была составлена автором, а часть заимствована из сборников: Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, 1975; Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике,1972; Задачи и упражнения по математическому анализу, под редакцией Б.П. Демидовича, 1968; Гюнтер Н.М. и Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике, т. 1–3, 1959; Сборник задач по математике для вузов. Под редакцией А.В.Ефимова, ч.1–2, 1993–1994; Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике, 1980; Бугров Я.С., Никольский Я.С. Высшая математика. Задачник, 1982; Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, 1998; Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций, под редакцией А.А.Свешникова, 1970.

Книга предназначена для студентов технических и экономических вузов. Может служить учебным и справочным пособием лицам, желающим самостоятельно повторить курс высшей математики.

В книге принята следующая индексация: внутри рассматриваемой главы используются двойные индексы (2.3), где первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа в главе. Номера формул в каждом параграфе свои. Номера задач — двойные индексы (3.4). Здесь первая цифра указывает номер параграфа, вторая — номер задачи в параграфе. Каждый параграф разбивается по темам на разделы «жирными» цифрами с индексом **2°**. Номера рисунков — двойные (4.6). Здесь первая цифра указывает номер главы, вторая — номер рисунка в главе.

Содержание всего учебного пособия определяется программой курса математики для вузов. Первый том (главы 1–12) содержит материал, соответствующий программе 1-го курса вуза. Второй том (главы 13–20) содержит материал, соответствующий программе 2-го курса вуза. Третий том (главы 21–34) содержит материал, изучающийся на старших курсах и связанный в той или иной степени со специальными дисциплинами и профилями образования различных вузов.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность коллективу кафедры высшей математики СЗТУ за ряд ценных замечаний, направленных на улучшение настоящего пособия и подготовку его к изданию. Особенно автор благодарен доц. Смирнову В.Н. за помощь в компьютерном наборе и редактирование ряда глав, а также доц. Карповой Е.А. и проф. Гурецкому В.В. за просмотр глав 1–9 в рукописи. К сожалению, автор смог лишь частично учесть сделанные ими замечания.

Глава 1
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Определители. Способы вычисления

1°. *Определителем 2-го порядка* называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — элементы определителя.

Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \qquad (2)$$

Определителем n-го порядка называтся число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

где a_{ij} — элемент определителя, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца.

2°. *Свойства определителей.*

1. Величина определителя не изменится, если заменить строки столбцами, а столбцы — строками, не меняя их порядка.

2. Если поменять местами две строки (столбца) определителя, то определитель изменит знак.

3. Чтобы умножить определитель на число, достаточно умножить на это число все элементы какой–нибудь строки (столбца), т. е. общий множитель, содержащийся во всех элементах строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

4. Определитель равен нулю, если все элементы какой–нибудь строки (столбца) равны нулю.

5. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.

6. Если элементы некоторого ряда определителя представляют сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

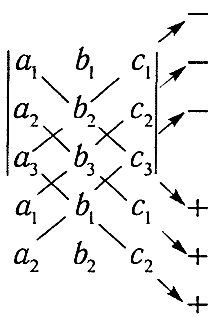
7. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

3°. *Вычисление определителей.*

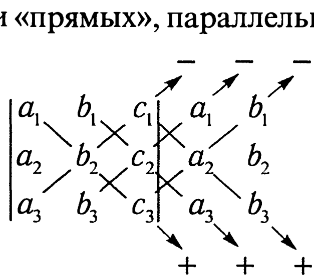
1. Значение определителя второго порядка находится по формуле (1).

2. *Правило Саррюса.* а) Для вычисления определителя 3-го порядка приписывают к нему снизу две первые строки и берут сумму произведений трех элементов расположенных на главной диагонали и «прямых», параллельных главной диагонали, со знаком минус берут сумму произведений элементов, расположенных на побочной диагонали, и «прямых», параллельных ей



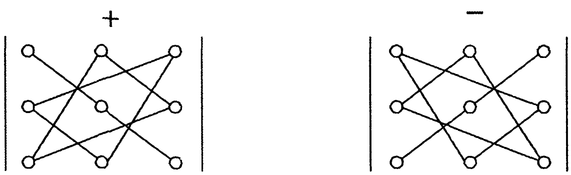
$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

б) Правило Саррюса имеет еще и другой вид. К определителю приписывают справа два первых столбца и вычисляют сумму произведений элементов расположенных на главной диагонали и «прямых» параллельных ей и со знаком минус вычисляют сумму произведений элементов, расположенных на побочной диагонали, и «прямых», параллельных ей



3. *Правило треугольников.* Определитель равен алгебраической сумме произведений элементов, расположенных на глав-

ной и побочной диагоналях и в вершинах треугольников с основаниями параллельными диагоналям. Произведения элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями параллельными ей, берутся со знаком минус



4. Разложение определителя по элементам какой–либо строки или столбца.

а) *Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых этот элемент находится. Так для элемента a_{ij} минор обозначается M_{ij}.

б) *Алгебраическим дополнением* некоторого элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент — число четное и со знаком минус, если эта сумма — число нечетное. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будет $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

в) Всякий определитель равен сумме произведений элементов какого–либо ряда на алгебраические дополнения этих элементов

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,. \tag{6}$$

Данное свойство справедливо для определителей любого порядка и может быть использовано для их вычисления. Так определитель 4-го порядка может быть, к примеру, разложен по элементам 2-й строки в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+2)} b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{(3+2)} c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{(4+2)} d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителей высших порядков целесообразно, используя 7-е свойство определителей (2°), добиться того, чтобы все элементы какого–либо ряда, кроме одного, стали нулями. В этом случае определитель будет равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение, т. е. на определитель, на один порядок меньший исходного.

5. *Метод приведения к треугольному виду.* Суть метода заключается в таком преобразовании определителя с помощью его свойств, когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, равны нулю. В этом случае определитель равен произведению элементов, расположенных на этой диагонали.

4°. *Теорема аннулирования.* Сумма произведений элементов какой–либо строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равна нулю

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+ \dots +a_{in}A_{jn}=0 \qquad \text{при } i\neq j.$$

Отсюда следует фундаментальное тождество теории определителей

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+ \dots +a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\Delta & при \quad i=j \\ 0 & при \quad i\neq j\end{cases}.$$

Аналогичные тождества справедливы и в отношении столбцов

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ \dots\ +a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}\Delta & при \quad i=j\\ 0 & при \quad i\neq j\end{cases}.$$

5°. *Произведение определителей.* Произведение двух определителей одинакового порядка равно определителю того же порядка с элементами равными сумме произведений i-й строки на соответствующие элементы j-го столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{vmatrix}.$$

где

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}.$$

6°. Определитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

образованный элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется *определителем Вандермонда* или *степенным*. Определитель равен нулю, если какие–либо два элемента a_i и a_j равны между собой.

Вычислить опредлитель Вандермонда позволяет *метод рекуррентных соотношений*, который выражает данный определитель, разлагая его по элементам столбца или строки, через определители более низкого порядка

$$\Delta_n=(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\dots(a_2-a_1)\Delta_{n-1}.$$

1.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Решение. а) По формуле (1) имеем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5-(-4)\cdot 2=23.$$

б) $$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

1.2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$,

по правилам Саррюса и треугольников.

Решение. а) Используем первую схему Саррюса, т. е. припишем первые две строки снизу

$$\begin{array}{ccc} \left|\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{array} \end{array} =2\cdot 1\cdot 3+3\cdot 5\cdot 1+1(-4)(-2)-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 5(-2)-3(-4)3=84.$$

б) Используем вторую схему Саррюса, т. е. припишем первые два столбца справа

$$\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & -a \\ 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -a \end{array}\right| \begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & a \\ -a & 1 \end{array} = a\cdot a(-a)+1\cdot 1(-a)+(-a)1\cdot 1-(-a)a(-a)-$$

$$-1\cdot 1\cdot a-(-a)1\cdot 1=-2a(a^2+1).$$

в) Используем правило треугольников

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 1\ x\ x + 0\cdot\ 1\cdot 0 + 2(-1)x - 0\cdot\ x\ x - 1(-1)\ 1 - 2\cdot\ 0\cdot\ x =$$

$$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

1.3. Упростить и вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Проще всего получить три нуля в третьем столбце. Для этого прибавим элементы второй строки к элементам четвертой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами третьей строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы второй строки на (-2) и складывая с элементами первой строки, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix}20 & -7 & 0 & 10\\ -8 & 5 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0 & -3\\ -4 & 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{(3+2)}\begin{vmatrix}20 & -7 & 10\\ -1 & 1 & -3\\ -4 & 3 & -1\end{vmatrix}.$$

Складывая второй столбец с первым, будем иметь

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}13 & -7 & 10\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}.$$

Умножим второй столбец на 3 и сложим с третьим

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}13 & -7 & -11\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}13 & -11\\ -1 & 8\end{vmatrix}=-93.$$

1.4. Вычислить определитель n–го порядка

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся свойством 7 и прибавим элементы первой строки, взятые со знаком минус, к элементам всех других строк, тогда, разлагая по элементам 1-го столбца, получим

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

1.5. Перемножить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cdot1+(-3)\cdot4+1(-2) & 2\cdot3+(-3)\cdot1+1\cdot4 & 2\cdot4+(-3)\cdot5+1\cdot3 \\ 4\cdot1+0\cdot4+5(-2) & 4\cdot3+0\cdot1+5\cdot4 & 4\cdot4+0\cdot5+5\cdot3 \\ 1\cdot1+(2)\cdot4+3(-2) & 1\cdot3+(-2)\cdot1+3\cdot4 & 1\cdot4+(-2)\cdot5+3\cdot3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -12 & 7 & -4 \\ -6 & 32 & 31 \\ -13 & 13 & 3 \end{vmatrix} = -363.$$

Если вычислить непосредственно данные определители, то получим тот же результат

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 33; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -11; \quad 33\cdot(-11) = -363.$$

1.6. Найти x из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 & x^2 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Раскроем определитель:

$$\Delta = 3ax + x^2 - 2x + ax^2 = x(3a + x - 2 + ax) = 0.$$

Откуда $x = (2-3a)/(a+1)$, $x = 0$.

1.7. Вычислить определитель Вандермонда

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем первую строку из остальных строк, тогда получим

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}.$$

Снова вычтем первую строку из остальных

$$\Delta_4 = (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c+a-b-a & c^2+ac-b^2-ab \\ 0 & d+a-b-a & d^2+ad-b^2-ab \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} c-b & (c-b)(c+b)+a(c-b) \\ d-b & (d-b)(d+b)+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$=(d-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{vmatrix}.$$

Вычитая из второй строки первую, получим

$$\Delta_4=(d-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & d-c \end{vmatrix}=$$

$$=(d-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

1.2 Системы линейныых уравнений. Правило Крамера

1°. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1}$$

по формулам Крамера имеет вид

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \tag{2}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

основной и дополнительные определители системы.

При решении системы могут встретиться три следующих случая:

а) $\Delta \neq 0$ — система совместна, имеет единственное решение;

б) $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ — система несовместна, не имеет решения;

в) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ — система неопределена, т. е. имеет бесчисленное множество решений (система сводится к одному уравнению).

2°. Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет ненулевые решения, определяемые формулами

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где k — произвольное число.

Если все определители (4) окажутся нулями, то система сводится к одному уравнению.

3°. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

При решении системы возможны три случая:

а) Основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система имеет только нулевое решение.

б) $\Delta = 0$, но, по крайней мере, найдется один элемент, минор которого отличен от нуля. В этом случае уравнение, в котором данный элемент является коэффициентом при неизвестной, является следствием двух других уравнений и задача сводится к решению этих уравнений.

Таким образом, задача сводится к решению системы (3) и имеет бесчисленное множество решений.

в) $\Delta = 0$, и все его миноры равны нулю. В этом случае два уравнения являются следствием одного, т. е. система сводится к одному уравнению с тремя неизвестными, совместна и имеет бесчисленное множество решений.

4°. Система трех линейных неоднородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{6}$$

При решении возможны три случая:

а) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера аналогично решению (2)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{7}$$

б) $\Delta = 0$, но найдется, по крайней мере, один элемент, минор которого не равен нулю. Если в главном определителе заменить столбец, где находится этот элемент, столбцом из свободных членов и дополнительный определитель не будет равен нулю, то система несовместна. Если же дополнительный определитель будет равен нулю, то уравнение в котором данный элемент является коэффициентом при неизвестной, будет следствием двух других уравнений и система имеет бесчисленное множество решений.

в) $\Delta = 0$, и все его миноры равны нулю. Если хотя бы один минор дополнительных определителей отличен от нуля, то система несовместна. Если же все миноры дополнительных определителей равны нулю, то система сводится к одному уравнению, совместна и имеет бесчисленное множество решений.

2.1. Пользуясь определителями 2-го порядка **решить** системы:

$$a)\begin{cases}3x+2y=12;\\4x-y=5;\end{cases}\quad b)\begin{cases}3x-2y=4;\\6x-4y=9;\end{cases}\quad c)\begin{cases}x+y=3;\\2x+2y=6.\end{cases}$$

Решение. а) Главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2\\4 & -1\end{vmatrix}=-11.$$

Дополнительные определители

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\5 & -1\end{vmatrix}=-22;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\4 & 5\end{vmatrix}=-33.$$

Отсюда по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-22}{-11}=2;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-33}{-11}=3.$$

б)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2\\6 & -4\end{vmatrix}=-12+12=0;\ \Delta_x=\begin{vmatrix}4 & -2\\9 & -4\end{vmatrix}=2\neq 0;\ \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 9\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Система несовместна.

в)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 1\\6 & 2\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

Второе уравнение системы есть следствие первого; система имеет бесчисленное множество решений.

2.2. Найти решения системы

$$\begin{cases}2x-y+5z=0;\\3x-4y-7z=0.\end{cases}$$

Решение. Ненулевые решения находим по формулам (4)

$$x = k\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 27k; \quad y = -k\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 29k; \quad z = k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5k,$$

где k — произвольное число.

Задаваясь различными значениями k получим бесчисленное множество решений.

2.3. Решить системы:

а) $\begin{cases} 3x+2y+4z=0; \\ 5x+y-8z=0; \\ 4x+2y+3z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-4z=0; \\ 2x+3y+z=0; \\ 3x+5y-3z=0. \end{cases}$

Решение. а) Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$.

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -9-40+6+36-5+12 = 0.$$

Минор первого элемента первой строки не равен нулю, следовательно, система сводится к двум уравнениям (третье уравнение есть сумма первых двух). Решая первые два уравнения по формулам (4), получим

$$x = k\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14k; \quad y = -k\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9k; \quad z = k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -k$$

2.4. Решить системы:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=14; \\ 5x+y-3z=7; \\ 4x+3y=2z=10, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+z=2; \\ x+y+2z=2; \\ 3x+2y+3z=4, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+z=1; \\ x+2y+z=1; \\ x+2y+z=1, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y+z=3; \\ 2x+y+z=2; \\ 2x+y+z=3, \end{cases}$

Решение. а) Находим главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =4+15+36–4+30+18=99.$$

и дополнительные

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 297;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \end{vmatrix} = -198;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 198.$$

По формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{297}{99} = 3;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{198}{99} = -2;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{198}{99} = 2;$$

б) $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Третье уравнение есть сумма первых двух и система сводится к решению первых двух уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+z=2; \\ x+y+2z=2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=2-z; \\ x+y=2-2z, \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\ \Delta_x=\begin{vmatrix}2-z & 1\\ 2-2z & 1\end{vmatrix}=z;\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 2-z\\ 1 & 2-2z\end{vmatrix}=2-3z,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=z;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2-3z,$$

где z — произвольно, т. е. система имеет множество решений.

в)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

и все миноры равны нулю.

Поскольку все миноры дополнительных определителей равны нулю, то система сводится к одному уравнению

$$x = 1-2y-z,$$

где y, z — произвольны.

г)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

и все миноры равны нулю.

Поскольку миноры дополнительных определителей отличны от нулей, то система несовместна.

2.5. Определить значение коэффициента α, при котором система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение

$$\begin{cases}\alpha x+4y-5z=0,\\ 9x+8y-7z=0,\\ 3x+4y-3z=0.\end{cases}$$

Решение. Поскольку система однородная, то она ненулевое решение имеет только в том случае, когда определитель системы Δ равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & -5 \\ 9 & 8 & -7 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разрешая определитель относительно α, получим $-24\alpha-$ $-180=84+120+28\alpha+108 = 0$, откуда $\alpha = 9$. Подставим найденное значение $\alpha = 9$ в систему.

Поскольку определитель системы $\Delta = 0$, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля, к примеру,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

то одно из уравнений является следствием двух других, и система равносильна системе двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 9x+8y-7z=0, \\ 3x+4y-3z=0. \end{cases}$$

Решение находим по формулам (4)

$$x = k\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4k, \quad y = -k\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6k, \quad z = k\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12k$$

или $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 6k$, где k — произвольное число.

Задаваясь различными значениями k, получаем бесчисленное множество решений.

2.6. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 4y+3z=17, \\ 5z+2u=19, \\ u+7v=9, \\ 6u+5x=11. \end{cases}$$

Решение. Найдем главный определитель системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+5(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 6 + 5\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 450.$$

Для нахождения неизвестной x найдем вспомогательный определитель Δ_x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 19 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 17 & 3 & 0 & 0 \\ 19 & 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 6 - 17\cdot 5\cdot 1\cdot 6 + 3\begin{vmatrix} 19 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 450.$$

Отсюда по формуле Крамера $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1.$ Остальные неизвестные находятся подстановкой $x = 1$ в систему уравнений $y = 2,\quad z = 3,\quad u = 2,\quad v = 1.$

Последнее уравнение может служить проверкой найденного решения.

1.3. Основные определения теории матриц. Сложение и умножение матриц

1°. *Матрицей* называют таблицу, состоящую из элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах, и обозначают

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной*; если $m = 1$, то получим *матрицу – строку*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \end{pmatrix},$$

если $n = 1$, то получим *матрицу – столбец*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической.*

Единичной матрицей порядка n называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad i = j; \\ 0 & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что определитель единичной матрицы любого порядка равен единице $\det E_n = 1$.

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковую размерность и все соответствующие элементы матриц равны между собой, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$.

2°. Суммой двух матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C такой же размерности, получаемая из этих матриц сложением соответствующих элементов $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$

$$C = A+B.$$

Например, сумма матриц третьего порядка имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Свойства суммы матриц:

1. Сочетательный закон

$$(A+B) + C=A + (B+C).$$

2. Переместительный закон

$$A+B = B+A.$$

3°. Разность матриц есть действие обратное сложению, т. е. чтобы найти разность двух матриц одинаковой размерности, следует произвести вычитание соответствующих элементов $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

4°. Умножение матрицы на число. Под произведением матрицы A на число k понимается матрица B, получаемая из матрицы A умножением всех ее элементов на это число $b_{ij} = ka_{ij}$

$$B = kA.$$

Свойства: 1. Распределительность относительно суммы чисел

$$(k_1+k_2)\, A = k_1A + k_2A.$$

2. Распределительность относительно суммы матриц

$$k\,(A+B) = kA + kB.$$

5°. Умножение матрицы на матрицу. Под произведением матрицы A размерности $(m\times n)$ на матрицу B размерности $(n\times k)$ понимается матрица C размерности $(m\times k)$, получаемая перемножением элементов матрицы A на элементы матрицы B по правилу

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_r a_{ir}b_{rj},$$

т. е. по правилу «строки на столбец».

Таким образом, произведение матриц $A\cdot B$ имеет смысл только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В итоге получается матрица C, у которой число строк совпадает с числом строк матрицы A, а число столбцов с числом столбцов матрицы B:

$$A\cdot B=C\left[(m\times n)(n\times k)=(m\times k)\right].$$

Например, произведение двух матриц третьего порядка имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i3} \end{pmatrix}.$$

Свойства:

1. $A(B+C)=AB+AC;$
2. $(B+C)A=BA+CA;$
3. $(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD;$
4. $(AB)C=A(BC).$

Здесь предполагается, что матрицы A,B,C,D допускают перемножение.

6°. Если размерность матрицы A равна $(m\times n)$, то $E_mA=A$ и $AE_n=A$, т. е. умножение матрицы A на единичную матрицу есть та же самая матрица A, если порядок единичной матрицы позволяет перемножение.

3.1. Найти сумму матриц

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\\1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&3\\4&-2\\2&7\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C=A+B=\begin{pmatrix}3&6\\7&3\\3&9\end{pmatrix}.$$

3.2. Найти разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\-2&3&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&1\\3&5&-2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C=A-B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\-5&-2&9\end{pmatrix}.$$

3.3. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}3&4&7&1\\2&3&5&2\\4&1&-2&3\end{pmatrix}$ на число $k=3$.

Решение.

$$B=kA=\begin{pmatrix}9&12&21&3\\6&9&15&6\\12&3&-6&9\end{pmatrix}.$$

3.4. Доказать равенство

$$5\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&3&5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&3&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&3&5\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним указанные действия

$$5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix};$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.5. Перемножить следующие матрицы:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad б)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$в)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad г)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad д)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4+3\cdot 5 & 1\cdot 1+3\cdot 2 \\ 2\cdot 4+(-2)\cdot 5 & 2\cdot 1+(-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

б) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4+2(-1)+(-4)(-2) & 1\cdot 3+2\cdot 2+(-4)4 & 1\cdot 1+2\cdot 3+(-4)5 \\ 3\cdot 4+(-1)(-1)+5(-2) & 3\cdot 3+(-1)2+5\cdot 4 & 3\cdot 1+(-1)3+5\cdot 5 \\ 2\cdot 4+3(-1)+2(-2) & 2\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 4 & 2\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -9 & -13 \\ 3 & 27 & 25 \\ 1 & 20 & 21 \end{pmatrix};$$

в)
$$\begin{pmatrix}2&4&3\\1&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+4\cdot4+3\cdot2 & 2\cdot1+4\cdot2+3\cdot5\\1\cdot3+6\cdot4+5\cdot2 & 1\cdot1+6\cdot2+5\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&35\\37&38\end{pmatrix}.$$

г)
$$\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2&2\cdot3\\3\cdot2&3\cdot3\\7\cdot2&7\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\6&9\\14&21\end{pmatrix}.$$

д)
$$\begin{pmatrix}3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}=\left(3\cdot6+2(-1)+5\cdot3\right)=31.$$

3.6. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&6\\-1&2\\5&3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) $A(B+C)$; б) $AB+AC$.

Решение. а)

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&6\\-1&4\\5&3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&10\\-2&7\\10&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3+1(-2)+3\cdot10 & 2\cdot10+1\cdot7+3\cdot5\\5\cdot3+4(-2)+2\cdot10 & 5\cdot10+4\cdot7+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&42\\27&88\end{pmatrix}.$$

б)
$$AB+AC=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6\\-1&4\\5&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1(-1)+3\cdot5 & 2\cdot4+1\cdot3+3\cdot3\\5\cdot1+4(-1)+2\cdot5 & 5\cdot6+4\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1(-1)+3\cdot 5 & 2\cdot 6+1\cdot 4+3\cdot 3 \\ 5\cdot 2+4(-1)+2\cdot 5 & 5\cdot 6+4\cdot 4+2\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 11 & 36 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 18 & 25 \\ 16 & 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 42 \\ 27 & 88 \end{pmatrix}.$$

3.7. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $(AB)C$; б) $A(BC)$.

Решение. а)

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 4+(-1)2 & 3\cdot 5+(-1)6 \\ 2\cdot 4+4\cdot 2 & 2\cdot 5+4\cdot 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10(-1)+9\cdot 5 & 10\cdot 4+9\cdot 3 \\ 16(-1)+34\cdot 5 & 16\cdot 4+34\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10(-1)+9\cdot 5 & 10\cdot 4+9\cdot 3 \\ 16(-1)+34\cdot 5 & 16\cdot 4+34\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & 67 \\ 154 & 166 \end{pmatrix}.$$

б)
$$A(BC)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4(-1)+5\cdot 5 & 4\cdot 4+5\cdot 3 \\ 2(-1)+6\cdot 5 & 2\cdot 4+6\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & 31 \\ 28 & 26 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 21+(-1)28 & 3\cdot 31+(-1)26 \\ 2\cdot 21+4\cdot 28 & 2\cdot 31+4\cdot 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & 67 \\ 154 & 166 \end{pmatrix}.$$

3.8. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ на единичные матрицы $E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Решение.

$$E_2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&6\\2&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&6\\2&5&4\end{pmatrix}=A;$$

$$A\cdot E_3=\begin{pmatrix}3&1&6\\2&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&6\\2&5&4\end{pmatrix}=A.$$

3.9. Доказать, что для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}$$

справедливо равенство $AE_4=E_4A$.

Решение. Находим, что

$$AE_4=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=A.$$

Произведение

$$E_4A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=A.$$

Отсюда следует, что $AE_4=E_4A$.

3.10. Найти A^3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+12 & 4+8 \\ 3+6 & 12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13+36 & 52+24 \\ 9+48 & 36+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 76 \\ 57 & 68 \end{pmatrix}.$$

3.11. Найти значение матричного многочлена $2A^2+4A+3E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица.

Решение. Находим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 9 & 6 & 7 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix};\ 2A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ 18 & 12 & 14 \\ 2 & -12 & 8 \end{pmatrix};$$

$$4A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix};\ 3E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ 2A^2+4A+3E = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 24 & 27 & 18 \\ 6 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

1.4. Транспонирование матрицы

Транспонировать матрицу A — значит все ее строки i сделать столбцами j с теми же порядковыми номерами $a_{ij} = a_{ji}^m$.

Свойства: 1. Если матрица A имеет размерность $(m \times n)$, то матрица A^m, будет иметь размерность $(n \times m)$;

2. $(A^m)^m = A$;

3. $(A+B)^m = A^m + B^m$ — сумма $(A+B)$ предполагает, что матрицы A и B имеют одинаковую размерность;

4. $(AB)^m = B^m A^m$ — из возможности перемножения матриц A и B, следует возможность перемножения матрицы B^m на A^m.

5. $E^m = E$ — операция транспонирования не изменяет единичную матрицу.

4.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. **Найти** A^m и $(A^m)^m$.

Решение. Меняя строки на столбцы, получим

$$A^m = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если еще раз поменять строки на столбцы, то получим

$$\left(A^m\right)^m = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. исходную матрицу A.

4.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **Найти** $(A+B)^m$ и A^m+B^m.

Решение.

$$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (A+B)^m = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$A^m + B^m = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **Доказать**, что $(AB)^m = B^m A^m$.

Решение. Находим, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 14 & 11 \end{pmatrix}$.

Отсюда $(AB)^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 14 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Находим $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B^m = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, отсюда $B^m A^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 14 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Что и требовалось доказать.

1.5. Обратная матрица

Обратной матрицей по отношению к заданной квадратной матрице A называется такая квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, которая удовлетворяет равенствам

$$AA^{-1} = E \text{ и } A^{-1}A = E.$$

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно чтобы матрица A была неособенной ($\det A \neq 0$), тогда обратная матрица определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^m$$

$$\text{или}\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для получения обратной матрицы A^{-1} следует все элементы матрицы A заменить их алгебраическими дополнениями, полученную матрицу транспонировать и разделить на $\det A$.

Свойства: 1. Не существует двух различных обратных матриц для данной матрицы A.

2. Определители прямой и обратной матрицы взаимно обратны

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3. Обращение обратной матрицы дает исходную матрицу $(A^{-1})^{-1}$.

4. Обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратной последовательности

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad \det A \neq 0; \quad \det B \neq 0.$$

5. Операция обращения не изменяет единичной матрицы $E^{-1} = E$.

6. Транспонирование и обращение матрицы не зависит от последовательности этих операций $(A^{m})^{-1} = (A^{-1})^{m}$.

5.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, **найти** A^{-1}.

Решение. Находим определитель $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$ и алгебраические дополнения $A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1;$ $A_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2;$ $A_{21} = (-1)^3(-5) = 5;$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4.$

Отсюда

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^m = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение. Находим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 22.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то A^{-1} существует

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5;\ A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11;\quad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11;\quad A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26;$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -3\\5 & 5\end{vmatrix}=-20;\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 4\\5 & 2\end{vmatrix}=-18.$$

Отсюда

$$A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-1 & -11 & 26\\5 & 11 & -20\\-1 & 11 & -18\end{pmatrix}.$$

5.3. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & -3\end{pmatrix}$.

Доказать, что: а) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; б) $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$.

Решение. а) Находим произведение матриц $AB=\begin{pmatrix}14 & -9\\3 & -3\end{pmatrix}$;

$$\det(AB)=-15;\quad (AB)^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 9\\-3 & 14\end{pmatrix};\quad \det A=5;\quad \det B=-3.$$

Находим обратные матрицы

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 2\end{pmatrix},\quad B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix},$$

отсюда

$$B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 9\\-3 & 14\end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

б) Транспонируем матрицу A;

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix};\quad \det A=5;\quad (A^T)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 2\end{pmatrix}$, отсюда

$$(A^{-1})^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

1.6. Матричный метод решения системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \ddots \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если ввести матричные обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему можно записать матричным уравнением $A\,X = B$. Решение системы матричным методом определяется соотношением $X = A^{-1}B$; $\det A \neq 0$.

6.1. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17; \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 99 \neq 0.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{99}\begin{pmatrix}8&11&17\\11&-22&11\\9&0&-18\end{pmatrix}^{m}=\frac{1}{99}\begin{pmatrix}8&11&9\\11&-22&0\\17&11&-18\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{99}\begin{pmatrix}8&11&9\\11&-22&0\\17&11&-18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\17\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{99}\begin{pmatrix}297\\-198\\495\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}.$$

Таким образом $x=3$; $y=-2$; $z=5$.

1.7. Решение системы линейных уравнений методом исключения (метод Гаусса)

Решение системы линейных уравнений с помощью формул Крамера целесообразно для систем двух и трех уравнений. Для определителей четвертого и высших порядков было бы много повторяющихся вычислений, поэтому гораздо удобнее пользоваться методом Гаусса.

Суть метода исключения неизвестных заключается в следующем. Пусть дана система

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\vdots\qquad\qquad&\ddots\;\vdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n.
\end{aligned}$$

Сначала делим первое уравнение на a_{11}. Затем умножаем его на a_{21} и вычитаем из второго. Далее умножаем уравнение на a_{31} и вычитаем из третьего. Продолжая процесс, приходим к системе, где только первое уравнение содержит x_1. Первое уравнение оставляем в покое.

Аналогично исключаем из оставшихся уравнений x_2 и, продолжая вычисления, преобразуем систему к ступенчатому виду

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n &= a_1, \\ x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= a_2, \\ \vdots \qquad\qquad \ddots\ &\vdots \\ x_n &= a_n. \end{aligned}$$

Из полученной системы видно, что все неизвестные находятся последовательно из последнего выражения.

7.1. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить: а) методом Гаусса; б) методом матричного исчисления.

Решение. Составим и вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

следовательно, система совместна.

а) Решение методом Гаусса. За ведущее уравнение примем первое уравнение. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму и третьему уравнению ведущее, умноженное на $-\frac{3}{2}$. Получим

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ \frac{11}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 = 5. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения образуют первую подсистему. За второе ведущее уравнение примем второе уравнение. Исключая x_2 из третьего уравнения, получим

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ \dfrac{11}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 5, \\ \dfrac{60}{11}x_3 = \dfrac{60}{11}. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$.

б) Матричный метод. Запишем исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 \\ 6 & 11 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 180 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$.

7.2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ 4x+5z+2t=3, \\ 2x-y+z+t=1, \\ 2x+y+4z=1. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе, затем умножим первое на 2 и вычтем из него третье и четвертое уравнение. Приходим к системе, где только первое уравнение содержит x

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ 4y-z+2t=-3, \\ 3y+z+t=-1, \\ y-2z+2t=-1. \end{cases}$$

Далее умножаем последнее уравнение на 4 и на 3 и вычитаем его из второго и третьего уравнения

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ y-2z+2t=-1, \\ 7z-6t=1, \\ 7z-5t=2. \end{cases}$$

Наконец, вычитаем из последнего третье уравнение

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ y-2z+2t=-1, \\ 7z-6t=1, \\ t=1. \end{cases}$$

Отсюда $t=1$, $z=1$, $y=-1$, $x=-1$.

1.8. Ранг матрицы

Если в матрице взять какие–либо k строк и столбцов и составить определитель из элементов, которые окажутся на их пересечении, то этот определитель называется минором k-го порядка данной матрицы.

Из строк и столбцов матрицы можно составить определители различных порядков, не превышающих наименьшего из чисел m или n.

Рангом r матрицы называют наибольший из порядков определителей этой матрицы, отличных от нуля.

Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются *эквивалентными.* Эвивалентность матриц обозначается знаком ~ между ними. Элементарными преобразованиями называются такие преобразования, при которых миноры матрицы либо не меняют своей величины, либо, меняя величину, не обращаются в нуль. Элементарные преобразования матриц позволяют:

1. Переставлять местами между собой строки (столбцы).
2. Прибавлять к какой–либо строке (столбцу) другую строку (столбец), умноженную на любое число.
3. Умножать строку (столбец) на число, отличное от нуля.
4. Вычеркивать строки (столбцы), состоящие из одних нулей.

Элементарные преобразования позволяют получить матрицу, эквивалентную исходной, для которой легко установить ранг. Для этого необходимо с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где $a^{ij} = 0$ при $i > j$; $a^{ij} \neq 0$ при $i = j$.

Ранг этой матрицы равен k, так как она имеет отличный от нуля определитель k-го порядка.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором этой матрицы.

Теорема о базисном миноре. Если матрица имеет отличный от нуля минор порядка k, а все миноры порядка $k+1$, содержащие данный минор (окаймляющие миноры), равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Метод окаймляющих миноров. Находим минор второго порядка отличный от нуля, если такой существует, и вычисляем окаймляющие его миноры третьего порядка, пока не найдем среди них отличного от нуля и т. д.

Если найден отличный от нуля минор порядка k, то вычисляем окаймляющие миноры $k+1$ порядка. Если все они равны нулю или таких миноров вообще нет (в случае, когда матрица содержит k столбцов или k строк), то ранг матрицы равен k, иначе этот процесс продолжаем.

8.1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку минор второго порядка

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

а оба окаймляющие его миноры третьего порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 11 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

то ранг матрицы A равен двум, а базисным минором является, например, M_2.

8.2. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Переставим первый и второй столбец местами

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Чтобы иметь дело с меньшими числами, умножим первый столбец на $\frac{1}{2}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Первую строку прибавляем ко второй и третьей, умножая при этом ее на (–2) и (–1), соответственно

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, получим

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим вторую строку на (–2) и прибавим ее к третьей строке

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 8 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

Вычеркиваем третью строку

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 8 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг матрицы равен $r = 2$.

б) Поменяем местами первую и вторую строку

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & 5\\ 1 & 7 & 5 & -1\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 7 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 1 & 5\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 7 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}\sim$$

Умножим первую строку на 3 и вычтем из второй, затем прибавим ее к третьей, а к четвертой прибавим первую строку, умноженную на (–7)

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 0 & -22 & -14 & 8\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & -48 & -28 & 16\end{pmatrix}\sim$$

Умножим вторую строку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, а четвертую на $\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & -12 & -7 & 4\end{pmatrix}\sim$$

Поменяем местами второй и четвертый столбец

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \\ 0 & 4 & -7 & -12 \end{pmatrix}\sim$$

Умножим второй столбец на $\left(-\frac{1}{4}\right)$ и вычтем вторую строку из третьей, а к четвертой ее прибавим

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & -7 & -22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim$$

Вычеркнем третью строку и поменяем местми третий и четвертый столбец

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $r = 3$.

1.9. Решение системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A системы равнялся рангу расширенной матрицы B, т. е. $r(A) = r(B)$.

Система называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. В этом случае ранг матрицы A меньше ранга матрицы B.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений более одного. Совместная система будет определенной, если ранг системы равен числу неизвестных, т. е. $r(A) = n$ и неопределенной, если ранг системы меньше числа неизвестных, т. е. $r(A) < n$.

Если все свободные члены равны нулю $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система линейных уравнений называется *однородной* и всегда совместна.

Пусть, в общем случае, ранг совместной системы меньше числа неизвестных или числа уравнений $r < (n \vee m)$, причем базисный минор располагается в r строках и столбцах матрицы A. Эти r неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ назовем *базисными неизвестными*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ назовем *свободными неизвестными* и перенесем их в правую часть системы уравнений. Решая полученную систему уравнений (по формулам Крамера), определяем базисные неизвестные через свободные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, находим, что решений у этой системы бесконечно много.

Если ранг матрицы A равен рангу матрицы B и $r < m$, то выбираем из системы какие–нибудь r уравнений, матрица коэффициентов которых имеет ранг r.

Решение этих r уравнений будет являться решением и остальных $m - r$ уравнений системы. Если же в этом случае $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

9.1. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \end{pmatrix}.$$

Прибавим вторую строку к пятой, а третью к четвертой

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \\ 4 & 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Разделим четвертую строку на 3, а последнюю строку на 4

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычтем первую строку из четвертой и последней

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем четвертую и пятую строки

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица системы

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A)=3$.

Ранг расширенной матрицы также равен $r(B)=3$, поскольку только что рассмотренный определитель является минором расширенной матриы. Следовательно, система совместна.

Для решения системы выберем, например, уравнения

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 - \ x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера находим, что $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Нетрудно убедится, что третье и пятое уравниния при этих значениях неизвестных тождественно удовлетворяются.

9.2. Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - \ x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы. Для этого запишем расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов первого столбца элементы второго столбца

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A системы будет

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разделим все элементы последнего столбца на 3

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим третий столбец к четвертому

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отнимаем из последней строки третью

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$M_{33}=(-1)^7\begin{vmatrix}2 & 8 & -3\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1 & 3 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг системы $r(A)=1$. Вернемся к расширенной матрице, сократив на 3 предпоследний столбец

$$B\sim\begin{pmatrix}2 & 8 & -3 & 3 & 2\\ 2 & 4 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 5 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Из первого столбца вычтем последний столбец, а из последней строки вычтем предпоследнюю

$$B\sim\begin{pmatrix}0 & 8 & -3 & 3 & 2\\ 0 & 4 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

После простейших преобразований получим

$$B\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$M_{41}=(-1)^5\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, ранг расширенной системы равен $r(B)=3$. Поскольку ранг матрицы A меньше ранга расширенной матрицы B, то система несовместна.

9.3. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = \ \ 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \ \ 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделим второй столбец на 3, а третий столбец на 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

К второй строке прибавляем первую и сокращаем на 2. Далее, из последней строки вычитаем вторую

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг расширенной матрицы равен $r(B) = 2$. Рассмотрим теперь матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы тоже равен 2

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \quad r(A)=2.$$

Поскольку ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то примем за свободную неизвестную x_3 и перенесем ее в правую часть

$$\begin{cases}x_1-3x_2=-1-2x_3,\\ x_1+9x_2=\ \ 3-6x_3.\end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений по формулам Крамера, определяем базисные неизвестные x_1, x_2 через свободную x_3

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-1-2x_3 & -3\\ 3-6x_3 & 9\end{vmatrix}}{12}=-3x_3, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1-2x_3\\ 1 & 3-6x_3\end{vmatrix}}{12}=\frac{1-x_3}{3}.$$

Придавая свободной неизвестной произвольные значения, находим, что решений у этой системы бесконечно много.

Глава 2
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторные и скалярные величины. Линейные операции над векторами

1°. Основные определения. Величина называется *скалярной*, если она определяется заданием ее числового значения, и *векторной*, если для ее определения задается еще и ее направление.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют одинаковую длину, параллельны друг другу и одинаково направлены.

Два вектора называются *противоположными*, если они имеют одинаковую длину, параллельны и противоположно направлены.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они расположены на параллельных прямых (или на одной прямой), независимо от того направлены ли они одинаково или их направления противоположны.

Если векторы лежат в одной плоскости или в плоскостях, параллельных между собой, то они называются *компланарными*.

Вектор, модуль которого равен нулю, называется *нуль–вектором*. Нуль–вектор не имеет направления.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным* вектором.

Единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$.

2°. *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, построенный следующим образом: перенесем начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{c}$ и построим вектор $\vec{c}$ так, чтобы его начало совпадало с началом вектора $\vec{c}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$ (рис. 2.1).

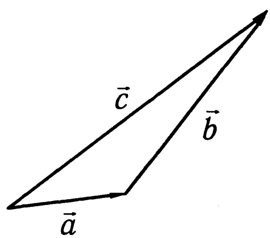


Рис. 2.1

Сумма векторов обладает свойствами сочетательности и переместительности

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$; б) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Вектор $\vec{c}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна вектору $\vec{a}$, т. е. если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Если два вектора приведены к общему началу, то их разность есть вектор, соединяющий их концы и направленный от вычитаемого к уменьшаемому (рис. 2.2).

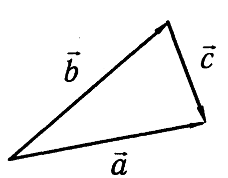


Рис. 2.2

Свойства

а) $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b};$ б) $\vec{a}-\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}.$

3°. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$ коллинеарный вектору $\vec{a}$, модуль которого равен $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$.

Если $\lambda>0$, направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают; если $\lambda<0$ — направления векторов противоположны.

Свойства

а) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a};$ б) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda;$ в) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$

4°. Отношение вектора к его длине или модулю называется *единичным* вектором. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить с помощью единичного ветора $\vec{a}^0$, того же направления, что и вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0$, откуда $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

1.1. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.3). **Найти** их сумму и разность.

Решение. а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендиулярны. Сложение выполняем по правилу треугольника (рис. 2.4).

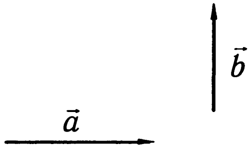


Рис. 2.3

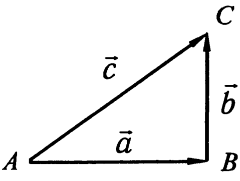


Рис. 2.4

От произвольной точки A отложим вектор $\vec{a}$, совместим начало вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$, вектор, идущий от начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, есть вектор–сумма. Модуль вектор–суммы находим по теореме Пифагора

$$\left|\overline{AC}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

б) Совместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и соединим их концы. Вектор, идущий из конца вектора – «вычитаемого»в конец вектора – «уменьшаемого», есть вектор–разность (рис. 2.5).

Длина вектора $\left|\overline{CB}\right|$ может быть найдена по теореме Пифагора $\left|\overline{CB}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Рассмотрим еще один способ нахождения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Поместим начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ и построим вектор $-\vec{b}$, т. е. вектор противоположно направленный. Поскольку под разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают третий вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, то вектор–разность находим по правилу треугольника, т. е. это вектор идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $-\vec{b}$ (рис. 2.6).

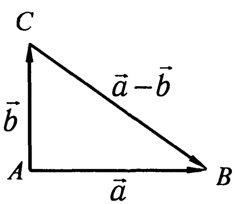


Рис. 2.5

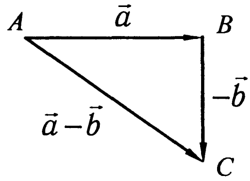


Рис. 2.6

Нетрудно заметить, что вектора–разности (рис. 2.5 и рис. 2.6) равны по величине и направлению, следовательно, они равны.

1.2. Дан вектор $\vec{a}$ (рис. 2.7). **Построить** векторы: а) $3\vec{a}$; б) $-\frac{3}{2}\vec{a}$.

Решение. а) Увеличиваем модуль вектора $\vec{a}$ в 3 раза, сохраняя его направление.

Получаем вектор $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\vec{a}$ (рис. 2.8).

б) Строим вектор $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \frac{2}{3}\vec{a}$, а затем поворачиваем OA на $180°$. Получим искомый вектор $\left|\overrightarrow{OB}\right| = -\frac{2}{3}\vec{a}$ (рис. 2.9). Можно построить сначала вектор $-\vec{a}$, а затем изменить его модуль в $\frac{2}{3}$ раза.

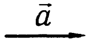


Рис. 2.7

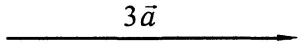


Рис. 2.8

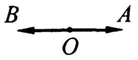


Рис. 2.9

1.3. Доказать, что в произвольном четырехугольнике вектор, соединяющий середины диагоналей, равен геометрической полусумме двух векторов, образующих противоположные стороны четырехугольника.

Решение. Построим четырехугольник и векторизуем стороны и диагонали, как показано на рис. 2.10. Требуется доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA})$ или $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB})$. На основании правила сложения векторов вектор $\overrightarrow{EF}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$.

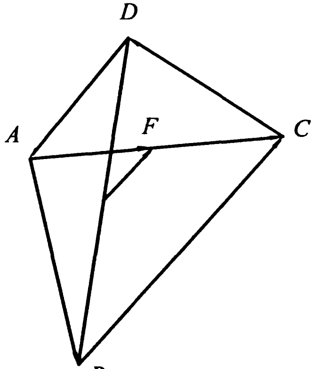


Рис. 2.10

Представим векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AF}$ через векторы сторон четырехугольника $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$; $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$.

Подставляя найденные векторы в исходное векторное равенство, получим $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\right)$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и второе векторное равенство.

1.4. Разложить высоту $\overrightarrow{DO}$ правильной треугольной пирамиды (рис. 2.11) по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

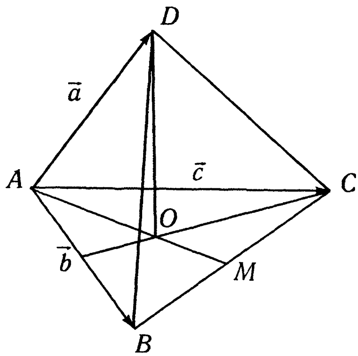


Рис. 2.11

Решение. Поскольку пирамида правильная, точка пересечения высоты DO и основания является точкой пересечения медиан основания. Используя свойство точки пересечения медиан треугольника, запишем $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Поскольку $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, то $\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=$ $=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$.

1.5. В параллелограмме $ABCD$ точки M,N,P,Q середины сторон (рис. 2.12).

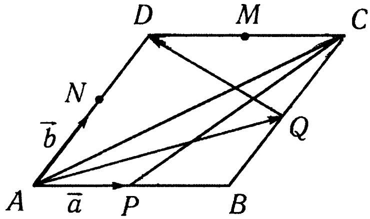


Рис. 2.12

Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{QD}, \overrightarrow{CP}$ как линейные комбинации векторов $\overrightarrow{AP} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$.

Решение.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - 2\vec{a}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{-2b} - \vec{a}$.

1.6. Однородный треугольник задан радиус–векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ своих вершин M_1, M_2, M_3. **Найти** радиус–вектор $\vec{R}$ центра тяжести.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 2.13).

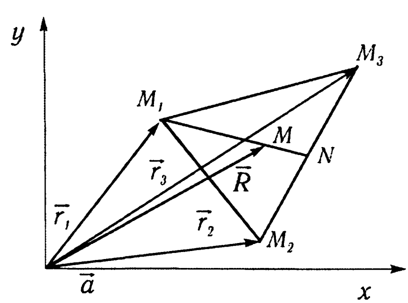


Рис. 2.13

Центр тяжести однородного треугольника находится в точке M пересечения его медиан. Векторизуем стороны треугольника, как показано на рисунке и проведем медиану M_1N. Из свойств медианы следует, что $\overrightarrow{M_2N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_3}$ и $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NM_1}$.

Радиус вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{R}$ находим как сумму векторов $\vec{R} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2N} + \overrightarrow{NM}$. Вектор $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2$. Представим выражения векторов $\overrightarrow{M_2N}$ и $\overrightarrow{NM}$ через известные векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Из треугольника OM_2M_3 находим $\overrightarrow{M_2M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$, тогда $\overrightarrow{M_2N} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$. Из треугольника M_1M_2N находим $\overrightarrow{NM_1} = -\left(\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2N}\right)$; из треугольника OM_2M_1 находим $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Отсюда: $\overrightarrow{NM_1} = -\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \frac{1}{2}\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right)\right) = \vec{r}_1 - \frac{1}{2}\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_3\right)$; $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_1 - \frac{1}{2}\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_3\right)\right)$.

Подставляя найденные значения векторов в выражение суммы векторов, получим $\vec{R} = \vec{r}_2 + \frac{1}{2}\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{r}_1 - \frac{1}{2}\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_3\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3\right)$.

1.7. Электрический фонарь весом 3кг подвешен к потолку на шнуре AB и затем притянут к стенке веревкой BC (рис. 2.14). **Определить** натяжение шнура и веревки, если известно, что угол α =60°, угол β =135°.

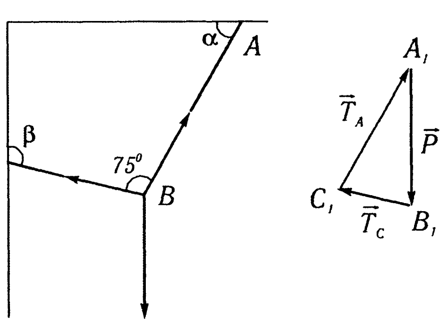


Рис. 2.14

Решение. На точку B действует две силы $\vec{T}_A, \vec{T}_C$ и $\vec{P}$ — вес лампы. Поскольку система сил находится в равновесии, то равнодействующая этих сил равна нулю.

Построим треугольник сил. В выбранном масштабе строим вектор $\vec{P}$ (рис. 2.14). Через начало этого вектора проведем линию действия силы $\vec{T}_A$, а через конец — линию действия силы $\vec{T}_C$. Получим треугольник $A_1B_1C_1$. Векторизуем его стороны $\overline{B_1C_1} = \vec{T}_C, \overline{C_1A_1} = \vec{T}_A$. Модули этих сил найдем по теореме синусов. Для этого определим углы при вершинах треугольника. По условию задачи угол при вершине A_1 равен 30°, при вершине B_1 — 45°, значит, угол при вершине C_1 равен 105°.

Учитывая, что sin105°=sin75°, по теореме синусов имеем

$$\frac{T_A}{\sin 45^\circ} = \frac{T_C}{\sin 30^\circ} = \frac{P}{\sin 75^\circ}.$$

Откуда

$$T_A = 3\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 2{,}19\,кг;\ \ T_C = 3\frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 1{,}55\,кг;$$

1.8. К вершине O прямоугольного параллелепипеда $ABCOGDEF$ (рис. 2.15) приложены три силы, изображаемые векторами $\overline{OE}, \overline{OG}, \overline{OB}$, **найти** величину и направление равнодействующей $\vec{F}$.

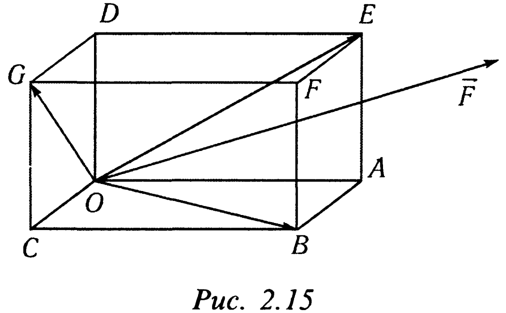


Рис. 2.15

Решение. Обозначим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OC}=\vec{b}, \overrightarrow{OD}=\vec{c}$, тогда

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b},\ \ \overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{c},\ \ \overrightarrow{OD}=\vec{b}+\vec{c}.$$

Поскольку $\vec{F}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}$, то

$$\vec{F}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=2\overrightarrow{OF},$$

т. е. равнодействующая $\vec{F}$ изображается удвоенной диагональю параллелепипеда $\overrightarrow{OF}$.

2.2. Разложение вектора по координатным осям

1°. Всякий вектор в пространстве можно представить как сумму трех векторов, один из которых расположен на оси Ox, второй на оси Oy и третий — на оси Oz

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \tag{1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей.

Модуль вектора $\vec{a}$ равен

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{2}$$

Если через α, β, γ обозначить углы, которые вектор $\vec{a}$ составляет с положительными направлениями координатных осей, то формулы

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|} \tag{3}$$

дают выражения направляющих косинусов вектора $\vec{a}$ через его проекции.

Между направляющими косинусами существует зависимость

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{4}$$

2°. Действия над векторами.

1. Сумма векторов

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}. \qquad (5)$$

2. Умножение на скаляр

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \qquad (6)$$

3. а) Если $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ — координаты начала и конца вектора, то проекции вектора

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1. \qquad (7)$$

б) Модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (8)$$

в) Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{a}|}. \qquad (9)$$

г) Если некоторая ось l составляет с координатными осями углы α, β, γ, то проекция произвольного вектора $\vec{a}$ на эту ось определяется равенством

$$Пр_l\vec{a} = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma. \qquad (10)$$

3°. Задачи на точку.

1. Расстояние между точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (11)$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (11) примет вид

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (12)$$

2. Деление отрезка M_1M_2 в заданном отношении λ. Координаты точки $M(x,y,z)$ делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{13}$$

или

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{2}. \tag{14}$$

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$ и формулы (13) примут вид

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{15}$$

3. Координаты центра тяжести системы n материальных точек массы m_i, расположенных в пространстве, находят по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}. \tag{16}$$

2.1. Заданы начало $A(3,2,-1)$ и конец $B(1,5,2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$. **Найти** разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по координатным осям, его модуль и направляющие косинусы.

Решение. Найдем по формулам (7) проекции вектора на координатные оси

$$(AB)_x=1-3=-2;\ (AB)_y=5-2=3;\ (AB)_z=2+1=3.$$

Отсюда вектор равен $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, а его модуль

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+3^2+3^2}=\sqrt{22}.$$

По формулам (9) направляющие косинусы $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{22}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{22}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}}$.

2.2. Найти единичный вектор для вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$.

Решение. Находим модуль вектора $|\vec{a}|$ по формуле (2)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Единичный вектор $\vec{a}^0$ находим по формуле

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{k}.$$

2.3. Найти сумму векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\vec{a} + \vec{b} + c = (3+4-1)\vec{i} + (2-1+2)\vec{j} + (5+3+2)\vec{k} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 10\vec{k}.$$

2.4. Найти разность векторов $\vec{a}(2;4;-1), \vec{b}(4;-3;5)$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-4)\vec{i} + (4+3)\vec{j} + (-1-5)\vec{k} = -2\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}.$$

2.5. Определить координаты вектора $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{b}| = 5$, он коллинеарен вектору $\vec{a} = \sqrt{7}\,\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ и его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{b}$ через x, y, z, т. е. $\vec{b} = \{x, y, z\}$. Поскольку векторы коллинеарны, то $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \sqrt{7}\lambda\,\vec{i} - 5\lambda\vec{j} + 2\lambda\vec{k}$. Из равенства векторов $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \sqrt{7}\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} + 2\lambda\vec{k}$ следует равенство их координат: $x = \sqrt{7}\lambda,\ y = -5\lambda,\ z = 2\lambda$. Так как $|\vec{b}| = 5$, то по формуле (2) имеем $\sqrt{7\lambda^2 + (-5\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = 5$, откуда $\lambda = \pm\frac{5}{6}$. Поскольку напрвления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают, то следует взять $\lambda > 0$, т. е. $\lambda = \frac{5}{6}$.

Таким образом, координаты искомого вектора будут: $x = \frac{5}{6}, y = -\frac{25}{6}, z = \frac{5}{3}$.

2.6. На векторах $\vec{a}(3;1;4)$ и $\vec{b}(-2;7;1)$ построен параллелограмм. **Найти** величину и направления его диагоналей.

Решение. Из точки A отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 2.16).

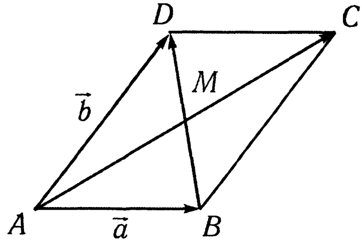


Рис. 2.16

Векторизуем стороны и диагонали параллелограмма. Из треугольника ABC диагональ $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}=(-2-3)\vec{i}+(7-4)\vec{j}+$ $+(1-4)\vec{k}=-5\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-5)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{70}$. Направляющие косинусы определим по формулам (3)

$$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{70}},\quad \cos\beta=\frac{6}{\sqrt{70}},\quad \cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{70}}.$$

Вектор $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-2{,}5\vec{i}+3\vec{j}-1{,}5\vec{k}$. Из треугольника ABM находим вектор $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\vec{i}+4\vec{j}+2{,}5\vec{k}$.

Отсюда вектор $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ равен $\overrightarrow{AC}=\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}$. Длина диагонали AC равна $\overrightarrow{AC}=\sqrt{1^2+8^2+5^2}=\sqrt{90}$, а ее направление определяется направляющими косинусами

$$\cos\alpha_1=-\frac{1}{3\sqrt{10}},\quad \cos\beta_1=\frac{8}{3\sqrt{10}},\quad \cos\gamma_1=-\frac{5}{3\sqrt{10}}.$$

2.7. Даны точки $A(1,2,-1)$ и $B(4,-3,2)$. **Найти** проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. По условию задачи направляющие косинусы равны друг другу и из условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ следует, что $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции $\overrightarrow{AB}(3,-5,3)$. Отсюда по формуле (10) находим, что искомая проекция на ось равна $Пp_l\overrightarrow{AB}=\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.8. Найти величину и направляющие равнодействующей $\vec{R}$ трех сил $\vec{F}_1\{14,5,4\}$, $\vec{F}_2\{-6,2,7\}$, $\vec{F}_3\{4,2,9\}$.

Решение. Находим проекции равнодействующей как сумму проекций компонентов $\vec{R}=12i+9j+20k$. Величина равнодействующей $|\vec{R}|=\sqrt{144+81+400}=25$. Направление равнодействующей определяется направляющими косинусами $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$.

2.9. Даны точки $A(1,2,3)$ и $B(-1,4,2)$. **Найти** длину отрезка AB и координаты точки C, делящей отрезок в отношении $\lambda=\frac{1}{3}$.

Решение. Применяя формулу (11), находим длину отрезка

$$d_{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2+(2-3)^2}=3\,.$$

Координаты точки C находим по формулам (13)

$$x=\frac{1+\frac{1}{3}(-1)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad y=\frac{2+\frac{1}{3}4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},\quad z=\frac{3+\frac{1}{3}2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{11}{4}.$$

2.10. Отрезок AB делится точкой C в отношении, равном 2. По данным точкам A (3,4,–1) и C (2,–3,1) **найти** точку B.

Решение. Используя формулы деления отрезка в данном отношении (13), выразим координаты точки B (x_2, y_2, z_2)

$$x_2 = \frac{(1+\lambda)x - x_1}{\lambda}, \quad y_2 = \frac{(1+\lambda)y - y_1}{\lambda}, \quad z_2 = \frac{(1+\lambda)z - z_1}{\lambda}.$$

Подставляя данные условия, получаем

$$x_2 = \frac{3\cdot 2-3}{2} = 1{,}5; \quad y_2 = \frac{3(-3)-4}{2} = -6{,}5; \quad z_2 = \frac{3\cdot 1+1}{2} = 2.$$

2.3. Скалярное произведение

1°. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр (число), равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (2)$$

2°. Свойства

1. Переместительность

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}. \qquad (2)$$

2. Распределительность

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c}) + \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right). \qquad (3)$$

3. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения

$$\left(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right). \qquad (4)$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2. \qquad (5)$$

5. Скалярное произведение единичных векторов определяется формулами

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0. \tag{6}$$

3°. Выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных проекций перемножаемых векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{7}$$

Угол между двумя векторами

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{8}$$

Условие перпендикулярности двух векторов

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{9}$$

Косинус угла между двумя направлениями в пространстве равен сумме произведений одноименных направляющих косинусов этих направлений

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{10}$$

Условие перпендикулярности двух направлений

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0. \tag{11}$$

4°. Работа A силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

$$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{S}}\right). \tag{12}$$

3.1. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}+4\vec{d}$.

Решение. Находим $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+4\vec{d}\right)=2\vec{a}\cdot\vec{c}+8\vec{a}\cdot\vec{d}-$ $-3\vec{b}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\cdot\vec{d}$.

3.2. Дан ромб $ABCD$ (рис. 2.17). **Доказать,** что его диагонали пересекаются под прямым углом.

Решение. Векторизуем стороны и диагонали ромба, как показано на рис. 2.17. Тогда имеем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$. Поскольку $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. Составим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = 0$, так как в ромбе все стороны равны и $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. Поскольку скалярное произведение векторов — диагоналей $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ равно нулю, то эти векторы взаимно–перпендикулярны, что и требовалось доказать.

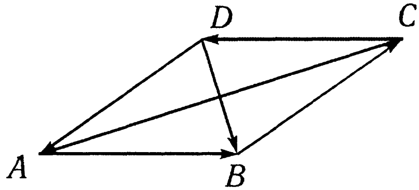


Рис. 2.17

3.3. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Решение. Используя формулу (8), имеем

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 1 + (-3)(-1) + 5\cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{418}}.$$

3.4. Определить углы треугольника ABC с вершинами $A(1,1,1)$; $B(2,-1,3)$; и $C(0,0,5)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}\,(-1,-1,4)$. Угол между ними находим по формуле (8)

$$\cos A = \frac{1(-1)+(-2)(-1)+2\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad A=45^\circ.$$

Найдем координаты векторов $\overline{BA}$ (–1,2,–2); и $\overline{BC}$ (–2,1,2). Отсюда угол между ними

$$\cos B = \frac{-1(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = 0; \quad B=90^\circ,$$

следовательно, $C = 45^\circ$.

3.5. Заданы направления $l_1(45°;45°;90°)$ и $l_2(45°;90°;45°)$. **Найти** угол φ между ними.

Решение. По формуле (10) имеем

$$\cos\varphi = \cos45^\circ\cos45^\circ+\cos45^\circ\cos90^\circ+\cos90^\circ\cos45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\varphi = 60^\circ$.

3.6. В плоскости Oxy **найти** вектор $\vec{a}$, перпендикулярный вектору $\vec{b}\,\{3,-4,12\}$ и имеющий с ним одинаковую длину.

Решение. Пусть вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Из условия перпендикулярности векторов имеем $3x–4y=0$. Длина вектора $\vec{b}$ будет $|\vec{b}| = \sqrt{9+16+144} = 13$, а длина $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, $x^2+y^2=169$. Поскольку $x = \frac{2}{3}y$, то $\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 169 \Rightarrow y = \pm\frac{39}{5}, x = \pm\frac{52}{5}$. Откуда $\vec{a} = \pm\frac{13}{5}(4\vec{i}+3\vec{j})$.

3.7. Найти единичный вектор $\vec{n}$, одноврменно перпендикулярный вектору $\vec{a}\{5,-4,3\}$ и оси абсцисс.

Решение. Пусть вектор $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поскольку он перпендикулярен оси абсцисс, то $\vec{n} = \vec{n}(0,y,z)$. Для единичного вектора имеем $|\vec{n}| = 1 \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$. Из условия перпендикулярности векторов получим $\vec{a}\cdot\vec{n}=-4y+3z=0$; $y=\dfrac{3}{4}z$. Отсюда $\dfrac{9}{16}z^2+z^2=1$, $z=\pm\dfrac{4}{5}$, $y=\pm\dfrac{3}{5}$. Таким образом, $\vec{n}=\pm\dfrac{1}{5}(3\vec{j}+4\vec{k})$.

3.8. Найти координаты вектора $\vec{d}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, если он ортогонален векторам $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+6\vec{k}$, а скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ равно -1.

Решение. Условие ортогональности двух векторов заключается в равенстве нулю их скалярного произведения. Поэтому $x-2y+3z=0$ и $2x+6z=0$.

Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и $\vec{c}$ запишем в виде $x+y+2z=-1$.

Полученные уравнения образуют неоднородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x-2y+3z = 0, \\ 2x+6z = 0, \\ x+y+2z = -1. \end{cases}$$

Находим определитель системы

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение. Воспользуемся формулами Крамера

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}.$$

Вычислим определители D_x, D_y и D_z

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12; \ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \ D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Отсюда $x = \frac{12}{-4} = -3,\ y = \frac{0}{-4} = 0,\ z = \frac{-4}{-4} = 1.$

Таким образом, вектор $\vec{d}$ будет $\vec{d} = -3\vec{i} + \vec{k}$.

3.9. Найти координаты вектора $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, если он ортогонален вектору $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$; скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ равно 1 и проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ равна $\frac{1}{5}$.

Решение. Из условия ортогональности векторов $\vec{d}$ и $\vec{a}$ находим, что $2x - z = 0$. Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ равно 1, то $x - y + z = 1$.

Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}$ равна

$$Пр_c\vec{d} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|} = \frac{3y - 4z}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}.$$

Отсюда $3y - 4z = 1$.

Таким образом, имеем линейную систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x - z = 0, \\ x - y + z = 1, \\ 3y - 4z = 1. \end{cases}$$

Вычисляем определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&-1&1\\0&3&-4\end{vmatrix}=-1.$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Воспользуемся формулами Крамера. Найдем определители

$$D_x=\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-1&1\\1&3&-4\end{vmatrix}=-4;\quad D_y=\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&1&1\\0&1&-4\end{vmatrix}=-11,\quad D_z=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\0&3&1\end{vmatrix}=-8.$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-4}{-1}=4,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-11}{-1}=11,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-8}{-1}=8.$$

Таким образом, вектор $\vec{d}$ будет $\vec{d}=4\vec{i}+11\vec{j}+8\vec{k}$.

3.10. Найти значение коэффициента α, при котором векторы $\vec{\alpha}=\alpha\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=4$ и угол между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\alpha\vec{e}_1+2\vec{e}_2)(3\vec{e}_1-\vec{e}_2)=$$

$$=3\alpha(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)-\alpha(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+6(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)-2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=0.$$

Произведения векторов по определению скалярного произведения будут

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=1;\ (\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot4\frac{1}{2}=2;$$

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1);\ (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)=16.$$

Таким образом, $3\alpha-2\alpha+6\cdot2-2\cdot16=0$ откуда $\alpha=20$.

3.11. Найти работу, производимую силой $\vec{F}=\{6,1,2\}$ на перемещении $\vec{S}=\{2,4,1\}$.

Решение. Составим скалярное произведение этих векторов, тогда работа будет равна

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=6\cdot 2+1\cdot 4+2(-1)=14(\textit{ед.раб.}).$$

2.4. Векторное произведение

1°. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Модуль $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{1}$$

2. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. $\vec{c}$ направлен так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ составляют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначают $\vec{c}=\vec{a}\times b$ или $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$.

2°. Основные свойства.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то данное равенство выражает условие коллинеарности векторов.

2. $$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right). \tag{2}$$

3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения

$$\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right). \tag{3}$$

4. Векторное произведение единичных векторов определяется формулами

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}. \qquad (4)$$

5. Обладает распределительностью

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}. \qquad (5)$$

3°. Выражение векторного произведения через проекции перемножаемых векторов

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Условием параллельности векторов служит пропорциональность их одноименных проекций на координатные оси

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (7)$$

4°. Приложения. 1. Момент силы $\vec{F}$, приложенный к точке B относительно точки A определяется равенством

$$\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}. \qquad (8)$$

2. Площадь $\Delta\ ABC$ равна половине площади параллелограмма $ABDC$ (рис. 2.18) и равна

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{matrix}\right\|. \qquad (9)$$

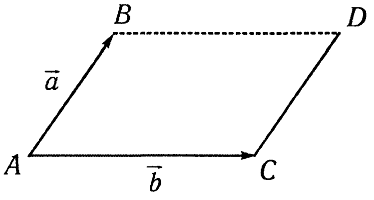


Рис. 2.18

4.1. Даны векторы $\vec{a}$ (3,4,1) и $\vec{b}$ (–1,2,5). **Найти** координаты векторного произведения $[\vec{a}\ \vec{b}\,]$.

Решение. Воспользуемся формулой (6)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=18\vec{i}-16\vec{j}+10\vec{k},$$

тогда координаты векторного произведения будут $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\{18,-16,10\}$.

4.2. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$ и $C(7,3,4)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$ (3,5, –8), $\overrightarrow{AC}$ (6,3,–2) и воспользуемся формулой (9)

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & -8\\ 6 & 3 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|14\vec{i}-42\vec{j}-21\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(14)^2+(-42)^2+(-21)^2}=24{,}5.$$

4.3. Пирамида задана координатами ее вершин $A_1(1,2,0)$, $A_2(-1,2,1)$, $A_3(2,0,5)$, $A_4(-2,5,4)$. **Найти:** а) длину ребра A_2A_3; б) площадь грани $A_1A_2A_3$; в) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Решение. а) Найдем вектор $\overrightarrow{A_2A_3}$ по формуле

$\overrightarrow{A_2A_3}=(2+1)\vec{i}+(0-2)\vec{j}+(5-1)\vec{k}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$. Отсюда модуль вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ равен $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{29}$.

б) Найдем вектор $\overrightarrow{A_2A_1}:\overrightarrow{A_2A_1}=(1+1)\vec{i}+(2-2)\vec{j}+(0-1)\vec{k}=2\vec{i}-\vec{k}$.

Составим векторное произведение

$$\overline{A_2A_1}\times\overline{A_2A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-2\vec{i}-11\vec{j}-4\vec{k}\ .$$

Площадь грани находим по формуле (9)

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-11)^2+(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{141}.$$

в) Вектор $\overline{A_1A_2}=-\overline{A_2A_1}=-2\vec{i}+\vec{k}$. Найдем вектор $\overline{A_1A_4}$: $\overline{A_1A_4}=(-2-1)\vec{i}+(5-2)\vec{j}+(4-0)\vec{k}=-3\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.

Косинус угла между ребрами находим по формуле (8) пункта 2.3

$$\cos\varphi=\frac{(-2)(-3)+0\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{170}}\simeq 0,766.$$

Откуда $\varphi\simeq 40°$.

4.4. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}\,\{1,0,3\}$, $\vec{b}\,\{-2,4,-3\}$ и образует с осью Oy острый угол, а его модуль равен 39.

Решение. Поскольку векторы $\vec{x}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ коллинеарны, то

$$\vec{x}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 4 & -3\end{vmatrix}=\lambda(-12\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}).$$

Зная модуль вектора $\vec{x}$, находим λ

$$|\vec{x}|=39=|\lambda|\sqrt{144+9+16},\quad \lambda=\pm 3.$$

Острый угол между векторами $\vec{x}$ и осью Oy будет

$\cos\beta = \dfrac{-3\lambda}{|\vec{x}|} > 0$, следовательно, $\lambda = -3$.

Таким образом, $\vec{x} = 36\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$.

4.5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} + 4\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, а угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Площадь параллелограмма находим по формуле $S = |\vec{a}\times\vec{b}|$. Используя распределительное свойство векторного произведения, а также то, что $\vec{m}\times\vec{m} = 0$, $\vec{n}\times\vec{n} = 0$, $\vec{m}\times\vec{n} = -\vec{n}\times\vec{m}$ будем иметь $\vec{a}\times\vec{b} = (3\vec{m} - 2\vec{n})\times(5\vec{m} + 4\vec{n}) = 15\vec{m}\times\vec{m} +$
$+12(\vec{m}\times\vec{n}) - 10(\vec{n}\times\vec{m}) - 8(\vec{n}\times\vec{n}) = 22(\vec{m}\times\vec{n})$.

Величина векторного произведения $\vec{m}\times\vec{n}$ равна

$$\vec{m}\times\vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|\sin\left(\widehat{\vec{m}\vec{n}}\right) = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}3.$$

Отсюда

$$S = 22|\vec{m}\times\vec{n}| = 22\cdot 3 = 66\,\textit{кв.ед.}$$

2.5. Смешанное произведение векторов

1°. *Смешаным произведнием* трех векторов называется выражение вида

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \text{ или } \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,.$$

Если векторы заданы своими координатами, то

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

2°. Свойства.

1. При перестановке сомножителей смешанное произведение меняет знак

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}. \qquad (2)$$

2. Смешанное произведение обладает свойством

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\vec{b}. \qquad (3)$$

3. Если два из трех векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно нулю.

3°. Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (4)$$

4°. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен

$$V_n=\frac{1}{6}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (5)$$

5°. Условие компланарности. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

5.1. В пространстве даны четыре точки: $A\,(1,1,1)$, $B\,(2,4,7)$, $C\,(-1,2,-3)$, и $D\,(-3,2,1)$. **Найти** объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины B.

Решение. Пусть A вершина тетрэдра. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 2.19): $\overrightarrow{AB}=\{1,3,6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,1,-4\}$, $\overrightarrow{AD}=\{-4,1,0\}$. Объем тетраэдра находим по формуле (5)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{32}{3}.$$

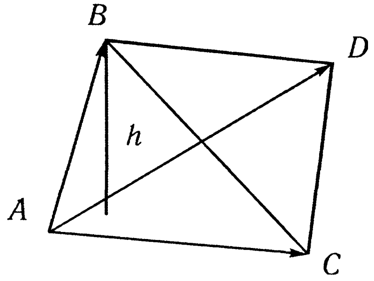


Рис. 2.19

Найдем площадь основания

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|4\vec{i}+16\vec{j}+2\vec{k}\right|=\sqrt{69}.$$

Поскольку $h=\dfrac{3V}{S}$, то $h=\dfrac{3\cdot 32}{3\sqrt{69}}=\dfrac{32\sqrt{69}}{69}$.

5.2. Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}\{1,-3,2\}$, $\vec{b}\{3,1,-2\}$, $\vec{c}\{2,-1,2\}$, и определить ориентацию тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в пространстве.

Решение. Найдем значение смешанного произведения

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=20.$$

Поскольку смешанное произведение векторов положительное, то они образуют правую тройку.

Объем треугольной призмы равен половине объема параллелепипеда построенного на этих векторах

$$V_{пр} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| = 10.$$

5.3. Доказать компланарность векторов $\vec{a}\{4,3,5\}$, $\vec{b}\{2,2,2\}$, $\vec{c}\{-3,-2,-4\}$

Решение. Условие компланарности $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = 0$. Откуда

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, векторы компланарны.

5.4. Даны векторы $\vec{a} = (-1,-1,2)$ и $\vec{b} = (1,-2,2)$. **Найти** неизвестный вектор $\vec{x} = (x,y,z)$, если скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{x} = -7$, вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{x}$ перпендикулярен оси Ox, а смешанное произведение $\vec{x}\vec{a}\vec{b} = 2$.

Решение. Используя условие $\vec{a}\cdot\vec{x} = -7$, получим уравнение $-x - y + 2z = -7$ или $x + y - 2z = 7$.

Воспользуемся векторным произведением

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(z+2y)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}.$$

Поскольку вектор $\vec{c}$ перпендикулярен оси Ox, то проекция c_x вектора $\vec{c}$ на ось Ox равна 0, то есть $c_x = -(2y+z) = 0$.

Из условия $\vec{x}\vec{a}\vec{b} = 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \text{т.е.} \quad 2x + 4y + 3z = 2.$$

Полученные уравнения объединим в систему

$$\begin{cases} x+y-2z=7, \\ 2y+z=0, \\ 2x+4y+3z=2. \end{cases}$$

Решение ищем по формулам Крамера. Находим определитель системы

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=12\neq 0.$$

Так как определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, $z=\dfrac{D_z}{D}$.

$$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=24;\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=12;\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-24;$$

$$x=\frac{24}{12}=2,\quad y=\frac{12}{12}=1,\quad z=\frac{-24}{12}=-2.$$

Таким образом, неизвестный вектор $\vec{x}=\{2,1,-2\}$.

5.5. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{k}$ построен параллелепипед. **Найти** его высоту, опущенную на грань, образованную векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Решение. Объем параллелепипеда по формуле (4) будет

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \end{matrix}\right\|=\left|16+12-6+12\right|=34.$$

С другой стороны, объем равен $V=S\cdot h$, где S — площадь грани, образованная векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{matrix}\right\|=\left|-4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}\right|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$S=\frac{V}{S}=\frac{34}{5\sqrt{2}}=\frac{17\sqrt{2}}{5}.$$

Глава 3
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Длина и направление отрезка

1°. *Координатой* точки M на оси x называется положительное или отрицательное число, отложенное, соответственно, вправо или влево от начала координат в выбранном масштабе.

Декартова или *прямоугольная система координат* представляет совокупность двух взаимно–перпендикулярных осей; оси абсцисс Ox и оси ординат Oy (рис. 3.1).

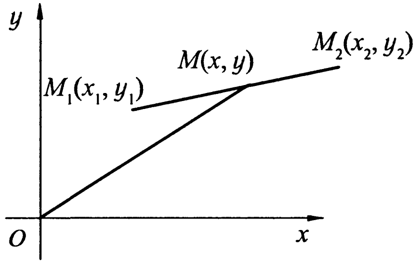


Рис. 3.1

Декартовыми координатами точки М называются проекции радиус–вектора OM на оси координат (x,y).

Направленным отрезком на оси называется отрезок, у которого определены начало $M_1(x_1)$ и конец $M_2(x_2)$. Здесь x_1,x_2 — координаты начала и конца отрезка.

2°. Величина отрезка на оси равна его длине $M_1M_2=|M_1M_2|$, если направление отрезка совпадает с осью; в противном случае величина отрезка равна его длине со знаком минус $M_1M_2=-|M_2M_1|$. Через координаты величина отрезка определяется по формуле

$$M_1M_2=x_2-x_1, \tag{1}$$

а длина или расстояние между двумя точками

$$d=M_1M_2=|x_2-x_1|. \tag{2}$$

Длина отрезка на плоскости (рис. 3.1), заданного координатами своего начала $M_1(x_1,y_1)$ и конца $M_2(x_2,y_2)$, равна

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \tag{3}$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (3) примет вид

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{4}$$

3°. Пусть φ и ψ — углы, составляемые отрезком с положительными направлениями осей координат Ox, Oy, тогда направление отрезка определится заданием косинусов этих углов

$$\cos\varphi=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}};\quad \cos\psi=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}. \tag{5}$$

1.1. Построить на числовой оси точки $A(-4)$, $B(5)$, и $C(1)$, **найти** величины отрезков AB,BC и AC на оси, длину отрезка BC и **проверить** равенство $AB+BC=AC$.

Решение. На оси x в выбранном масштабе откладываем от начала координат соответственно точки A, B и C (рис .3.2). Величины отрезков находим по формуле (1)

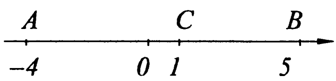


Рис. 3.2

$$AB = x_B - x_A = 5-(-4) = 9, \qquad BC = x_C - x_B = 1-5 = -4,$$

$$AC = x_C - x_A = 1-(-4) = 5.$$

Длину отрезка ВС находим по формуле (2)

$$d = |BC| = |x_C - x_B| = |-4| = 4.$$

Подставляя найденные величины отрезков на оси в доказываемое равенство, получим 9+(–4)=5, 5=5.

1.2. Даны точки $A(-1,-3)$ и $B(4,2)$. **Найти** длину отрезка и его направление.

Решение. Длину отрезка, заданного координатами своего начала и конца находим по формуле (3)

$$d = |AB| = \sqrt{(4+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Направляющие косинусы находим по формулам (5)

$$\cos\varphi = \frac{4+1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\psi = \frac{2+3}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда угол с положительным направлением оси Ox равен $\varphi = 45°$, а оси Oy равен $\psi = 45°$.

1.3. Найти точку, удаленную от оси Oy и от точки $A(1,2)$ на 5 единиц.

Решение. Геометрическим местом точек удаленных от оси Oy и точки A будет прямая параллельная оси Oy и отстоящая от оси на расстоянии 5 единиц (рис. 3.3), т. е. $x = 5$. Пусть точка $M(5,y)$ искомая точка, тогда по формуле (3)

$$5=\sqrt{(5-1)^2+(y-2)^2},$$

откуда $25=16+(y-2)^2$ или $(y-2)^2=9$.

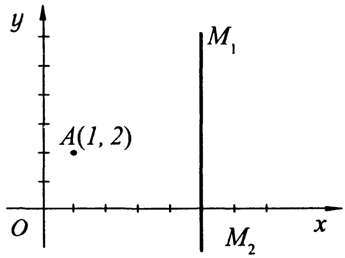


Рис. 3.3

Решая последнее уравнение, находим $y_1=5$, $y_2=-1$. Таким образом, искомых точек на прямой две $M_1(5,5)$, $M_2(5,-1)$.

1.4. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(2,1)$, $B(-3,2)$, $C(-1,1)$.

Решение. Обозначим координаты центра окружности O за x, y, а радиус за R, тогда по формуле (3) будем иметь

$$R^2=(x-2)^2+(y-1)^2,$$

$$R^2=(x+3)^2+(y-2)^2,$$

$$R^2=(x+1)^2+(y-1)^2.$$

Вычитая из первого третье уравнение, находим, что $x=\frac{1}{2}$. Подставляя $x=\frac{1}{2}$ во второе и третье и вычитая из второго третье, находим, что $y=\frac{13}{2}$. Подставляя найденные x,y в любое из трех уравнений, получаем, что $R=\frac{\sqrt{130}}{2}$.

1.5. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(1,5)$, $B(-2,1)$, $C(1,-2)$, и $D(10,2)$ есть параллелограмм.

Решение. Известно, что четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны, есть параллелограмм. Докажем равенство противоположных сторон AB и CD (BC и DA). Найдем длины этих сторон

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Следовательно, $AB = CD$.

Аналогично: $d_{BC} = \sqrt{(7+2)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{10}$,

$d_{DA} = \sqrt{(1-10)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{10}$, то есть $BC = DA$.

Поскольку противоположные стороны равны, то четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм, что и требовалось доказать.

3.2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника. Центр тяжести

1°. Координаты точки $M(x,y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, (рис. 3.1) находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1}$$

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$ и координаты равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

Если λ — число отрицательное, то точка M находится на продолжении отрезка M_1M_2 и деление называется внешним.

2°. Площадь треугольника с вершинами $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]\right| . \quad (3)$$

Если, следуя по контуру треугольника от M_1 к M_2 и к M_3, площадь обходится против часовой стрелки, то число S положительное, в противном случае — отрицательное. Поскольку площадь треугольника — величина положительная, то правая часть формулы (3) берется по абсолютной величине.

Если площадь треугольника равна нулю, то из формулы (3) следует равенство

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0, \quad (4)$$

которое является условием того, что три точки M_1 , M_2 и M_3 расположены на одной прямой.

3°. Площадь многоугольника с вершинами $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, ... ,$M_n(x_n,y_n)$ определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+....+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right)\right|. \quad (5)$$

4°. Если в точках $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ помещены массы m_1,m_2,m_3 соответственно, то координаты центра тяжести этих масс находятся по формулам

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}; \quad y_c=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}. \quad (6)$$

Отсюда координаты центра тяжести площади однородного треугольника определяются по формулам

$$x_c=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \quad y_c=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \quad (7)$$

Координаты центра тяжести системы, состоящей из n материальных точек $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$, ... ,$M_n(x_n,y_n)$, соответственно с массами m_1,m_2, ... ,m_n, определяются по формулам

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \quad (8)$$

2.1. Найти точку, делящую отрезок между точками $M_1(-1,8)$ и $M_2(3,3)$ в отношении $\lambda = \frac{3}{2}$.

Решение. Для отыскания координат точки, делящей отрезок в отношении $\lambda = \frac{3}{2}$, воспользуемся формулами (1)

$$x = \frac{-1 + \frac{3}{2}\cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{8 + \frac{3}{2}\cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = 5.$$

2.2. Найти точку C, делящую отрезок между точками $A(-2)$ и $B(4)$ на оси в отношении $\lambda = -2$.

Решение. Считаем, что точки A и B расположены на оси x, тогда для отыскания точки C можно воспользоваться первой из формул (1)

$$x = \frac{-1 - 2\cdot 4}{1 - 2} = 10.$$

2.3. В треугольнике с вершинами $A(-2,0)$, $B(6,6)$, $C(1,-4)$ **определить** длину медианы AD, длину биссектрисы AE, вычислить площадь треугольника и координаты центра тяжести, полагая его однородным.

Решение. Так как медиана AD делит отрезок BC пополам (рис. 3.4), то $\lambda = 1$ и координаты точки D находятся по формулам (2)

$$x_D = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}, \quad y_D = \frac{6-4}{2} = 1.$$

Отсюда длина медианы $AD = \sqrt{(7/2+2)^2 + (1-0)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

Биссктриса AE делит сторону BC на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} = \lambda$.

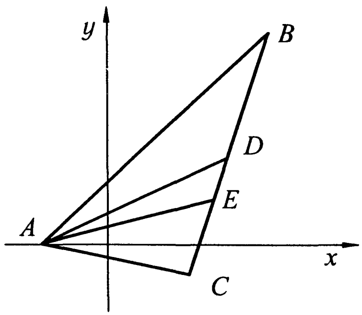


Рис. 3.4

Найдем длины отрезков AB и AC

$$|AB| = \sqrt{(6+2)^2 + 6^2} = 10; \quad |AC| = \sqrt{(1+2)^2 + (-4)^2} = 5.$$

Отсюда $\lambda = 2$ и координаты точки E

$$x_E = \frac{6+2}{1+2} = \frac{8}{3}; \quad y_E = \frac{6-2\cdot 4}{1+2} = -\frac{2}{3}.$$

Длина биссектрисы AE

$$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}+2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Площадь треугольника находим по формуле (3), полагая координаты точки A за x_1, y_1, точки B за x_2, y_2, C — за x_3, y_3

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[-2(6+4) + 6(-4-0) + 1(0-6)\right]\right| = 25 \text{ кв.ед.}$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (7)

$$x = \frac{-2+6+1}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{0+6-4}{3} = \frac{2}{3}.$$

2.4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,-1)$. **Найти** четвертую вершину.

Решение. Диагонали параллелограмма в точке пересечения E делятся пополам (рис. 3.5).

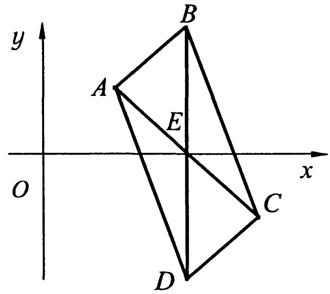


Рис. 3.5

Зная координаты точек A и C, находим по формулам (2) координаты точки E

$$x=\frac{1+3}{2}=2; \quad y=\frac{1-1}{3}=0.$$

Далее по этим же формулам находим координаты точки D

$$2=\frac{2+x}{2}, \quad 0=\frac{2+y}{2}, \quad x=2, \quad y=-2.$$

2.5. В точках $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-2,5)$ помещены соответственно массы 50, 20 и 30г. **Определить** центр масс этой системы.

Решение. Для нахождения координат центра масс системы пользуемся формулами (6)

$$x_C=\frac{2\cdot 50-20-2\cdot 30}{50+20+30}=0,2, \quad y_C=\frac{50+3\cdot 20+5\cdot 30}{50+20+30}=2,6.$$

2.5. На концы однородного стержня длиной 50 см и весом 100г насажены шары весом 20 и 80г. **Найти** центр тяжести системы.

Решение. Пусть ось x проходит вдоль стержня, причем начало координат совпадает с центром шара весом 20г. Координата центра тяжести шаров может быть найдена из упрощенной формулы (6)

$$x_{ш} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{20 \cdot 0 + 80 \cdot 50}{20 + 80} = 40\,\text{см}.$$

Координата центра тяжести стержня находится посередине стержня на расстоянии 25 см от начала координат. Полагая, что в этой точке x_1=25 см приложен вес стержня m_1=100 г, а в точке x_2=40 см вес шаров, по этой же формуле находим центр тяжести системы

$$x_C = \frac{100 \cdot 25 + 100 \cdot 40}{100 + 100} = 32{,}5\,\text{см}.$$

2.7. Проверить, лежат ли точки $M_1(2,1)$, $M_2(0,5)$, $M_3(-1,7)$ на одной прямой.

Решение. Воспользуемся формулой (4)

$$2(5-7) + 0(7-1) - 1(1-5) = -4 + 4 = 0.$$

Поскольку левая часть равенства тождественно равна нулю, то точки лежат на одной прямой.

2.8. Вычислить площадь пятиугольника с вершинами $M_1(2,3)$, $M_2(-2,2)$, $M_3(-4,-1)$, $M_4(-1,-5)$, $M_4(4,-2)$.

Решение. Запишем формулу (5) для пятиугольника

$$S = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)\right|.$$

и подставим в нее координаты вершин

$$S = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(4+6) + (2+8) + (20-1) + (2+20) + (12+4)\right| = 38{,}5\ \text{кв.ед.}$$

2.9. Найти координаты центра тяжести фермы (рис. 3.6), состоящей из однородных стержней.

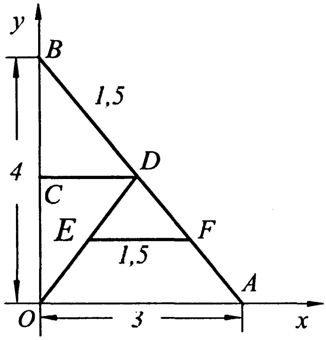


Рис. 3.6

Решение. Поскольку стержни однородны, то масса m_i каждого стержня пропорциональна его длине l_i, то есть $m_i = \rho l_i$, где ρ — линейная плотность.

Используя данные рис. 3.6, найдем массу каждого стержня и его центр тяжести.

Стержень	Масса	Центр тяжести
OA	$m_1=3\rho$	$M_1(1{,}5;0)$
AB	$m_2=5\rho$	$M_2(1{,}5;2)$
BO	$m_3=4\rho$	$M_3(0;2)$
CD	$m_4=1{,}5\rho$	$M_4(0{,}75;2)$
EF	$m_5=1{,}5\rho$	$M_5(1{,}5;1)$
OD	$m_6=2{,}5\rho$	$M_6(0{,}75;1)$

Центр тяжести системы из шести материальных точек $M_1, \ldots, M_6$ находим по формулам (8)

$$x_C = \frac{\rho(3\cdot 1{,}5+5\cdot 1{,}5+4\cdot 0+1{,}5\cdot 0{,}75+1{,}5\cdot 1{,}5+2{,}5\cdot 0{,}75}{(3+5+4+1{,}5+1{,}5+2{,}5)\rho} \approx 0{,}98.$$

$$y_C = \frac{\rho(3\cdot 0+5\cdot 2+4\cdot 2+1{,}5\cdot 2+1{,}5\cdot 1+2{,}5\cdot 1}{(3+5+4+1{,}5+1{,}5+2{,}5)\rho} \approx 1{,}43.$$

3.3. Уравнения прямой линии. Геометрическое истолкование неравенства и системы неравенств первой степени

Прямой линии на плоскости соответствует уравнение первой степени с двумя неизвестными.

1°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

здсь A, B, C — произвольные коэффициенты.

2°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

здесь $k = \operatorname{tg}\varphi$ — угловой коэффициент прямой, φ — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, b — величина отрезка, отсекаемая прямой на оси Oy от начала координат (рис. 3.7).

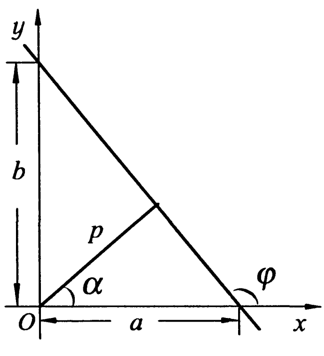


Рис. 3.7

Пользуясь уравнением прямой (2) можно установить, как измнится это уравнение, если от данной прямой L перейти к прямой (рис. 3.8), ей симметричной.

При симметрии относительно оси Ox следует изменить знак коэффициента при x и свободного члена или изменить знак коэффициента при y. На рис. 3.8. эта линия обозначена цифрой 1.

При симметрии относительно оси Oy следует изменить знак коэффициента при x. На рис. 3.8 это линия 2. При симметрии относительно начала координат следует изменить знак свободного члена. На рис. 3.8 это линия 3.

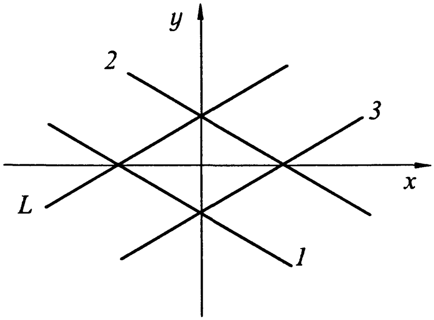


Рис. 3.8

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{3}$$

здесь a, b — величины отрезков, которые прямая отсекает от осей координат (рис. 3.7).

4°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

5°. Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{5}$$

здесь p — длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, α — угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox, против часовой стрелки, до перпендикуляра p (рис. 3.7). Чтобы привести общее уравнение прямой (1) к нормальному виду, нужно общее уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{6}$$

взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C, а если $C = 0$, то знак может быть любой.

6°. Геометрическое истолкование неравенства первой степени. В общем случае неравенство первой степени $Ax+By+C \gtrless 0$ определяет полуплоскость, которая при $C \neq$ устанавливается на основании знака C. Если при $x = 0$ и $y = 0$ знак C совпадает со смыслом неравенства, то полуплоскость, соответствующая ему включает начало координат; если же знак C противоречит неравенству, то соответствующая ему полуплоскость не включает начала координат. Если $C= 0$, то следует ориентироваться на произвольно выбранную точку.

3.1. Написать уравнение прямой проходящей через точку $A(3,4)$ и составляющей с Ox угол 45°.

Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом (2). Угловой коэффициент $k= \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}45°=1$. Подставляя в уравнение (2) координаты точки A и значение k, находим параметр b: $4 = 3+b$, откуда $b=1$ и уравнение примет вид $y = x+1$ или в общем виде $x-y+1= 0$.

3.2. По уравнению прямой $y=-2x+3$ **написать** уравнения прямых, симметричных относительно осей и начала координат. Сделать чертеж.

Решение. Для случая симметрии относительно оси Ox будем иметь уравнение $y = 2x-3$; для случая симметрии относительно оси Oy — уравнение $y = 2x+3$; для случая симметрии относительно начала координат — уравнение $y=-2x-3$.

На рис. 3.9 эти линии, соответственно, обозначены цифрами 1,2,3.

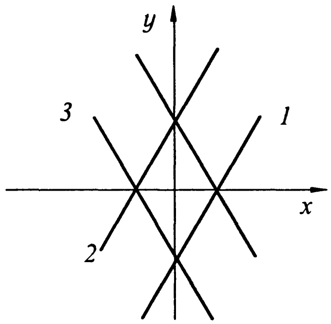


Рис. 3.9

3.3. Даны точки $O(0,0)$ и $A(4,0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0,3)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

Решение. Поскольку точка B, точка пересечения диагоналей параллелограмма, то, проводя из точки O и A прямые через точку B и откладывая от нее отрезки равные OB и AB, получим две другие вершины параллелограмма D и C (рис. 3.10).

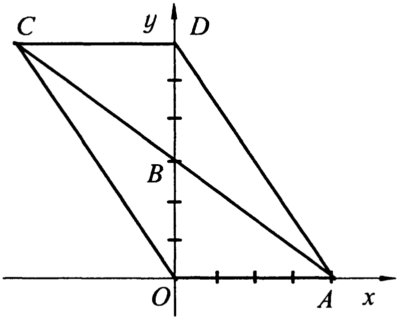


Рис. 3.10

Сторона параллелограмма OA совпадает с осью Ox, а диагональ OD с осью Oy, следовательно их уравнения будут $y=0$, $x=0$. Сторона CD параллельна оси Ox и отсекает на оси Oy отрезок равный 6 единицам, следовательно ее уравнение будет $y = 6$.

Диагональ AC и сторона AD отсекают на координатных осях отрезки равные a=4, b=3, и a=4, b=6 единицам, подставляя которые в уравнение прямой в отрезках на осях (3), получим

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1, \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$$

или в общем виде $3x+4y-12 = 0$ и $3x+2y-12 = 0$.

Сторона OC проходит через начало координат и имеет уравнение $y=kx$, где угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\angle COD)=-\operatorname{ctg}(\angle COD)=-\frac{OD}{CD}=-\frac{3}{2}$. Отсюда, $y=-\frac{3}{2}x$ или $3x+2y=0$.

3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;2)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 2 кв. единицам.

Решение. Пусть прямая, проходящяя через точку A, отсекает на координатных осях отрезки a и b (рис. 3.11), тогда уравнение прямой примет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1$.

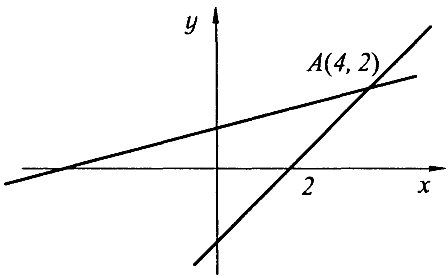


Рис. 3.11

С другой стороны известно, что $\frac{1}{2}a\cdot b=2$ или $a\cdot b=4$. Так как прямая проходит через точку A, то ее координаты обращают уравнение прямой в тождество $\dfrac{4}{a}+\dfrac{2}{-b}=1$. Решая эти уравнения относительно a и b находим

$$b^2-b-2=0,\quad b_1=2,\quad b_2=-1 \quad \text{и} \quad a_1=2,\ a_2=-4.$$

Подставляя a_1, b_1 в уравнение искомой прямой, получим $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}=1$ или $x-y-2=0$.

Подставляя a_2, b_2, будем иметь $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{1}=1$ или $x-4y+4=0$.

Таким образом, прямых удовлетворяющих условию, две.

3.5. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(5;3)$, $C(1;-1)$ **найти** уравнение стороны BC и медианы AD.

Решение. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки (4), находим уравнение стороны BC

$$\frac{x-5}{1-5}=\frac{y-3}{-1-3} \quad \text{или} \quad x-y-2=0.$$

Медиана делит противоположную сторону пополам, поэтому координаты точки D

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5+1}{2}=3;\quad y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3-1}{2}=1.$$

Еще раз пользуясь уравнением (4), находим уравнение медианы AD

$$\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-0}{1-0} \quad \text{или} \quad x-5y+2=0.$$

3.6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, \sqrt{3})$ и удаленной от начала координат на расстояние равное 2 единицам.

Решение. Подставим координаты точки A и значение $p=2$ в нормальное уравнение прямой (5), получим $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha-2=0$

или $\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 1$. Откуда $\sin 30° \cos\alpha + \cos 30° \sin\alpha =$ $= \sin(30° + \alpha) = 1$ и $\alpha = 60°$.

Тогда уравнение прямой $x\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 0$ или $x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0$.

3.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;4)$ и $B(3;8)$.

Решение. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки (4), получим $\frac{y-4}{8-4} = \frac{x-3}{3-3}$. Данное уравнение имеет смысл, если $x-3 = 0$. Итак, уравнение прямой есть $x = 3$. Это прямая, параллельная оси Oy и отсекающая по оси x три единицы.

3.8. Найти полуплоскости, соответствующие неравенствам: а) $x-3y+2<0$; б) $2x+y+5>0$; в) $4x-3y \geq 0$.

Решение. а) Так как свободный член не удовлетворяет неравенству при $x = 0$ и $y = 0$, то определяемая неравенством полуплоскость не содержит начала координат. Штриховка указывается направлением от прямой $x-3y+2 = 0$ в сторону противоположную началу координат (рис. 3.12).

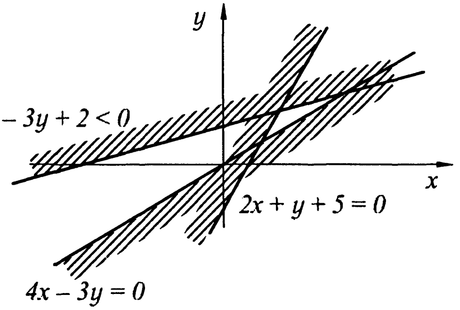


Рис. 3.12

б) Поскольку при $x = 0$, $y = 0$ знак свободного члена не нарушает неравенсвтво, то соответствующая полуплоскость от прямой $2x+y+5 = 0$ включает начало координат.

в) Изобразим прямую на рис. 3.12. Для определения полуплоскости возьмем произвольную точку с координатами $M(0;1)$, тогда получим –3>;0. Поскольку знак неравенства показывает, что искомая полуплоскость не включает выбранной точки M, то штриховка от прямой должна быть направлена в сторону, противоположную точке M. Следует заметить, что в данном случае полуплоскость включает и точки граничной прямой.

3.9. Найти области, соответствующие неравенствам:

а) $\begin{cases} x-2y+3\geq 0, \\ x-2y-3< 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3\geq 0, \\ x-2y-3> 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y+3\leq 0, \\ x-2y-3> 0; \end{cases}$

Решение. Построим прямые $x–2y+3 = 0$ и $x–2y–3 = 0$, соответствующие заданным неравенствам (рис. 3.13). Прямые параллельны. Полагая $x = 0$, $y = 0$, строим полуплоскости по знаку свободного члена. В зависимости от сочетаний знаков неравенств пересечение соответствующих плоскостей существует: а) в виде части плоскости между двумя параллельными прямыми, причем прямая $x–2y+3 = 0$ включается в искомую область; б) при одинаковых знаках в системе общая часть совпадает с полуплоскостью, которая не включает другой граничной прямой, то есть геометрическим изображением служит полуплоскость $x–2y–3>0$ (рис. 3.14); в) в данном случае полуплоскости не имеют никакого пересечения, то есть общей области вовсе не существует (рис. 3.15).

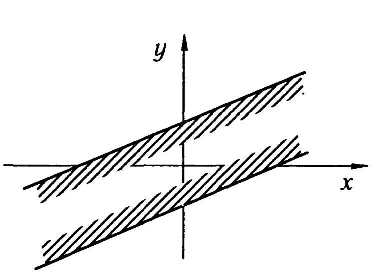


Рис. 3.13

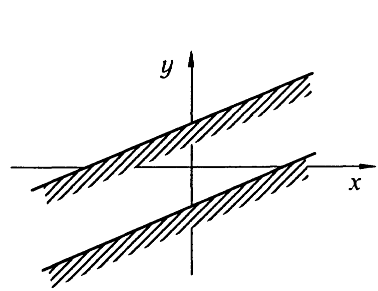


Рис. 3.14

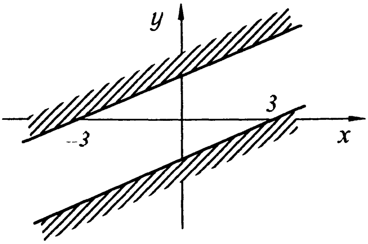


Рис. 3.15

3.10. Построить область, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств $y > 2x+4$, $x > -5$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\le 1$.

Решение. На плоскости Oxy строим сначала прямую $y = 2x+4$. Для этого полагаем $x = 0$, $y = 0$, находим точки пересечения прямой с осями координат $y = 4$, $x = -2$ и проводим через эти точки прямую (рис. 3.16). Неравенство $y > 2x+ 4$ будет представлять область, координаты точек которой расположены выше построенной прямой, причем сама прямая в искомую область не включается. Неравенство $x > -5$ представляет область расположенную правее прямой $x = -5$. Последнее неравенство напоминает уравнение прямой в отрезках на осях.

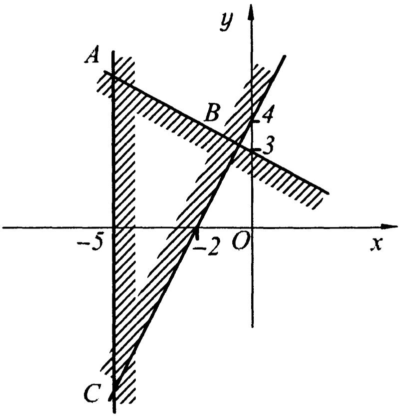


Рис. 3.16

Откладывая по осям Ox, Oy точки $a = 5$ и $b = 3$ и проводя через них прямую, находим, что область удовлетворяющая этому неравенству расположена ниже прямой. Из построений видно, что искомая область представляет треугольник ABC, где отрезок AB принадлежит области.

3.11. Найти область, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-y+4 > 0, \\ x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+4 \geq 0, \\ x+y-2 \geq 0, \\ x-2y-6 > 0. \end{cases}$

Решение. а) Поскольку из первого неравенства при x=0, y=0 $\Rightarrow$ 4>0, то полуплоскость включает начало координат (рис. 3.17).

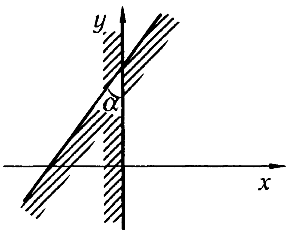


Рис. 3.17

Неравенству x<0 соответствуют все точки левой полуплоскости. Решением является общая часть или пересечение этих полуплоскостей, ограниченная прямыми $2x-y+4=0$, $x=0$ пересекающимися под углом α.

б) При $x = 0$, $y = 0$ из первого неравенства следует, что полуплоскость включает начало координат (рис. 3.18); из второго — следует, что полуплоскость не включает начало координат; из третьего, что не включает. Следовательно, имеются лишь три изолированных пересечения двух полуплоскостей, обозначаемых, соответственно, углами α, β, γ между прямыми $3x-y+4 = 0$, $x+y-2 = 0$ и $x-2y-6 = 0$.

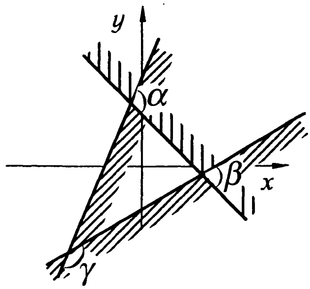


Рис. 3.18

3.4. Задачи на прямую линию

1°. Точка пересечения двух прямых. Пусть прямые заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0; \qquad A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (1)$$

Координаты точки пересечения находятся из решения этой системы

$$x=\frac{C_2B_1-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1}; \quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (2)$$

При этом возможны следующие случаи:

а) $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ — прямые пересекаются в определенной точке.

б) $A_1B_2-A_2B_1=0$ и $C_2B_1-C_1B_2\neq 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$ — прямые параллельны, точек пересечения нет.

в) $A_1B_2-A_2B_1=0$ и $C_2B_1-C_1B_2=0$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ — обе прямые сливаются в одну, система уравнений сводится к одному уравнению, точек пересечения бесчисленное множество.

2°. Под углом между двумя прямыми (рис. 3.19)

$$(L_1)\quad y=k_1x+b_1;\quad (L_2)\quad y=k_2x+b_2, \tag{3}$$

понимают угол φ, отсчитываемый от прямой L_1, против часовой стрелкии, до прямой L_2

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{4}$$

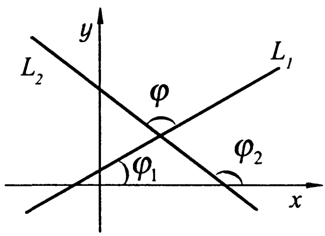


Рис. 3.19

Если прямые заданы общими уравнениями (1), то формула (4) принимает вид

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{5}$$

Условие параллельности прямых

$$k_1=k_2\quad \text{или}\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \tag{6}$$

Условие перпендикулярности прямых

$$k_1=-\frac{1}{k_2}\qquad \text{или}\qquad A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{7}$$

3°. Уравнение пучка прямых. Пучком прямых, проходящих через данную точку $M(x_0,y_0)$, называют совокупность всех прямых, проходящих через эту точку

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{8}$$

Точка $M(x_0,y_0)$ называется центром пучка. Угловой коэффициент k в уравнении пучка прямых неопределен.

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых (1), имеет вид

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \tag{9}$$

Здесь параметр λ неопределен.

4°. Расстояние от данной точки до данной прямой. Чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой, нужно в левую часть нормального уравнения прямой вместо текущих координат подставить координаты точки M_1 и взять абсолютную величину получившегося числа

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|. \tag{10}$$

Если прямая задана общим уравнением, то формула (10) принимает вид

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{11}$$

5°. Уравнения биссектрис углов между прямыми (1)

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{12}$$

6°. Из уравнения прямой проходящей через две точки следует условие расположения трех точек $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ на одной прямой

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \tag{13}$$

4.1. Написать уравнения прямых проходящих через точку $A(-3,4)$ параллельно и перпендикулярно к прямой $2x-y-3=0$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка прямых (8) и запишем уравнение пучка прямых с центром пучка в точке A

$$y-4=k(x+3).$$

Приводим уравнение прямой к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = 2x - 3$, отсюда угловой коэффициент прямой k=2. Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны (6). Выбирая из уравнения пучка прямую с угловым коэффициентом k=2 находим уравнение прямой параллельной данной

$$2x - y + 10 = 0.$$

Используя условие перпендикулярности прямых (7), находим угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k = -\frac{1}{2}$. Подставляя этот коэффициент в уравнение пучка, получим уравнение прямой перпендикулярной данной

$$x + 2y - 5 = 0.$$

4.2. Найти прямую, параллельную прямым $2x+y-2 = 0$ и $2x+y-5 = 0$, расположенную между ними и делящую расстояние между ними в отношении 1:5.

Решение. Возьмем на первой прямой точку A, абсцисса которой равна, например, нулю. Тогда ордината точки A из уравнения прямой равна 2. Проведем из этой точки перпендикуляр до пересечения со второй прямой в точке B (рис. 2.20).

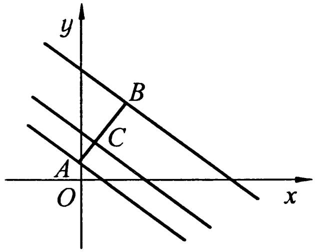


Рис .2.20

Угловой коэффициент прямой равен $k = -2$, следовательно, угловой коэффициент перпендикуляра $k_{AB}=\frac{1}{2}$. Подставляя его и координаты точки в уравнение пучка прямых (8), находим уравнение перпендикуляра $y-2 = \frac{1}{2}(x-0)$ или $x-2y+4 = 0$.

Решая уравнение перпендикуляра совместно с уравнением второй прямой, находим точку их пересечения $B\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Пусть точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{5}$, тогда ее координаты

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{1}{5}\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 0,2; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5}\frac{13}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 2,1.$$

Так как искомая прямая параллельна данным прямым, то ее угловой коэффициент $k=-2$. Подставляя его и координаты точки C в уравнение пучка прямых, находим уравнение искомой прямой $y-2,1=-2(x-0,2)$ или $2x+y-2,5=0$.

4.3. Определить вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x-3y-3=0$, $7x-y+19=0$, $3x+y+1=0$.

Решение. Координаты вершин треугольника A, B, C являются точками пересечения прямых и находятся из совместного решения систем уравнений

$$\begin{cases} x-3y-3 = 0, \\ 7x-y+19 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3y-3 = 0, \\ 3x+y+1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x-y+19 = 0, \\ 3x+y+1 = 0; \end{cases}$$

Обозначим решение первой системы за координаты точки $A(-3;-2)$, второй — $B(0;1)$ и третьей — $C(-2;5)$. Из построения $\triangle ABC$ (рис. 3.21) видно, что прямой AB соответствует первое уравнение, прямой AC — второе и прямой BC — третье.

При определении угла A пользуемся формулой (5), полагая за A_1, B_1 коэффициенты при переменных в уравнении прямой AB, а за A_2, B_2 коэффициенты в уравнении прямой AC

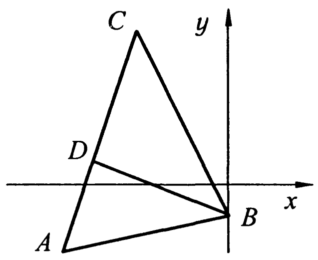


Рис. 3.21

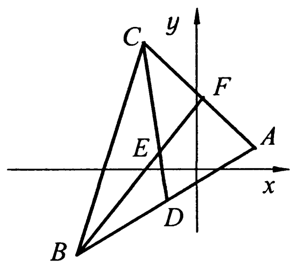


Рис. 3.22

$$\operatorname{tg} A = \frac{1(-1) - 7(-3)}{1 \cdot 7 + (-3)(-1)} = 2, \quad \angle A = \operatorname{arctg} 2\,.$$

При определении угла B за A_2, B_2 в формуле (5) принимаем коэффициенты в уравнении прямой BC

$$\operatorname{tg} B = \frac{1 \cdot 1 - 3(-3)}{1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1} = \infty, \quad \angle B = \frac{\pi}{2}.$$

Так как сумма углов в треугольнике равна π, то угол $\angle C = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

4.4. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(7;4)$, $B(-9;-8)$, $C(-2;16)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Решение. Медианы пересекаются в одной точке, делящей их в отношении 1:2 от противоположной стороны, которую они делят пополам. Построим треугольник (рис. 3.22) и проведем медиану из точки C. Координаты точки D будут

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-9}{2} = -1; \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-8}{2} = -2.$$

Зная координаты точек C и D и отношение $\lambda = \frac{DE}{EC} = \frac{1}{2}$, находим координаты точки пересечения медиан

$$x_E = \frac{x_D + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}; \quad y_E = \frac{y_D + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{1}{2}(16)}{1+\frac{1}{2}} = 4.$$

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две точки, запишем уравнения сторон AB и BC

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}, \quad \frac{y-4}{-8-4} = \frac{x-7}{-9-7}, \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4},$$

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B}, \quad \frac{y+8}{16+8} = \frac{x+9}{-2+9}, \quad y = \frac{24}{7}x + \frac{160}{7}.$$

Угловые коэффициенты перпендикуляров к этим сторонам находим по формулам (7)

$$k_{AB} = -\frac{4}{3}, \quad k_{BC} = -\frac{7}{24}.$$

Подставляя найденные угловые коэффициенты и координаты точек C и A в уравнение пучка прямых (8), находим перпендикуляры к прямой AB и BC

$$y-16 = -\frac{4}{3}(x+2) \quad \text{или} \quad 4x+3y-40=0,$$

$$y-4 = -\frac{7}{24}(x-7) \quad \text{или} \quad 7x+24y-145=0.$$

Решая эти уравнения высот совместно, находим координаты точки их пересечения (7;4), а это координаты точки A, т. е. угол A равен $\frac{\pi}{2}$ и треугольник прямоугольный.

Запишем уравнения сторон AB и BC в общем виде:

$3x-4y-5=0, \quad 24x-7y+160=0.$

Биссектрису BF угла B находим по формуле (12)

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{9+16}} = \frac{24x-7y+160}{\sqrt{576+49}}, \qquad 9x+13y+185=0.$$

4.5. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x+4y-7=0$ и удаленной от точки $A(3;-1)$ на три единицы.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$, $k=-\frac{3}{4}$. Воспользовавшись уравнением (8), проведем через точку A прямую параллельную данной прямой $y+1=-\frac{3}{4}(x-3)$, $3x+4y-5=0$.

Пусть x, y текущие координаты точки на искомой прямой, тогда расстояние от этой точки до прямой, проходящей через точку A, находится по формуле

$$d=\left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Подставляя сюда значение d=3 и коэффицинты $A,B,C,$ находим $3=\left|\frac{3x+4y-5}{5}\right|$ или, раскрывая модуль, $15=3x+4y-5$ и $15=3x-4y+5$.

Отсюда имеем $3x+4y-20=0$ и $3x+4y+10=0$.

4.6. Через точку пересечения прямых $2x-y+3=0$ и $x+y-2=0$ **провести** прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y-7=0$.

Решение. Пользуясь уравнением (9), запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых

$$2x-y+3+\lambda(x+y-2)=0 \text{ или } (2+\lambda)x+(\lambda-1)y+3-2\lambda=0.$$

Угловой коэффициент пучка прямых $k=-\frac{2+\lambda}{\lambda-1}$, а угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k_1=\frac{3}{4}$. По условию перпендикулярности $k=-\frac{1}{k_1}$, откуда $\frac{2+\lambda}{\lambda-1}=\frac{3}{4}$, а $\lambda=10$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, получаем уравнение искомой прямой $12x+9y-17=0$.

4.7. Даны две вершины треугольника $A(-4;2)$ и $B(2;-5)$ и точка пересечения высот $M(\frac{8}{3};-2)$. Найти третью вершину C и расстояние ее от биссектрисы угла A.

Решение. По уравнению прямой, проходящей через две точки A и B, находим

$$\frac{y-2}{-5-2}=\frac{x+4}{2+4}, \quad y=-\frac{7}{6}x-\frac{8}{3}.$$

Используя условие перпендикулярности (7), из уравнения пучка прямых (8) находим уравнение перпендикуляра MC к прямой AB, проходящего через точку M (рис. 3.23) $y+2=\frac{6}{7}\left(x-\frac{8}{3}\right)$, $6x-7y-30=0$.

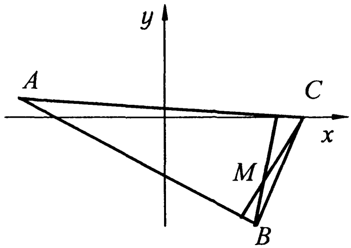


Рис. 3.23

Уравнение перпендикуляра BM к прямой AC находим по уравнению прямой проходящей через две точки B и M

$$\frac{y+5}{-2+5}=\frac{x-2}{\frac{8}{3}-2}, \quad y=\frac{9}{2}x-14.$$

Учитывая, что прямые AC и BM перпендикулярны (7), из уравнения пучка прямых, проходящих через точку A, находим уравнение стороны AC

$$y-2=-\frac{2}{9}(x+4), \quad 2x+9y-10=0.$$

Решая совместно уравнения прямых AC и MC, находим координаты точки $C(5;0)$. Подставляя уравнения сторон AB и AC в формулу (12), находим уравнение биссектрисы угла A

$$\frac{7x+6y+16}{\sqrt{49+36}}=-\frac{2x+9y-10}{\sqrt{4+81}}, \quad 3x+5y+2=0.$$

Расстояние точки C от биссектрисы находим по формуле (11)

$$d=\left|\frac{3\cdot 5+5\cdot 0+2}{-\sqrt{9+25}}\right|=\frac{17}{\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{34}}{2}.$$

4.8. Пересечение медиан в точке $M(3;3)$, а $x-y-2=0$ и $7x-y-8=0$ — уравнения двух сторон треугольника. **Найти** уравнение третьей стороны.

Решение. Найдем точку пересечения известных сторон треугольника и обозначим ее за A (рис. 3.24)

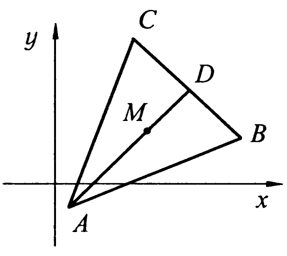


Рис. 3.24

$$\begin{cases} x-y-2 = 0, \\ 7x-y-8 = 0, \end{cases} \qquad x=1, \quad y=-1.$$

Точка пересечения медиан делит их в отношении 2:1, поэтому $AM{:}MD=2{:}1$, отсюда $\lambda=2$

$$x_D=\frac{(1+\lambda)x_M-x_A}{\lambda}=\frac{3\cdot 3-1}{2}=4,\ y_D=\frac{(1+\lambda)y_M-y_A}{\lambda}=\frac{3\cdot 3+1}{2}=5\ .$$

Координаты точек C и B удовлетворяют уравнениям прямых AC и AB

$$7x_C-y_C-8=0, \quad \text{и} \quad x_B-y_B-2=0.$$

Точка D делит отрезок CB пополам

$$x_C+x_B=x_D=8, \qquad y_C+y_B=2y_D=10.$$

Решая эти четыре уравнения относительно x_C, y_C, x_B, y_B, находим координаты точек C и B: $x_C=2, y_C=6, x_B=3, y_B=4.$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим уравнение прямой BC

$$\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-6}{2-6}, \qquad x+2y-14=0\ .$$

4.9. Через точку $M(-3;\ \frac{5}{2})$ **провести прямую** так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $2x+y-3=0$ и $2x+y-5=0$ лежала на прямой $2x-y-1=0$.

Решение. Проведем параллельные прямые на плоскости Oxy (рис. 3.25) и найдем точки пересечения A,B с третьей прямой. Для этого решим системы уравнений

$$\begin{cases}2x+y-3 = 0,\\ 2x-y-1 = 0,\end{cases} \qquad x_A=1, \quad y_A=1;$$

$$\begin{cases}2x+y-5 = 0,\\ 2x-y-1 = 0,\end{cases} \qquad x_B=\frac{3}{2}, \quad y_B=2.$$

Поскольку середина отрезка искомой прямой между параллельными прямыми лежит на прямой AB, то из равенства треугольников ACN и BDN следует, что точка пересечения N делит прямую AB пополам. Найдем ее координаты

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5}{4}, \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3}{2}.$$

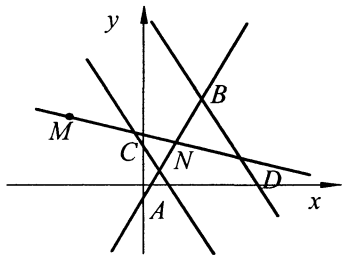


Рис. 3.25

Подставляя координаты точек M и N в уравнение прямой, проходящей через две точки, получим

$$\frac{y - \frac{3}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{x - \frac{5}{4}}{-3 - \frac{5}{4}}, \qquad 8x + 34y - 61 = 0.$$

4.10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x+y+9 = 0$ и $x-y-3 = 0$ и точка $M(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$ пересечения его диагоналей. **Составить** уравнения двух других сторон параллелограмма.

Решение. Поскольку заданные стороны параллелограмма не параллельны, то найдем точку A их пересечения (рис. 3.26)

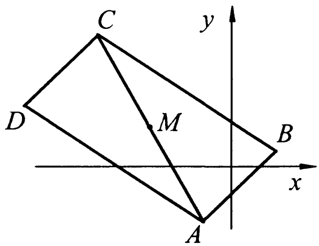


Рис. 3.26

$$\begin{cases} 2x+y+9 = 0, \\ x-y-3 = 0, \end{cases} \quad x_A=-2, \ y_A=-5.$$

Диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам. Отсюда координаты точки C

$$x_C = 2x_M - x_A = -2\cdot\frac{7}{2}+2=-5, \ y_C = 2y_M - y_A = 2\cdot\frac{7}{2}+5=12.$$

Уравнения прямых BC и CD находим из уравнения пучка прямых проходящих через точку C. Прямая BC параллельна AD, угловой коэффициент которой $k=-2$, следовательно $y-12=2(x+5)$, $\quad 2x+y-2=0$.

Прямая CD параллельна AB, угловой коэффициент которой $k=1$

$$y-12=x+5, \quad x-y+17=0.$$

4.11. Даны две вершины треугольника $A(5;1)$, $B(1;3)$ и точка $M(3;4)$ пересечения его медиан. Составить уравнения сторон треугольника.

Решение. Построим заданные точки (рис. 3.27). Медиана проходит через точку M и делит сторону AB пополам в точке D. Зная координаты точек A и B, находим координаты точки D

$$x_D = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5+1}{2} = 3, \quad y_D = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

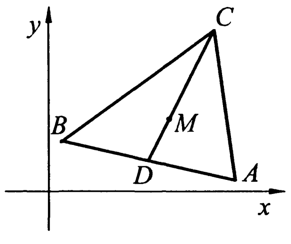


Рис. 3.27

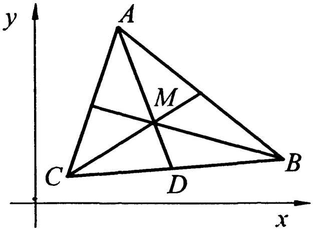


Рис. 3.28

Известно, что в треугольнике, точка пересечения медиан делит их в отношении 2:1. Если обозначить за C третью вершину треугольника, то будем иметь $\frac{CM}{MD}=\frac{2}{1}=\lambda$. Отсюда, по формулам деления отрезка в заданном отношении, имеем $x_M=\frac{x_C+\lambda x_D}{1+\lambda}$, $y_M=\frac{y_C+\lambda y_D}{1+\lambda}$. Откуда $x_C=(1+\lambda)x_M-\lambda x_D=3\cdot3-2\cdot3=3$, $y_C=(1+\lambda)y_M-\lambda y_D=3\cdot4-2\cdot2=8$.

Итак, получили $C(3;8)$. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим уравнения сторон треугольника

AB: $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-5}{1-5}$, откуда $x+2y-7=0$,

AC: $\frac{y-8}{1-8}=\frac{x-3}{5-3}$, откуда $7x+2y-37=0$,

BC: $\frac{y-8}{3-8}=\frac{x-3}{1-3}$, откуда $5x-2y+1=0$.

4.12. Даны уравнения $x+y-8=0$, $x-y-2=0$ двух медиан треугольника и координаты одной из его вершин $A(4;6)$. Найти уравнения сторон треугольника.

Решение. Координаты точки $A(4;6)$ не удовлетворяют заданным уравнениям, следовательно, точка A не лежит на медианах. Решая систему заданных уравнений, находим координаты точки M пересечения медиан $x_M=5$, $y_M=3$.

Проведем две медианы, отметим точку M их пересечения и точку A (рис. 3.28).

Пусть, например, координаты вершины $B(x_B, y_B)$ удовлетворяют первому уравнению, т. е. медиана проходит через вершину треугольника B, а координаты вершины C удовлетворяют второму из заданных уравнений. Тогда $x_B+y_B-8=0$, $x_C-y_C-2=0$.

Имеем два уравнения с четырьмя неизвестными. Составим еще два уравнения с теми же неизвестными. Медиана, проведенная через вершину A, пройдет через точку M и разделит сторону BC пополам в точке D. Найдем координаты точки D: $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{2}{1}=\lambda$,

$x_M=\dfrac{x_A+2x_D}{1+2}$, $y_M=\dfrac{y_A+2y_D}{1+2}$, $x_D=\dfrac{2x_M-2x_A}{2}=\dfrac{3\cdot 5-4}{2}=\dfrac{11}{2}$,

$y_D=\dfrac{3y_M-y_A}{2}=\dfrac{3\cdot 3-6}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Итак, имеем $D\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Точка D делит BC пополам, следовательно, $x_D=\dfrac{x_B+x_C}{2}$, $y_D=\dfrac{y_B+y_C}{2}$, откуда $x_B+x_C-11=0$, $y_B+y_C-3=0$. Составим систему

$$\begin{cases} x_B+x_C = 11, \\ y_B+y_C = 3, \\ x_B+y_B = 8, \\ x_C-y_C = 2 \end{cases}$$

и найдем ее определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2 .$$

Составим определитель Δx_B

$$\Delta x_B=\begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-14.$$

Находим $x_B = \dfrac{\Delta x_B}{\Delta} = \dfrac{-14}{-2} = 7$. Подставляя x_B в первое из уравнений системы, находим x_C=4. Из остальных уравнений находим, что y_B=1, y_C=2.

Зная координаты точек $B(7;1)$ и $C(4;2)$, находим уравнения сторон треугольника

$$AB: \quad \frac{y-6}{1-6} = \frac{x-4}{7-4}, \quad \text{откуда} \quad 5x+3y-38 = 0,$$

$$AC: \quad \frac{y-6}{2-6} = \frac{x-4}{4-4}, \quad \text{откуда} \quad x = 4,$$

$$BC: \quad \frac{y-1}{2-1} = \frac{x-7}{4-7}, \quad \text{откуда} \quad x+3y-10 = 0.$$

4.13. Даны вершины $A(-3;-2)$, $B(4;-1)$ и $C(1;3)$ трапеции $ABCD$ ($AB \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. **Найти** координаты вершины D.

Решение. Прямая $BC \parallel AD$, следовательно, их угловые коэффициенты равны. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Отсюда уравнение прямой BC примет вид

$$\frac{y+1}{3+1} = \frac{x-4}{1-4}, \quad 3y+4x=13, \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}, \quad k = -\frac{4}{3}.$$

Для записи уравнения прямой AD воспользуемся уравнением пучка прямых, проходящих через точку A и условием параллельности $BC \parallel AD$

$$y - yA = k(x - xA), \quad y + 2 = (x+3), \quad 4x + 3y + 18 = 0.$$

Координаты точек A и C известны. Из уравнения прямой, проходящей через две точки находим, что уравнение прямой AC имеет вид

$$\frac{y+2}{3+2} = \frac{x+3}{1+3}, \quad y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}, \quad k = \frac{5}{4}.$$

Из условия перпендикулярности диагоналей трапеции находим угловой коэффициент диагонали BD: $k_1 = -\frac{1}{k}$, $k_1 = -\frac{4}{5}$.

Из уравнения пучка прямых, проходящих через точку B, находим уравнение прямой BD

$$y+1=k_1(x-4),\quad y+1=-\frac{4}{5}(x-4),\quad 4x+5y-11=0.$$

Решая уравнения прямых BD и AD совместно, находим координаты точки D

$$\begin{cases} 4x+5y-11 = 0, \\ 4x+3y+18 = 0. \end{cases}$$

$$2y-29=0,\quad y=\frac{29}{2},\quad 4x+\frac{5\cdot 29}{2}-11=0,\quad x=-\frac{123}{8}.$$

Ответ: $D\left(-\frac{123}{8};\frac{29}{2}\right)$.

3.5. Уравнение линии как геометрического места точек

Линии на плоскости соответствует уравнение с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, называется уравнением данной линии.

Всякому уравнению первой степени с двумя неизвестными на плоскости соответствует прямая линия.

Кривыми второго порядка называются кривые, уравнения которых в прямоугольных координатах представляют уравнения второй степени с двумя неизвестными

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Существуют три типа таких кривых: если $AC-B^2 > 0$, кривая эллиптического типа, если $AC-B^2 < 0$ — гиперболического типа, если $AC-B^2 = 0$ — параболического типа.

Если в общем уравнении второй степени (1) коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой $A = C$, член с произведением текущих координат отсутствует $B = 0$ и $D^2+E^2 > AF$, то это уравнение представляет окружность.

Координаты точек при $A > 0$, лежащих внутри окружности определяются неравенством $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F < 0$, координаты точек, лежащих вне окружности, — неравенством $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F > 0$.

Если алгебраическая линия, т. е. линия уравнение которой можно представить в виде многочлена, определяется в декартовой системе координат уравнением n-й степени относительно x и y, то она называется линией n-го порядка.

Геометрическим местом точек на плоскости называют линию, все точки которой обладают одним и тем же определенным свойством.

При составлении уравнения линии можно пользоваться следующей схемой:

1) определить линию как геометрическое место точек;

2) выбрать систему координат;

3) предположить, что некоторая точка $M(x,y)$ принадлежит данному геометрическому месту точек, причем точка должна иметь самое общее положение;

4) записать в геометрических символах условие, связывающее точку M с какими–либо элементами (точками), известными из определения данного геометрического места;

5) записать это условие, пользуясь формулами аналитической геометрии, по возможности, упростить.

5.1. Принадлежат ли точки $A(0;4)$, $B(1;-2)$ линии $y = \dfrac{3x^2-4}{2x-1}$?

Решение. Если точка принадлежит данной линии, то ее координаты удовлетворяют уравнению данной линии. Подставляем в уравнение заданной линии вместо текущих координат x, y координаты точки A. Получим $4=\dfrac{3\cdot 0^2-4}{2\cdot 0-1}=4$. Равенство выполняется, следовательно, точка A принадлежит данной линии.

Подставляя координаты точки B в уравнение линии, получим $-2\neq\dfrac{3-4}{2-1}=-1$. Следовательно, точка B не принадлежит данной линии.

5.2. Найти точки пересечения парабол $y^2=4x$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$.

Решение. Так как точка пересечения принадлежит обеим линиям, то ее координаты удовлетворяют каждому из этих уравнений. Это значит, что координаты точки пересечения являются решением системы

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=\dfrac{1}{4}x^2. \end{cases}$$

Откуда находим, что $x_1=0$, $x_2=4$ и $y_1=0$, $y_2=4$. Следовательно, данные линии пересекаются в точках $O(0;0)$ и $A(4;4)$.

5.3. Даны уравнения двух линий: $(x-3)^2+y^2=1$ — окружности и $x+y=0$ — биссектрисы второго координатного угла. Найти точки их пересечения.

Решение. Для нахождения всех точек пересечения данных линий необходимо решить уравнения совместно. Подставим в первое уравнение $y=-x$, получим $x^2-3x+4=0$. Отсюда $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{-5}}{2}$. Поскольку $\sqrt{-5}$ есть мнимое число, то система не имеет вещественных решений и , следовательно, данные линии не пересекаются.

5.4. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A(3;5)$ и $B(1;-4)$.

Решение. Построим точки A и B (рис. 3.29).

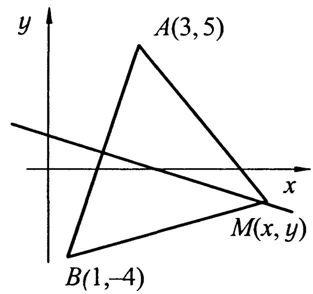


Рис. 3.29

Известно, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух заданных, является перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего заданные точки. Возьмем точку $M(x,y)$, предполагая, что она лежит на этом перпендикуляре, тогда $AM=BM$. Но $AM=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$ и $BM=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}$, откуда уравнение линии $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}$. Возводим в квадрат обе части этого равенства и упрощаем $4x+18y-17=0$. Искомая линия — прямая.

5.5. Найти уравнение траектории точки M, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(1;1)$, чем к точке $B(7;-2)$.

Решение. По условию $2AM=BM$. Обозначим через x, y координаты точки M, тогда $AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ или

$$4((x-1)^2+(y-1)^2)=(x-7)^2+(y+2)^2$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим $(x+1)^2+(y-2)^2=20$, т. е. траектория точки M есть окружность с центром в точке $O'(-1;2)$ и радиусом, равным $2\sqrt{5}$.

3.6. Кривые второго порядка

1°. *Окружностью* называют геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности. Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \qquad (1)$$

где a,b — координаты центра окружности; R — радиус окружности.

Частные случаи уравнения окружности:

1. Если $b = 0$; $a = R$, то $x^2+y^2=2Rx$. Центр окружности расположен на расстоянии R по оси x (рис. 3.30).

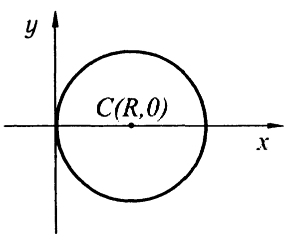


Рис. 3.30

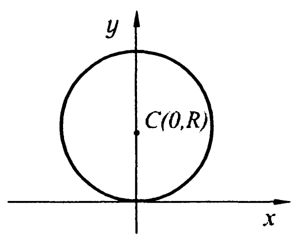


Рис. 3.31

2. Если $a = 0$; $b = R$, то $x^2+y^2 = 2Ry$. Центр окружности расположен на расстоянии R по оси y (рис. 3.31).

3. Если $a = b = 0$, то $x^2+y^2 = R^2$ — каноническое уравнение окружности. Центр окружности радиуса R в начале координат.

2°. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная $r_1+r_2=2a$, a — const (рис. 3.32).

Каноничекое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b — большая и малая полуоси эллипса.

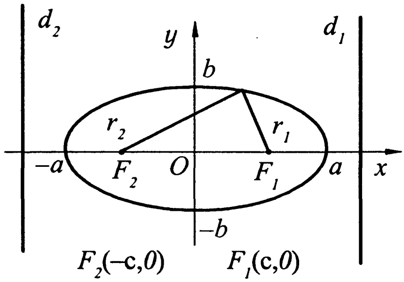


Рис. 3.32

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния эллипса с к его большой оси $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Поскольку у эллипса $c < a$, то эксцентриситет любого эллипса меньше единицы. Если $\varepsilon = 0$, то $c = 0$ и уравнение эллипса принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, а это есть уравнение окружности.

Если фокусы эллипса расположены на оси Ox, то $b^2 = a^2 - c^2$; если же на оси Oy, то $a^2 = b^2 - c^2$.

Директрисами эллипса называются прямые d_1, d_2, параллельные его малой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$, то есть $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса к расстоянию ее до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 некоторой точки M могут быть найдены по формулам

$$r_1 = a - x, \quad r_2 = a + x, \tag{3}$$

где x — абсцисса точки M.

Диаметром эллипса a', сопряженным с некоторым направлением, называют геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных этому направлению (рис. 3.33)

$$y=-\frac{b^2}{a^2k_2}x, \tag{4}$$

где $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$ — угловой коэффициент хорд.

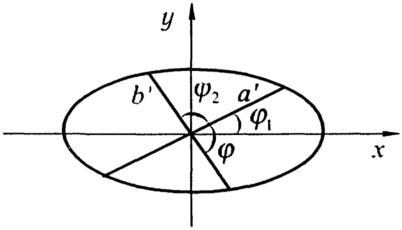


Рис. 3.33

Угловой коэффициент диаметра k_1, сопряженного хордам, связан с угловым коэффициентом хорд зависимостью

$$k_1=-\frac{b^2}{a^2k_2}. \tag{5}$$

Два диаметра a', b', каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому, называют сопряженными между собой диаметрами. Так, оси симметрии эллипса являются его сопряженными диаметрами и их называют *главными диаметрами.*

Угловые коэффициенты k_2 и k_1 входят в формулу (5) равноправно, поэтому, если бы исходить из хорд с угловым коэффициентом k_1, то пришли бы к диаметру с направлением k_2.

Теоремы Аполлония. 1. Сумма квадратов, построенных на двух взаимно–сопряженных диаметрах эллипса, равна сумме квадратов, построенных на его осях $(a')^2+(b')^2=a^2+b^2$.

2. Площадь параллелограмма, построенного на двух взаимно– сопряженных диаметрах эллипса, равна площади прямоугольника, построенного на его осях

$$ab=a'b'\sin\varphi.$$

3°. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $r_2 - r_1 = 2a$, a — const (рис. 3.34).

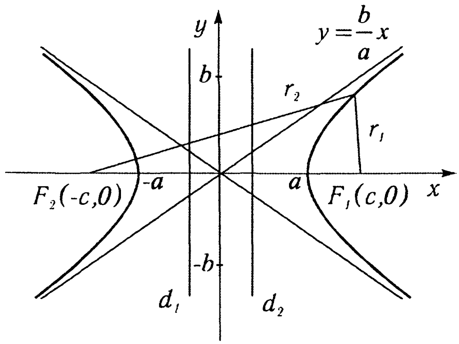


Рис. 3.34

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

где a — действительная полуось; b — мнимая полуось гиперболы.

Прямые, проходящие через центр симметрии, такие, что если точка M двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляясь от вершины неограниченно приближается к одной из них, называются *асимптотами гиперболы*. Уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния гиперболы с к ее действительной оси, то есть $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Поскольку у гиперболы $a < c$, то эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

Если фокусы гиперболы расположены на оси Ox, то $b^2 = c^2 - a^2$, если же на оси Oy, то $a^2 = c^2 - b^2$.

Директрисами гиперболы называются прямые d_1, d_2, параллельные мнимой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к ее расстоянию до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Фокальные радиусы r_1, r_2 некоторой точки $M(x,y)$ могут быть найдены по формулам

$$r_1 = \pm(\varepsilon x - a), \quad r_2 = \pm(a + \varepsilon x). \tag{7}$$

Если полуоси гиперболы равны, то гипербола называется *равносторонней* и ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{8}$$

Асимптотами равносторонней гиперболы служат биссектрисы координатных углов $y = \pm x$.

Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к своим асимптотам, как к осям координат, имеет вид

$$y = \frac{k}{x}, \tag{9}$$

где $k = \frac{a^2}{2}$.

Каждая ветвь гиперболы (9) имеет вершину с равными по абсолютной по величине координатами и удаленную от начала координат на расстояние $a = \sqrt{2k}$.

Уравнение равносторонней гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат, имеет вид

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{10}$$

где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Уравнение (10) по формулам параллельного ереноса координатных осей может быть приведено к виду (9).

4°. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой ее фокусом и от данной прямой, называемой ее директрисой (рис. 3.35).

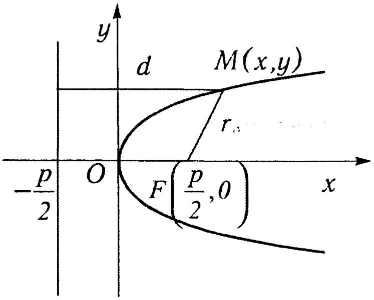


Рис. 3.35

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \qquad (11)$$

где p — параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Фокальный радиус любой точки параболы $M(x,y)$ вычисляется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$. У параболы один фокус, следовательно и одна директриса $x=-\frac{p}{2}$. Эксцентриситет параболы равен отношению расстояния любой ее точки от фокуса к расстоянию до директрисы. На основании определения параболы имеем, что эксцентриситет любой параболы равен единице $\varepsilon=\frac{r}{d}=1$.

Общее уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси ординат, имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (12)$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты.

6.1. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-2x+8y+13 = 0$.

Решение. Дополняя левую часть уравнения до полных квадратов, получим $x^2-2x+1+y^2+8y+16 = 4$ или $(x-1)^2+(y+4)^2 = 4$. Следовательно $a = 1$, $b = -4$, $R = 2$.

6.2. Составить уравнение окружности, проходящей через три данные точки $A(1;1)$, $B(0;2)$ и $C(2;-2)$.

Решение. Уравнение искомой окружности содержит три неизвестных параметра a, b и R, которые следует определить. Подставляя координаты точек A, B и C в уравнение окружности (1), получим систему трех уравнений относительно неизвестных

$$(1-a)^2+(1-b)^2=R^2,$$
$$(0-a)^2+(2-b)^2=R^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2=R^2.$$

Вычтем из последнего уравнения сначала первое, потом — второе уравнение, тогда получим: $2a-6b = 6$, $4a-8b = 4$, откуда $a = -3$, $b = -2$. Из первого уравнения находим, что $R^2 = 25$. Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид $(x+3)^2+(y+2)^2 = 25$.

6.3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(7;9)$ и касающейся оси Ox в точке $B(4;0)$.

Решение. Делаем схематический чертеж (рис. 3.36).

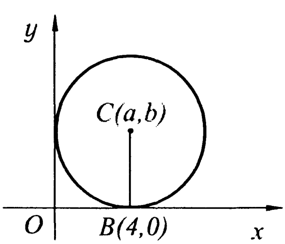


Рис. 3.36

Замечаем, что $OB = a = 4$, $BC = b = R$, так как перпендикуляр BC к касательной Ox параллелен оси Oy и проходит через центр окружности $C(a,b)$. Уравнение искомой окружности примет вид $(x-4)^2+(y-R)^2 = R^2$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A(7;9)$, получим $(7-4)^2+(9-R)^2 = R^2$, откуда $R = 5$. Следовательно, уравнение окружности примет вид $(x-4)^2+(y-5)^2 = 25$.

6.4. Не выполняя построения, **установить**, как расположены относительно окружности $x^2+y^2+8x-4y-29 = 0$ точки: $A(4;3)$, $B(-1;2)$, $C(-4;9)$.

Решение. Подставля координаты точки A в уравнение окружности, получим $16+9+32-12-29 = 16$, следовательно, точка A лежит вне окружности.

Подставляя координаты точки B, будем иметь $1+4-8-8-29 = -40$, следовательно, точка B лежит внутри окружности.

Подставляя координаты точки C, получим $16+81-32-36-29 = 0$, следовательно, точка C лежит на окружности.

6.5. Составить уравнение эллипса, зная, что он проходит через точки $M(\sqrt{3}\,; -2)$ и $N(-2\sqrt{3}\,; 1)$ и его оси симметрии совпадают с осями координат. **Найти** уравнения его директрис, координаты вершин и фокусов, вычислить эксцентриситет и величины фокальных радиусов точки M.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид (2). Точки M и N принадлежат эллипсу, значит их координаты удовлетворяют его уравнению. Подставляя их в уравнение эллипса, получим систему двух уравнений относительно a^2 и b^2

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{b^2}=1, \quad \frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \quad \text{откуда} \quad a^2=15,\ b^2=5.$$

Следовательно, искомое уравнение $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Величину c найдем из соотношения $c^2 = a^2-b^2 = 15-5 = 10$.

Итак, $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{5}$ и $c=\sqrt{10}$. Эксцентриситет будет $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Уравнения директрис: $x=\pm\frac{2\sqrt{10}}{2}$. Вершины эллипса (рис. 3.37): $A_1(\sqrt{15},0)$ $A_2(-\sqrt{15},0)$, $B_1(0,\sqrt{5})$, $B_2(0,-\sqrt{5})$, его фокусы: $F_1(\sqrt{10},0)$, $F_2(-\sqrt{10},0)$. Фокальные радиусы точки M находим по формулам (3): $r_1=\sqrt{15}-\sqrt{2}$, $r_2=\sqrt{15}+\sqrt{2}$.

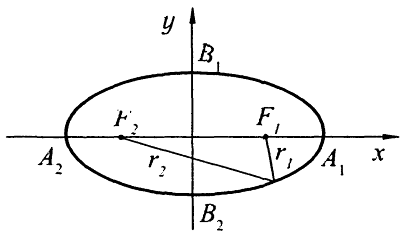


Рис. 3.37

6.6. Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси, соответственно, равны 8 и 2. **Составить** каноническое уравнение эллипса.

Решение. Данные расстояния могут быть представлены формулами $a-c=2$ и $a+c=8$. Отсюда $2a=10$, $2c=6$ или $a=5$, $c=3$. Так как $b^2=a^2-c^2$, то $b^2=25-9=16$. Следовательно, уравнение искомого эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

6.7. Один из диаметров эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ имеет уравнение $y=-2x$. **Найти** уравнение сопряженного ему диаметра.

Решение. Здесь $a^2=9$, $b^2=16$, $k_1=-1$. По формуле (5) находим, что $k_2=-\frac{16}{9(-2)}=\frac{8}{9}$. Уравнение искомого диаметра имеет вид $y=\frac{8}{9}x$.

6.8. Оси эллипса совпадают с осями координат и равны: $a = 10, b = 1$. **Определить** длину сопряженных полудиаметров a' и b' и направление диаметра $2b'$, если известно, что диаметр $2a'$ образует с осью $2a$ угол 20°.

Решение. Уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Пусть уравнение диаметра имеет вид $y=k_1 x$. Решая эти уравнения совместно, находим точки пересечения

$$x_{1,2}=\pm\frac{10}{\sqrt{100k_1^2+1}},\quad y_{1,2}=\pm\frac{10k_1}{\sqrt{100k_1^2+1}}.$$

Учитывая,что $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}20°\simeq 0,364$, длину первого полудиаметра находим по формуле расстояния между двумя точками

$$a'=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=ab\sqrt{\frac{1+k_1^2}{a^2k_1^2+b^2}}=10\sqrt{\frac{1+(0,364)^2}{100(0,364)^2+1}}\simeq 2,82.$$

Длину второго полудиаметра находим по теореме Аполлония $(b')^2=a^2+b^2-(a')^2$, откуда $b'=\sqrt{100+1-(2,82)^2}\simeq 9,59$.

Угловой коэффициент сопряженного диаметра находим по формуле (5)

$$k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}=-\frac{1}{100\cdot 0,364}=-0,0275,\quad \operatorname{tg}\varphi=k_2,\quad \varphi\simeq 178°25'.$$

6.9. Составить уравнение гиперболы, зная, что ее оси совпадают с осями координат и гипербола проходит через точки $M(5;-2)$ и $N(3\sqrt{2};\sqrt{2})$. **Найти** уравнения директрис и вычислить эксцентриситет гиперболы.

Решение. Координаты точки M и N должны удовлетворять каноническому уравнению гиперболы (6). Подствляя их в уравнение гиперболы получим систему уравнений

$$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\quad \frac{18}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1.$$

Решая систему относительно $\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{b^2}$, находим $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{11}$, $\frac{1}{b^2}=\frac{7}{22}$. Откуда a^2=11, b^2= $\frac{22}{7}$. Составляем уравнение гиперболы $\frac{x^2}{11}-\frac{7y^2}{22}=1$.

Поскольку для гиперболы c^2=a^2+b^2, то $c^2=11+\frac{22}{7}=\frac{99}{7}$.

Тогда эксцентриситет будет равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{99}{7\cdot 11}}=3\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Уравнения директрис находим по формуле $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\frac{\sqrt{77}}{3}$.

6.10. Гипербола проходит через точку $M(12;3\sqrt{3})$ и имеет асимптоты $y=\pm\frac{1}{2}x$. **Составить** уравнение гиперболы.

Решение. Запишем уравнения асимптот в общем виде $y=\pm\frac{b}{a}x$, тогда $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. Обозначим $b=\gamma$ и $a=2\gamma$, где γ — коэффициент пропорциональности.

Так как точка M принадлежит гиперболе, то подставляя ее координаты и значения a и b в каноническое уравнение (6), получим $\frac{144}{4\gamma^2}-\frac{27}{\gamma^2}=1$. Откуда $\gamma^2=9$, следовательно, $a=6$, $b=3$. Уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

6.11. Вычислить площадь трапеции, вписанной в гиперболу xy=6, если вершинами трапеции являются точки пересечения этой гиперболы с прямыми $x+y+5=0$, и $x+y-7=0$.

Решение. Строим чертеж (рис. 3.38) и определяем координаты вершин трапеции. Система уравнений $xy=6$, $x+y+5=0$ дает значения координат точек $A(-3;-2)$, $B(-2;-3)$. Вторая система $xy = 6$, $x+y-7= 0$ дает значения координат точек $C(6;1)$ и $D(1;6)$.

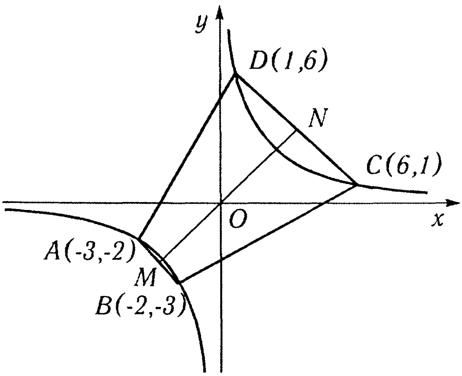


Рис. 3.38

Отсюда длина большего основания $CD = \sqrt{(6-1)^2 + (1-6)^2} = 5\sqrt{2}$; длина меньшего основания $AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{2}$. Высоту трапеции представляет отрезок MN биссектрисы координатного угла, заключенній между основаниями трапеции. Совместное решение уравнения $y=x$ с каждым из уравнений $x+y+5 = 0$ определяет координаты точек $M(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2})$ и $N(\frac{7}{2};\frac{7}{2})$. Отсюда длина высоты $MN = \sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{5}{2})^2 + (\frac{7}{2}+\frac{5}{2})^2} = 6\sqrt{2}$. Таким образом, площадь трапеции равна $S = \dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2} = 36$ кв.ед.

6.12. Преобразовать к простейшему виду уравнение $y = \dfrac{4x-3}{3x+5}$ и построить гиперболу, определяемому этим уравнением.

Решение. Выполним преобразование заданного уравнения параллельным переносом осей по формулам $x=x'+a$, $y=y'+b$.

Преобразуем уравнение $3xy+5y-4x=-3$ или $xy+\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}x=-1$.

Используем подстановку $(x'+a)(y'+b)+\frac{5}{3}(y'+b)-\frac{4}{3}(x'+a)=-1$, откуда $x'y'+x'(b-\frac{4}{3})+y'(a+\frac{5}{3})=\frac{4}{3}a-\frac{5}{3}b-ab-1$. Условия преобразования требуют, чтобы $b-\frac{4}{3}=0$ и $a+\frac{5}{3}=0$, тогда координаты нового начала координат равны $a=-\frac{5}{3}$, $b=\frac{4}{3}$. При этом свободный член принимает значение $k=\frac{4}{3}(-\frac{5}{3})-\frac{5}{3}\frac{4}{3}-(-\frac{5}{3})\frac{4}{3}-1=-\frac{29}{9}$.

Заданное уравнение в системе $x'O'y'$ имеет вид $x'y'=-\frac{29}{9}$ и гипербола располагается во 11 и 1V четвертях (рис. 3.39). Вершины гиперболы находятся на биссектрисе 11 и 1V координатных углов на расстоянии $a=\sqrt{\frac{58}{9}}$ от O'.

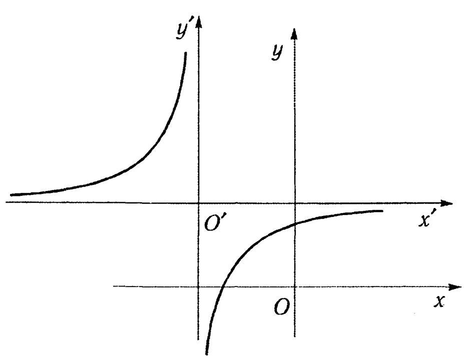


Рис. 3.39

6.13. Составить уравнение гиперболы, если известны точка пересечения ее асимптот $O'(2;-3)$ и одна из вершин $A(4;-1)$.

Решение. Относительно системы координат с началом в точке $O'(2;-3)$ пересечения асимптот условию соответствует уравнение гиперболы $y'=\frac{k}{x'}$. Воспользуемся формулами параллельного переноса начала координат $x'=x-2$, $y'=y+3$. Тогда уравнение гиперболы примет вид $y+3=\frac{k}{x-2}$. Квадрат расстояния от начала координат до вершины A находим по формуле $a^2=(4-2)^2+(-1+3)^2=8$, тогда по формуле $k=\frac{a^2}{2}$ находим, что $k=4$. Следовательно, уравнение гиперболы примет вид $y+3=\frac{4}{x-2}$ или $y=\frac{-3x+10}{x-2}$.

6.14. Написать уравнение параболы, зная, что ось симметрии ее совпадает с осью Ox, а вершина — с началом координат и расстояние от вершины до фокуса равно 5.

Решение. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$. По условию задачи $\frac{p}{2}=5$, откуда $p=10$. Уравнение примет вид $y^2=20x$.

6.15. Составить уравнение параболы, если парабола симметрична относительно оси Oy, вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(0;3)$.

Решение. Поскольку парабола симметрична относительно оси Oy, то каноническое уравнение имеет вид $x^2=2py$. По условию $\frac{p}{2}=3$, $p=6$.

Отсюда уравнение параболы $x^2=12y$.

6.16. Для параболы $x^2=2py$ найти длину хорды, перпендикулярной к оси Oy и проходящей через фокус.

Решение. Фокус параболы имеет координаты $F(0;\frac{p}{2})$. Пусть точка M имеет координаты $M(x;\frac{p}{2})$ и принадлежит параболе (рис. 3.40), тогда $x^2 = p\cdot\frac{p}{2}$ или $x_M=p$. Отсюда длина половины искомой хорды равна p, следовательно, длина всей хорды MN равна $2p$.

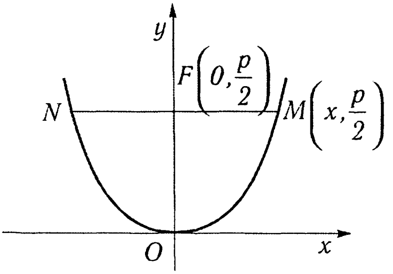


Рис. 3.40

6.17. Определить координаты вершины параболы, величину параметра и уравнение оси симметрии, если парабола задана уравнением $y^2-8x-4y+12=0$.

Решение. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата переменной y

$$y^2-4y+4-8x+12-4 = 0 \quad \text{или} \quad (y-2)^2 = 2\cdot 4(x-1).$$

Следовательно, вершина параболы имеет координаты $x_b= 1$, $y_b= 2$. Параметр $p = 4$, а ось симметрии параллельна оси Ox и имеет уравнение $y = 2$.

6.18. Найти уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, если известно, что парабола проходит через точки $M(-3;6)$ и $N(2;-4)$.

Решение. Искомое уравнение параболы примем в виде $y=ax^2+c$. Подставляя координаты точек, будем иметь $6= 9a+c$, $-4 = 4a+c$. Решая эту систему, находим, что $a =2$, $c =-12$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяет парабола $y =2x^2-12$.

6.19. Найти уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, если известно, что парабола проходит через точки (1;2), (2;4) и (3;8).

Решение. Подставляя координаты точек в общее уравнение параболы, получим систему

$$\begin{cases} a+\ b+c\ =\ 2, \\ 4a+2b+c\ =\ 4, \\ 9a+3b+c\ =\ 8. \end{cases}$$

Из решения системы находим, что $a=1$, $b=-1$, $c=2$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет парабола $y=x^2-x+2$.

6.20. Найти координаты вершины, написать уравнение оси симметрии и построить параболу, заданную уравнением $y=5+4x-x^2$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения, выделив в ней полный квадрат $y=5-(x^2-4x+4)+4=9-(x-2)^2$. Вершина параболы находится в точке, которая имеет наибольшую ординату, т. е. в точке $x=2$, $y=9$. Отсюда уравнение оси симметрии $x=3$.

Перенос начала координат в вершину при параллельном перемещении осей по формулам $x=x'+2$ и $y=y'+9$ дает $y'=-(x')^2$. Знак минус указывает, что ветви параболы направлены вниз. Помещая в системе xOy новую систему $x'O'y'$ с началом в точке $O'(2;9)$, строим параболу $y'=-(x')^2$ (рис. 3.41).

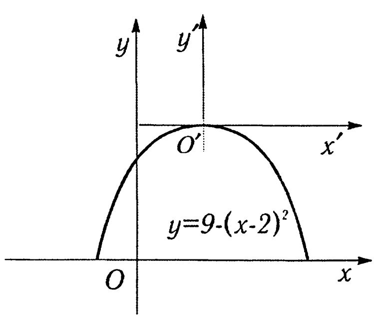


Рис. 3.41

6.21. Построить параболу по заданному уравнению $y^2 - 8y - 6x + 4 = 0$.

Решение. Первые два члена дополняем до полного квадрата, а остальные члены переносим в правую часть $y^2 - 8y + 16 = 6x - 4 + 16$ или $(y-4)^2 = 6(x+2)$. Отсюда видно, что вершина параболы имеет координаты $(-2;4)$ и ось симметрии определяется уравнением $y - 4 = 0$.

Переходя по формулам $y = y' + 4$, $x = x' - 2$ к новой системе координат $x'O'y'$ с началом $O'(-2;4)$, находим, что $(y')^2 = 6x'$. Таким образом, парабола имеет вид (рис. 3.42).

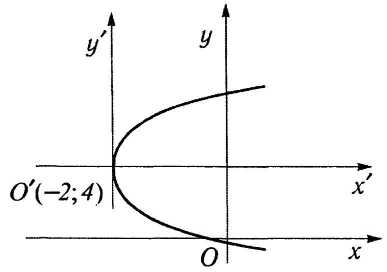


Рис. 3.42

6.22. Определить площадь трапеции, вписанной в параболу $y = x^2 - 4x - 12$, если одно из оснований трапеции лежит на оси Ox, а второе основание проходит через точку пересечения параболы с осью Oy.

Решение. Полагая $x = 0$, находим точку пересечения параболы с осью Oy, то есть $A(0;-12)$ (рис. 3.43). Высота трапеции $AO = 12$. Длины оснований определим по абсциссам точек пересечения параболы с прямыми $y = 0$ и $y = -12$.

Абсциссы концов основания DC находим из уравнения $x^2 - 4x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, а концов основания AB из уравнения $x^2 - 4x = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Таким образом, верхнее основание $DC = 8$, а нижнее $AB = 4$. Площадь трапеции равна
$$S = \frac{8+4}{2} \cdot 12 = 72 \text{ кв.ед.}$$

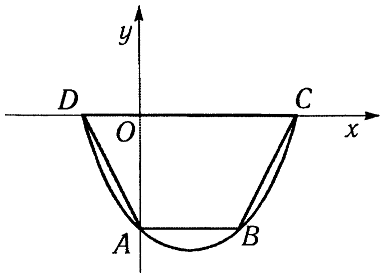


Рис. 3.43

6.23. Определить область, ограниченную линиями $y = x^2-1$, $x = 2$, и осью абсцисс.

Решение. В системе координат Oxy строим параболу $y = x^2-1$ и прямую $x = 2$ (рис. 3.44). Координаты точки C находятся из решения системы $y=x^2-1$, $x=2$ и равны $C(2;3)$. Ось абсцисс $y = 0$ замыкает искомую область по прямой AB.

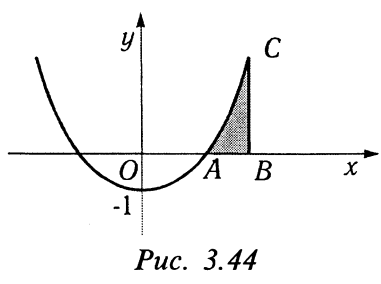


Рис. 3.44

3.7. Преобразование декартовых координат

1°. *Параллельный перенос осей.* Оси двух систем координат параллельны и одинаково направлены (рис. 3.45). Координаты точки M в этих системах связаны зависимостью

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad x' = xa \quad y' = yb, \tag{1}$$

где x,y — координаты точки M в системе Oxy; x',y' — координаты точки M в системе $O'x'y'$; a,b — координаты начала координат O' системы $O'x'y'$ в системе Oxy.

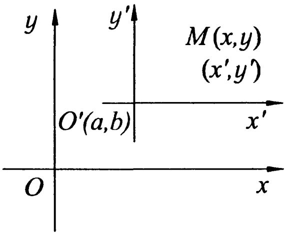


Рис. 3.45

2°. *Поворот осей.* Обе системы координат имеют общее начало и различаются направлением осей. Если положение системы $O'x'y'$ определяется относительно системы Oxy углом поворота осей α (рис. 3.46), то зависимость между координатами точки M определяется по формулам

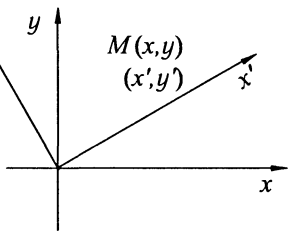


Рис. 3.46

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$
$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = x\sin + y\cos\alpha. \tag{2}$$

3°. *Общий случай.* Если системы Oxy и $O'x'y'$ имеют различные начала и различно направленные оси (рис. 3.47), то зависимость между координатами точки M определяется по формулам

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \tag{3}$$

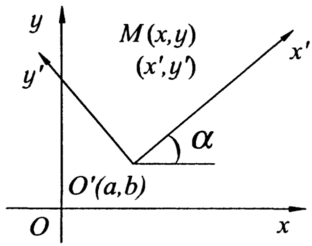


Рис. 3.47

Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,$$
$$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha. \qquad (4)$$

7.1. Точка M имеет координаты $x = 3$, $y = -7$. **Найти** ее координаты, если начало координат перенесено в точку $O'(-2;5)$.

Решение. По условию $x = 3$, $y = -7$, $a = -2$, $b = 5$. Координаты точки M в новой системе будут $x'=x-a=3+2=5$, $y'=y-b=-7-5=-12$.

7.2. Найти координаты точки $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-2\sqrt{2}\right)$, если оси координат поворачиваются на угол $\alpha = 45°$.

Решение. Координаты точки M даны в системе Oxy. Воспользуемся формулами (2)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -2\sqrt{2}=x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из решения системы находим, что $x'=-\dfrac{3}{2}$, $y'=-\dfrac{5}{2}$.

7.3. Найти координаты точки $M(1;2)$, если начало координат перенесено в точку $O'(-1;1)$ и оси координат были повернуты на угол $\alpha = 30°$.

Решение. По условию задачи $x = 1$, $y = 2$, $a = -1$, $b = 1$, $\alpha = 30°$. Воспользуемся формулами (3)

$$1=x'\frac{\sqrt{3}}{2}-y'\frac{1}{2}-1,\quad 2=x'\frac{1}{2}+y'\frac{\sqrt{3}}{2}+1.$$

Из решения системы находим, что $x' = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$, $y' = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$.

7.4. Путем параллельного переноса осей координат **найти** координаты вершины параболы $y = 2x^2 - 4x + 9$ и привести ее уравнение к виду $Y = aX^2$.

Решение. Воспользуемся формулами (1). Подставив их в уравнение параболы, получим $y' + b = 2(x' + a)2 - 4(x' + a) + 9$ или $y' = 2x'^2 + 4(a-1)x' + 2a^2 - 4a + 9 - b.$

Координаты нового начала координат неизвестны. Находим их из условия равенства нулю свободного члена в новом уравнении параболы и коэффициента при x', то есть $2a^2 - 4a + 9 - b = 0$ и $a - 1 = 0$. При этих условиях имеем $a = 1$, $b = 7$. Уравнение параболы в новых осях $O'x'y'$ имеет вид $y' = 2x'^2$. График параболы показан на рис. 3.48.

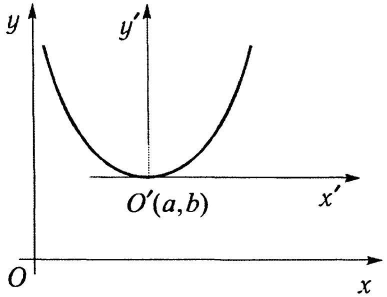


Рис. 3.48

7.5. Составить уравнение равносторонней гиперболы, приняв ее асимптоты за оси координат.

Решение. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = a2$. Уравнения асимптот $y = \pm x$. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, то есть $\alpha = \pm 45°$.

Примем $\alpha = 45°$ (рис. 3.49). Воспользуемся формулами (2)

$$x = x'\cos 45° - y'\sin 45°, \quad x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y=x'\sin 45°+y'\cos 45°,\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

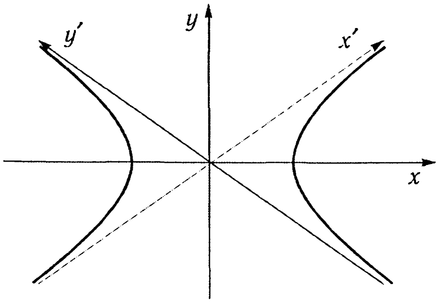


Рис. 3.49

Подставляя значения x, y в уравнение гиперболы, получим

$$\frac{(x'-y')^2}{2}-\frac{(x'+y')^2}{2}=a^2,\quad \text{откуда}\quad y'=-\frac{a^2}{2x'}.$$

7.6. Выполнить параллельный перенос осей координат так, чтобы в новой системе координат уравнение параболы приняло канонический вид: а) $x^2-4x+y+1=0$; б) $y^2-3x-2y+10=0$.

Решение. а) Выделим полный квадрат $x^2-4x+4+y+1-4=(x-2)^2+y-3=0$. Введем теперь новые координаты x', y', полагая $x=x'+2$, $y=y'+3$, что соответствует параллельному перемещению осей на две единицы по оси Ox и на три по оси Oy. В координатах x', y' уравнение параболы примет вид: $x'^2+y'=0$ или $x'^2=-y'$. Поскольку правая часть отрицательна, то ветви параболы направлены вниз (рис. 3.50).

б) Выделим полный квадрат $y^2-2y+1-3x+10-1=(y-1)^2-3x+9=0$ и запишем уравнение в виде $9(y-1)^2=3(x-3)$. Введем новые координаты, полагая $y=y'+1$, $x=x'+3$, что соответствует параллельному перемещению осей на 3 единицы по оси Ox и на 1 единицу по оси Oy (рис. 3.51). Тогда получим $y'^2=3x'$ — каноническое уравнение параболы.

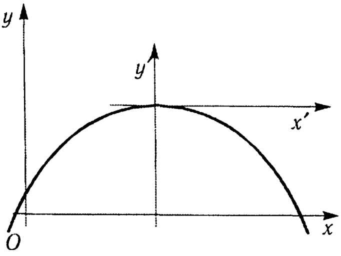


Рис. 3.50

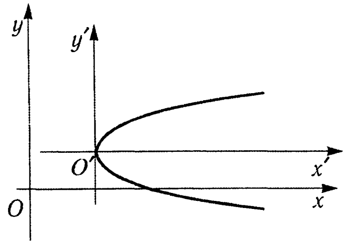


Рис. 3.51

7.7. Путем преобразования системы координат **упростить** уравнение окружности $x^2+y^2+10x-18y+70=0$, принимая за новое начало центр окружности.

Решение. Подставляя формулы (1) в уравнение окружности, будем иметь $(x'+a)^2+(y'+b)^2+10(x'+a)-18(y'+b)+70=$ $=x'^2+(2a+10)x'+y'^2+(2b-18)y'+a^2+b^2+10a-18b+70=0$. Условия $2a+10=0$ и $2b-18=0$ определяют координаты центра окружности $a=-5$, $b=9$. Подстановка этих значений дает уравнение окружности в новых координатах $x'^2+y'^2+25+81-50-162+70=0$ или $x'^2+y'^2=36$.

7.8. **Привести** к каноническому виду уравнение $8x^2+12xy+3y^2-40x-24y+7=0$.

Решение. Прежде всего воспользуемся формулами параллельного переноса координатных осей (1). Перенесем начало координат в точку $O'(a,b)$. После приведения подобных членов исходное уравнение примет вид $8x'^2+12x'y'+3y'^2+(16a+12b-40)x'+(12a+6b-24)y'+8a^2+12ab+3b^2-40a-24b+7=0$.

Подберем a, b так, чтобы выполнялись равенства $16a+12b-40=0$, $12a+6b-24=0$, тогда в уравнении данной кривой исчезнут члены первой степени. Решая эти уравнения совместно, находим: $a=1$, $b=2$.

Теперь начало координат новой системы находится в точке $O'(1;2)$. Уравнение кривой в новых координатах имеет вид $8x'^2+12x'y'+3y'^2-13=0$.

Чтобы избавится от члена, содержащего произведение координат x', y', произведем поворот перенесенных осей на некоторый угол α, согласно формулам (3), тогда получим $(8\cos^2\alpha+$ $+3\sin^2\alpha+12\cos\alpha\sin\alpha)x''^2+(-16\sin\alpha\cos\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha+$ $+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha)x''y''+(8\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha-12\sin\alpha\cos\alpha)y''^2-13=0.$

Подберем угол α так, чтобы коэффициент при $x''y''$ обратился в нуль $-10\sin\alpha\cos\alpha+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha=0$, откуда $6\,\mathrm{tg}^2\alpha+5\,\mathrm{tg}\alpha-6=0$.

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\,\alpha$, находим: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ и $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{2}$. Возьмем первое значение, что соответствует повороту координатных осей на острый угол. Зная $\mathrm{tg}\alpha$, находим $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=$ $=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$. Тогда уравнение кривой в системе x'',y'' примет вид $\frac{156}{13}x''^2-y''^2=13$ или $\frac{x''^2}{\frac{13}{12}}-y''^2=1$. Мы получили каноническое уравнение гиперболы с полуосями $\sqrt{\frac{13}{12}}$ и 1 (рис. 3.52).

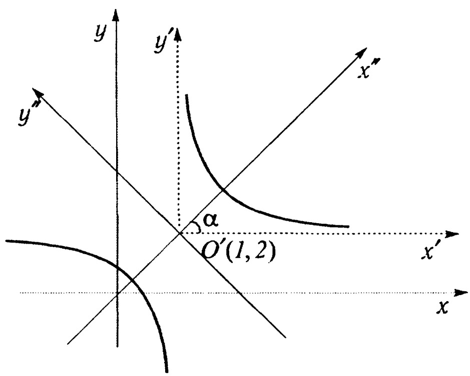


Рис. 3.52

7.9. Привести к каноническому виду уравнение $3x^2-6y+3y^2-$ $-2x-8y+\frac{23}{4}=0.$

Решение. Применяя формулы (1), перенесем начало координат в точку $O'(a;b)$ $3x'^2+6x'a+3a^2-\ 6(x'y'+x'b+y'a+ab)+$ $+3y'^2+6y'b+3b^2-2x'-2a-8y'-8b+\frac{23}{4}=0.$

Чтобы исчезли члены первой степени, приравниваем к нулю коэффициенты при x', y': $3a-3b-1=0$, $-3a+3b-4=0$. Нетрудно заметить, что полученная система несовместна, следовательно данная кривая не имеет центра.

По формулам (3) повернем оси на некоторый угол α, тогда получим $3x^2-6y+3y^2-2x-8y+\frac{23}{4}=3x'^2\cos^2\alpha-6x'y'\cos\alpha\sin\alpha+$ $+3y'^2\sin^2\alpha-6(x'^2\cos\alpha\sin\alpha+x'y'\cos^2\alpha-x'y'\sin^2\alpha-y'^2\cos^2\alpha\cdot$ $\cdot\sin\alpha)+3x'^2\sin^2\alpha+6x'y'\cos\alpha\sin\alpha+3y'^2\cos^2\alpha-2x'\cos\alpha+$ $+2y'\sin\alpha-8x'\sin\alpha-8y'\cos\alpha+\frac{23}{4}=0.$

Подберем угол так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, откуда $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Уравнение кривой в этом случае примет вид: $3y'^2(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)-$ $-2x'\cos\alpha+2y'\sin\alpha-8x'\sin\alpha-8y'\cos\alpha+\frac{23}{4}=0$ или $6y'^2-6y'\frac{\sqrt{2}}{2}-5\sqrt{2}x'+\frac{23}{4}=0.$

Дальнейшее упрощение уравнения проводится при помощи параллельного перенесения осей Ox' и Oy'. Выделим полный квадрат $6\left(y'-\frac{1}{8}\right)^2=5\sqrt{2}\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Введем новые координаты

$x' = x'' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = y'' + \frac{1}{8}$, что соответствует параллельному перемещению осей на величину $\frac{\sqrt{2}}{2}$ по оси Ox' и на величину $\frac{1}{8}$ по оси Oy'. В координатах x'', y'' уравнение кривой примет вид $y''^2 = \frac{5\sqrt{2}}{6} x''$ — каноническое уравнение параболы. Ветви параболы расположены симметрично относительно оси x'' и совпадают с положительным направлением этой оси (рис. 3.53).

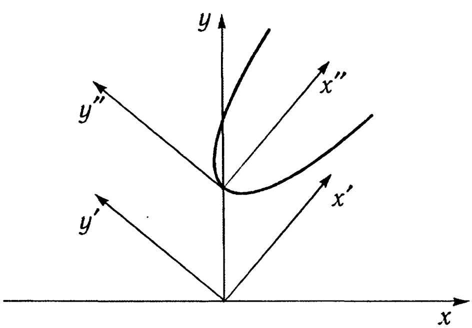


Рис. 3.53

Вершина параболы находится в начале координат системы x'', y''; параметр параболы $p = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

3.8. Полярная система координат. Уравнения кривых

1°. Полярными координатами точки M (рис. 3. 54) являются полярный радиус ρ и полярный угол φ, для которых приняты следующие интервалы изменения $\rho \in [0, \infty[$ и $\varphi \in [0, 2\pi[$ или $\varphi \in [-\pi, \pi[$.

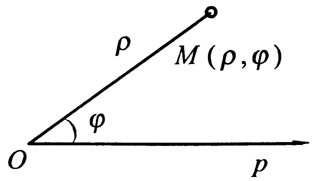


Рис. 3.54

Если начала координат прямоугольной и полярной системы совпадают, а полярная ось совмещена с положительным направлением оси Ox, то прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Полярные координаты выражаются через прямоугольные по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2}$$

Вторую из формул (2) иногда удобнее заменить двумя следующими формулами

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

Проекции произвольного отрезка на координатные оси выражаются через его длину и полярный угол формулами:

$$x_2 - x_1 = d\cos\varphi, \quad y_2 - y_1 = d\sin\varphi. \tag{4}$$

Полярный угол отрезка по координатам его конца и начала определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2°. Если за полюс принять один из фокусов линии второго порядка (рис. 3.55), то уравнение линии в полярной системе координат примет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{5}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\rho}{d}$ — эксцентриситет, d — расстояние точки М(ρ, φ) до дирекртис, p — параметр линии второго порядка, равный половине длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной фокальной оси.

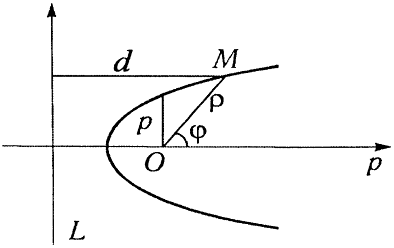


Рис. 3.55

Если $\varepsilon = 0$, то уравнению (5) соответствует окружность, если $\varepsilon < 1$ — эллипс, если $\varepsilon > 1$ — гипербола, если $\varepsilon = 1$ — парабола.

Если полярную ось ориентировать в противоположную сторону, то уравнение линии второго порядка в полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \tag{6}$$

3°. Рассмотрим некоторые линии, уравнения которых заданы в полярной системе координат.

1. $\varphi = a$ (a — радиан) — геометрическое место точек, полярный угол которых имеет постоянныю величину, есть луч, выходящий из полюса полярной системы координат (рис. 3.56).

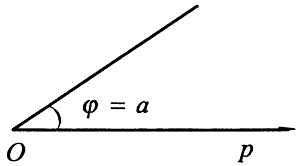


Рис. 3.56

2. $\rho = a$ — окружность с центром в полюсе и с радиусом, равным a.

3. $\rho = 2a\cos\varphi$ — окружность, центр которой находится на полярной оси в точке C $(a,0)$ и радиус которой равен a (рис. 3.57).

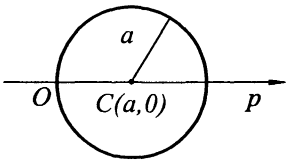


Рис. 3.57

4. $\rho = a\varphi$ (a — const) — спираль Архимеда (рис. 3.58).

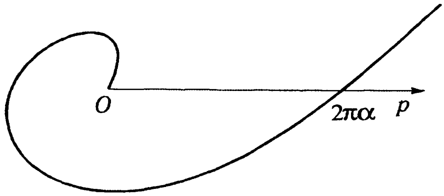


Рис. 3.58

5. $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (a=const) — гиперболическая спираль $\varphi \neq 0$ (рис. 3.59). Здесь $\rho \neq 0$ и полюс называют поэтому асимптотической точкой кривой, т. е. такой точкой, к которой точки кривой неограничено приближаются, но никогда ее не достигают.

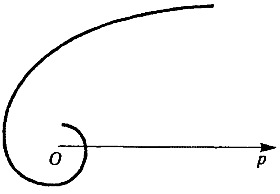


Рис. 3.59

6. $\rho = a^{\varphi}$ (a>0) — логарифмическая спираль (рис. 3.60).

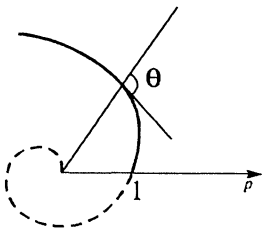


Рис. 3.60

Логарифмическая спираль с любой прямой, проведенной через полюс образует один и тот же угол θ. Изменению φ от 0 до $-\infty$ соответствует часть графика спирали, которая изображена пунктиром (рис. 3.60).

7. $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$ — кардиоида (рис. 3.61). Это траектория, которую опишет точка окружности, катящееся без скольжения по окружности равного радиуса, касаясь ее внешним образом.

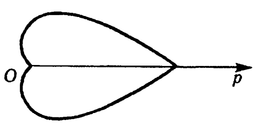


Рис. 3.61

8. Лемниската Бернулли $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (рис. 3.62).

Характеристическое свойство $|F_1M|\cdot|F_2M| = a^2$ — const, где $F_1\,(-a;0)$, $F_2\,(a;0)$.

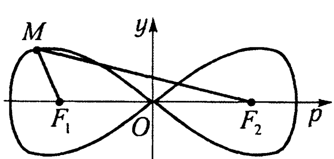


Рис. 3.62

8.1. Найти декартовы координаты точек $A\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Применяя формулы (1), находим $x_A = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$, $y_A = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$. В декартовой системе получим $A(1;\sqrt{3})$.

Декартовы координаты точки B будут: $x_B = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y_B = 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3$, то есть B (0;–3).

8.2. Найти полярные координаты точек A (–2;0), B (1;–1).

Решение. Применяя формулы (2), (3), находим координаты точки A

$$\rho_A = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2, \quad \sin\varphi_A = \frac{0}{2} = 0, \quad \cos\varphi_A = \frac{-2}{2} = -1.$$

По численным значениям синуса и косинуса находим, что $\varphi_A = \pi$. Таким образом, в полярной системе $A(2;\pi)$.

Полярные координаты точки B будут $\rho_B = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\sin\varphi_B = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi_B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi_B = -\frac{\pi}{4}$, то есть $B\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$.

8.3. Найти полярные координаты вершин квадрата со стороной a, равной единице, изображенного на рис. 3.63.

Решение. $AB = BC = CD = DA = 1$. Полярные радиусы всех вершин квадрата равны $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Полярные углы: $\varphi_C = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_D = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_A = \frac{5\pi}{4}$, $\varphi_B = \frac{7\pi}{4}$. Следовательно:

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\pi}{4}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

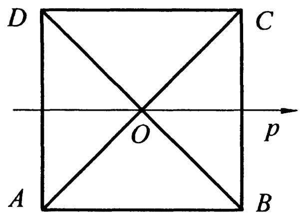


Рис. 3.63

8.4. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d = 6$ и полярный угол $\varphi = 120°$.

Решение. По формулам (4) находим

$$X = 6\cos 120° = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -3, \quad Y = 6\sin 120° = 6\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

8.5. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1\left(3; 2\sqrt{3}\right)$ в точку $M_2\left(4; \sqrt{3}\right)$.

Решение. Длина отрезка M_1M_2 равна $d = \sqrt{(4-3)^2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2} = 2.$

Применяя формулы (4), находим: $\cos\varphi = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что главное значение $\varphi = 300°$.

8.6. Даны точки $M_1(1;0)$ и $M_2(3;5)$. **Найти** проекцию отрезка M_1M_2 на ось, проходящую через точки A (–1;2) и B (3;5) и направленную от A к B.

Решение. Обозначим через l данную ось (рис. 3.64), через φ и φ_1 — полярные углы отрезков AB и M_1M_2. Из простых геометрических соображений находим, что $\text{Пр.}_l M_1M_2 =$

$= M_1M_2 \cos(\varphi_1 - \varphi) = M_1M_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi + \sin\varphi_1 \sin\varphi)$. Отсюда, пользуясь формулами (4) и обозначая через X, Y — проекции на координатные оси отрезка AB, а через $X_1 Y_1$ — проекции отрезка M_1M_2, получим: $\text{Пр.}_l M_1M_2 = = M_1M_2\left(\frac{X_1}{M_1M_2}\frac{X}{d} + \frac{Y_1}{M_1M_2}\frac{X}{d}\right) = \frac{X_1X + Y_1Y}{d}$, где d — длина отрезка AB, равная $d = \sqrt{X^2 + Y^2} = \; = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = 5$.

Таким образом, $\text{Пр.}_l M_1M_2 = \frac{(3-1)4 + (5-0)3}{5} = \frac{23}{5}$.

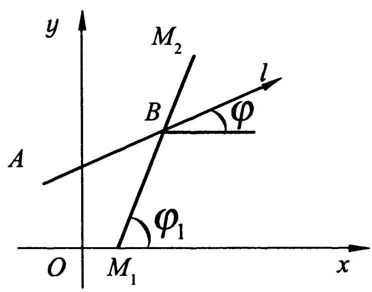


Рис. 3.64

8.7. Линия задана уравнением $\rho = \frac{1}{2 + 2\cos\varphi}$. **Требуется:** а) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{4}$; б) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью; в) по полученному уравнению определить, какая это линия.

Решение. а) Составим таблицу и строим линию по точкам (рис. 3.65)

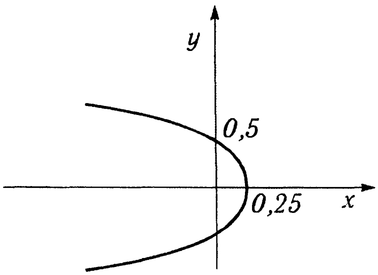


Рис. 3.65

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos\varphi$	1	0,707	0	–0,707	–1	–0,707	0	0,707	1
$\frac{1}{2+2\cos\varphi}$	0,25	0,29	0,5	1,7	∞	1,7	0,5	0,29	0,25

б) Между декартовыми и полярными координатами существует зависимость $y = \rho\sin\varphi$, $x = \rho\cos\varphi$, откуда $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Подставляя эти значения в данное уравнение, получим

$$2\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}},\quad 2\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=1,\quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1-2x}{2},$$

$$4x^2+4y^2 = 1-4x+4x^2,\quad 4x = 1-4y^2,\quad x = \frac{1}{4}-y^2.$$

в) Полученное уравнение $x = \frac{1}{4}-y^2$ — есть уравнение параболы.

3.9. Параметрические уравнения плоских кривых

Уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где t — параметр, называются параметрическими уравнениями кривой. Для того чтобы получить уравнение кривой в прямоугольных координатах, из двух параметрических уравнений нужно исключить параметр.

1. Параметрические уравнения окружности: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

2. Параметрические уравнения эллипса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

В параметрических уравнениях эллипса параметр t есть угол, образованный радиусом OM с осью абсцисс (рис. 3.66).

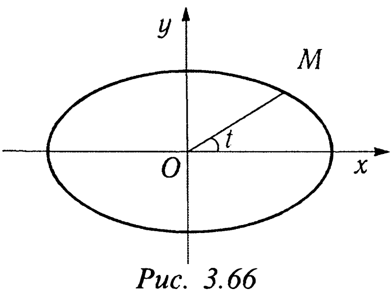


Рис. 3.66

3. Циклоидой называется кривая, описанная точкой M, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 3.67).

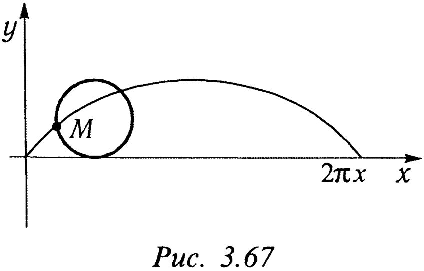


Рис. 3.67

Параметрические уравнения циклоиды: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$. При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

9.1. Найти параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=2Rx$, если полярная ось совпадает с осью Ox, а полюс находится в начале координат.

Решение. Между декартовыми координатами и полярными существует зависимость $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. В качестве параметра примем полярный угол $\varphi=t$, тогда уравнение окружности будет $\rho=2R\cos\varphi=2R\cos t$. Если в формулы перехода вместо ρ и φ подставить их выражения в функции t, то получим

$$x=\rho(t)\cos t=2R\cos^2 t,\quad y=\rho(t)\sin t=2R\cos t\sin t=R\sin 2t.$$

Откуда $x=R(1+\cos 2t)$, $y=R\sin 2t$.

9.2. Найти уравнения кривых в прямоугольных координатах: а) $x=-2+t$, $y=1+2t$; б) $x=t^2+2t+4$, $y=t+1$; в) $x=1+2\cos t$, $y=-3+2\sin t$; г) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; д) $x=2R\cos^2 t$, $y=R\sin 2t$.

Решение. а) Найдем из первого уравнения параметр $t=x+2$ и исключим его из второго уравнения. Тогда получим $y=1+2(x+2)$ или $2x-y+5=0$. Это уравнение прямой.

б) Представим первое уравнение в виде $x=(t+1)^2+3$, тогда $x=y^2+3$. Это уравнение параболы с вершиной, смещенной на три единицы по оси Ox.

в) Разрешим уравнения относительно тригонометрических функций $2\cos t=x-1$, $2\sin t=y+3$. Возведем в квадрат и сложим $4=(x-1)^2+(y+3)^2$. Кривая престаляет окружность с центром в точке (1; –3) и радиусом равным 2.

г) Разделим правые части на a и b, возведем выражения в квадрат и сложим $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это уравнение эллипса.

д) Возведем второе выражение в квадрат и преобразуем $y^2=R^2\sin^2 2t \Rightarrow y^2=4R^2\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 t$. Найдем из первого уравнения $\cos^2 t=\frac{x}{2R}$ и подставим, тогда

$$y^2=4R^2\left(1-\frac{x}{2R}\right)\frac{x}{2R}\Rightarrow y^2=2Rx-x^2\Rightarrow\left(x-R\right)^2+y^2=R^2.$$

Уравнение окружности с центром, смещенным по оси Ox на радиус R.

Глава 4
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Системы координат

1°. Декартова или прямоугольня система координат представляет совокупность трех взаимно-перпендиулярных осей: оси абсцисс Ox, оси ординат Oy и оси аппликат Oz.

Система координат называется правой, если для каждой пары осей xy, yz, zx кратчайший поворот первой из них вокруг начала координат до совпадения с положительным направлением второй виден со стороны положительного направления третьей оси, совершающимся против часовой стрелки, и левой — в противоположном случае.

Декартовыми координатами точки M называются проекции радиус-вектора OM (рис. 4.1) на оси координат.

2°. Цилиндрическими координатами точки M являются ее апликата z и полярные координаты проекции точки M на плоскость xOy (рис. 4.1).

Цилиндрические координаты связаны с прямоугольными координатами формулами (3)

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad z = z. \tag{1}$$

Из равенств (1) легко находятся формулы обратного перехода

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad z = z. \tag{2}$$

причем выбор нужного угла φ из двух главных значений можно произвести, например, по знаку координаты y.

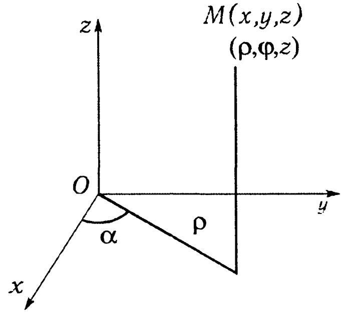


Рис. 4.1

3°. В сферической системе координат (рис. 4.2) положение точки M определяется: ее расстоянием ρ от начала координат (радиус-вектором) ($0 \le \rho < \infty$); углом φ, который образует проекция радиус-вектора на плоскость xOy с положительным направлением оси Ox ($0 \le \varphi < 2\pi$); углом θ, который радиус-вектор образует с положительным направлением оси Oz ($0 \le \theta < \pi$).

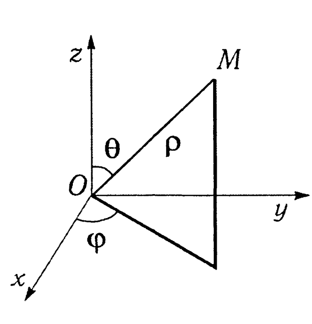


Рис. 4.2

Связь между прямоугольными координатами точки и ее сферическими координатами устанавливается формулами

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad z = \rho\cos\theta. \qquad (3)$$

Решая уравнения (3) относительно ρ, φ, θ, получим формулы обратного перехода

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (4)$$

причем выбор нужного знака угла φ из двух главных значений можно произвести, например, по знаку координаты y.

4.2. Плоскость

1°. *Основные уравнения плоскости.*

1. Общее уравнение плоскости. Всякая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными

$$Ax+By+Cz+D = 0. \qquad (1)$$

2. Нормальное уравнение плоскости

$$\vec{r}\cdot\vec{n}^{\circ} - p = 0 \;\text{ или }\; x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (2)$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; α, β, γ — углы, которые этот перпендикуляр образует с положительными направлениями координатных осей; $\vec{n}^{\circ}$ — единичный вектор направления OP (рис. 4.3).

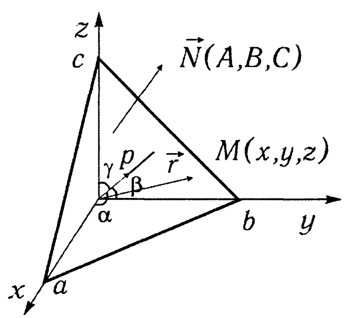


Рис. 4.3

Для приведения общего уравнения плоскости (1) к нормальному виду нужно это уравнение умножить на нормирующий множитель $M = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, при этом знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку D в уравнении (1). (Если $D = 0$, то знак M может быть любой). Зная общее уравнение плоскости, косинусы направляющих углов в нормальном уравнении плоскости находятся по формулам $\cos\alpha = A\cdot M$; $\cos\beta = B\cdot M$; $\cos\gamma = C\cdot M$, а длина перпендикуляра $p = |D\cdot M|$.

3. Уравнение плоскости в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3}$$

где a, b, c — отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях (Рис. 4.3).

4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{4}$$

5. Параметрические уравнения плоскости

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_x + vb_x; \\ y &= y_0 + ua_y + vb_y; \\ z &= z_0 + ua_z + vb_z, \end{aligned} \tag{5}$$

где u, v – два параметра; $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$, — проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяющих векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{N}$.

2°. *Основные задачи на плоскость.*

1. Точка пересечения трех плоскостей находится из совместного решения их уравнений.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

3. Параметрические уравнения плоскости, проходящей через три точки, имеют вид

$$\begin{aligned} x&=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1); \\ y&=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1); \\ z&=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1). \end{aligned} \tag{7}$$

4. Угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним векторами $\vec{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{8}$$

5. Если две плоскости взаимно-перпендиклярны, то сумма произведений коэффициентов при одноименных текущих координатах равна нулю

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{9}$$

6. Если две плоскости параллельны, то коэффициенты при одноименных текущих координатах пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{10}$$

7. Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{11}$$

2.1. Дано уравнение плоскости $9x-2y+6z-11=0$. **Привести**: а) к нормальному виду; б) к уравнению плоскости в отрезках на осях.

Решение. а) Найдем нормирующий множитель $M=\frac{1}{\sqrt{9^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{1}{11}$. Умножая на M данное уравнение, получим

$$\frac{9}{11}x-\frac{2}{11}y+\frac{6}{11}z-1=0,$$

где $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\cos\beta=-\frac{2}{11}$, $\cos\gamma=\frac{6}{11}$ и $p=1$.

б) Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим на него уравнение, представив его в виде

$$\frac{x}{\frac{11}{9}}+\frac{y}{-\frac{11}{2}}+\frac{z}{\frac{11}{6}}=1.$$

Отрезки на осях $a=\frac{11}{9}$, $b=-\frac{11}{2}$, $c=\frac{11}{6}$.

2.2. Написать общее и параметрические уравнения плоскости, проходящей через три точки $A(1,1,0)$; $B(3,2,-1)$ и $C(2,-1,4)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (6)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Общее уравнение искомой плоскости $2x-9y-5z+7=0$.

Для получения параметрических уравнений плоскости подставляем координаты точек в формулы (7)

$$x = 1 + 2u + v,$$
$$y = 1 + u - 2v,$$
$$z = \quad -u + 4v.$$

2.3. Через точку (2,1,3) **провести** плоскость, которая была бы перпендикулярна к плоскости $x+3y-z+2=0$ и проходила бы через точку (3,–1,5).

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости (4), проходящей через данную точку и перпендикулярной некоторому вектору $\vec{N}(A,B,C)$

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z-3) = 0. \qquad (*)$$

Из условия перпендикулярности (9) этой и данной плоскости имеем $A+3B - C = 0$.

Поскольку наша плоскость должна проходить через точку (3,–1,5), то подставляя ее координаты в уравнение (*), получим

$$A-2B+2C = 0.$$

Мы получили систему трех линейных однородных уравнений относительно неизвестных A, B, C. Чтобы система имела решение отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости $4x-3y-5z+10 = 0$.

2.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,1,-2)$ перпендикулярную линии пересечения плоскостей $x+3y+2z+1 = 0$ и $3x+2y-z+8 = 0$.

Решение. Найдем вектор параллельный линии пересечения плоскостей

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}.$$

Воспользуемся теперь уравнением плоскости, проходящей через точку M_0, нормальный вектор которой параллелен линии пересечения плоскостей

$$-7(x-2)+7(y-1)-7(z+2)=0 \text{ или } x-y+z+1=0.$$

2.5. Через точку $(2,-1,3)$ **провести** плоскость, параллельную плоскости $x-2y+4z-5=0$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0$.

Поскольку плоскости параллельны, то, используя условие параллельности плоскостей (10), подставляем вместо A,B,C значения коэффициентов из заданного уравнения плоскости (с коэффициентом пропорциональности, равным 1)

$$x-2-2(y+1)+4(z-3)=0$$

$$\text{или } x-2y+4z-16=0.$$

2.6. Вычислить расстояние от точки $M(2;-1;3)$ до плоскости $11x-2y+10z+6=0$.

Решение. По формуле (10) имеем

$$d=\left|\frac{11\cdot2-2(-1)+10\cdot3+6}{\sqrt{(11)^2+(-2)^2+(10)^2}}\right|=\frac{60}{15}=4.$$

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;-1;2)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N}(4;3;-1)$.

Решение. В соответствии с уравнением (5) имеем $4(x-1)+3(y+1)-(z-2)=0$, откуда $4x+3y-z+1=0$.

2.8. Вычислить угол между плоскостями $x+2y-3z-4=0;\ 2x-y+z+1=0$.

Решение. Используя формулу (7), получим

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2(-1)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(1)^2}}=-\frac{3}{2\sqrt{21}},$$

откуда $\varphi=\arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)$.

Следует отметить, что в данном случае получен тупой угол. Острый угол между этими плоскостями равен $\pi-\varphi$.

2.9. Найти расстояние между параллельными плоскостями $5x+2y-3z-7=0$ и $5x+2y-3z+4=0$.

Решение. Искомое расстояние равно расстоянию от любой точки, лежащей на одной из плоскостей, до другой. Возьмем на первой плоскости точку, полагая для удобства расчета $x=0;\quad y=0$. Тогда $z=-\frac{7}{3}$. Расстояние от точки $M\left(0;0;-\frac{7}{3}\right)$ до второй плоскости находим по формуле (11)

$$d=\frac{\left|5\cdot 0+2\cdot 0-3\left(-7/3\right)+4\right|}{\sqrt{25+4+9}}=\frac{11}{\sqrt{38}}.$$

2.10. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x+2y-2z+4=0$ и отстоящих от нее на расстояние $d=3$.

Решение. Очевидно, что искомых плоскостей – две. Пусть точка $M(x,y,z)$ произвольна и принадлежит какой-либо одной из искомых плоскостей. Поскольку расстояние от точки до плоскости равно трем, то имеем

$$\frac{|x+2y-2z+4|}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=3.$$

Откуда следует, что

$$\frac{x+2y-2z+4}{3}=3; \quad \frac{x-2y-2z+4}{3}=-3.$$

Таким образом, искомые уравнения плоскостей имеют вид

$$x+2y-2z-5=0; \quad x-2y-2z+13=0.$$

4.3. Прямая линия

1°. *Основные уравнения прямой линии.*

1. Уравнение прямой линии в общем виде

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

2. Уравнение прямой в симметричном (каноническом) виде

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{2}$$

где

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

– проекции направляющего вектора $\vec{a}\left(l,m,n\right)$ прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

3. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ в направлении вектора $\vec{a}\{l,m,n\}$ имеют вид

$$x=x_0+lt; \quad y=y_0+mt; \quad z=z_0+nt, \tag{3}$$

где t — параметр.

Если считать, что t — время, то уравнения (3) определяют прямолинейное и равномерное движение точки $M(x,y,z)$ со скоростью $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ в направлении вектора $\vec{a}\{l,m,n\}$.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является начальным положением переменной точки $M(x,y,z)$, то есть положением при $t = 0$.

2°. *Основные задачи на прямую линию.*

1. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

2. Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{5}$$

3. Если две прямые взаимно-перпендикулярны, то сумма произведений их одноименных направляющих коэффициентов равна нулю

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{6}$$

4. Если две прямые параллельны, то одноименные направляющие коэффициенты этих прямых пропорциональны

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

3.1. Составить симметричные уравнения прямой линии

$$\begin{cases}8x-4y-z+6=0;\\5x+y-3z+5=0.\end{cases}$$

Решение. Пусть $x_0=0$, тогда

$$\begin{cases}-4y-z+6=0;\\y-3z+5=0,\end{cases}$$

откуда $y_0=1;\quad z_0=2.$

Воспользуемся теперь формулой (2)

$$l=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=13;\quad m=-\begin{vmatrix}8 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=19;\quad n=\begin{vmatrix}8 & -4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=28.$$

$$\frac{x}{13}=\frac{y-1}{19}=\frac{z-2}{28}.$$

3.2. Получить параметрические уравнения прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=z.$$

Решение. Обозначим в симметричном уравнении прямой равные отношения буквой t

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}=t,$$

откуда $x=2+3t,\quad y=-1+4t,\quad z=t.$

3.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2,1,-1)$ и $M_2(4,-3,2)$.

Решение. Принимая в качестве элементов, определяющих прямую, точку M_1 и направляющий вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(2,-4,3)$, запишем по формуле (4) уравнение прямой

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}.$$

3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x+2y-3z-2=0$ с прямыми $\frac{x-5}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{1}$.

Решение. Запишем уравнение первой прямой в параметрическом виде $x = 5 — 5t$, $y = 3+t$, $z = 2t$. Для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью подставим эти уравнения в уравнение плоскости и найдем параметр t

$$5-5t+6+2t-6t-2=0,\quad -9t=-9,\quad t=1.$$

Отсюда координаты точки пересечения $x_1 = 0$, $y_1 = 4$, $z_1 = 2$.

Параметрические уравнения второй прямой будут $x = 7+5t$, $y = 1+4t$, $z = -1+t$. Подставляя их в уравнение плоскости $7+5t+2+8t+3-3t-2 = 0$, находим, что $t = -1$ и координаты точки пересечения $x_2 = 2$, $y_2 = -3$, $z_2 = -2$. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, получим

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-3-4} = \frac{z-2}{-2-2} \quad \text{или} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-2}{-4}.$$

3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,0,-3)$ параллельно линии пересечения плоскостей $x+2y-z+3 = 0$ и $3x - y - 4z+2 = 0$.

Решение. Перемножая векторно нормальные к заданным плоскостям векторы, находим вектор параллельный линии их пересечения

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 паралельно вектору $\vec{N}$, примет вид

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-7}.$$

3.6. Найти угол, образованный прямыми:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{7}{9}; \qquad \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{6}.$$

Решение. Угол между прямыми находим по формуле (5)

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + 6\cdot 2 + 9\cdot 6}{\sqrt{2^2+6^2+9^2}\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{72}{77} = 0{,}936,$$

откуда $\varphi = 20^\circ 30'$.

3.7. Составить уравнения движения точки M, которая, имея начальное положение $M_0(1;2;1)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{a} = \{4;4;2\}$ со скоростью $v = 18 м/с$.

Решение. Сравнивая модуль вектора $\vec{a}$, который равен $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$ с заданной скоростью $v = 18$м/с, видим, что в качестве вектора $\vec{s}$ следует взять вектор в три раза больший, т. е. $\vec{s} = \{12;12;6\}$. Согласно формулам (3) уравнения движения будут

$$x = 1 + 12t; \quad y = 2 + 12t; \quad z = 1 + 6t.$$

4.4. Прямая и плоскость

1. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \pm\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{1}$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{2}$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{3}$$

4. Уравнение пучка плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0. \tag{4}$$

5. Точка пересечения прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плос-

кости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формулам $x=x_0+tl$; $y=y_0+tm$; $z=z_0+tn$, где $t=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$.

4.1. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ и плоскости $2x+y-z-7=0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=2t$; $y=t+2$; $z=3t-1$.

Подставляя x,y,z в уравнение плоскости, находим соответствующее значение t: $4t+t+2-3t+1-7=0$.

Отсюда $t=2$ и координаты точки пересечения $x=4$; $y=4$; $z=5$.

4.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y-3z-1=0$ и $2x+y-3z-4=0$ и через точку $(2,-1,3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка плоскостей (4), проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей $x+2y-3z-1+\lambda(2x+y-3z-4)=0$.

Подставляя координаты точки в уравнение пучка, находим соответствующее значение λ:

$$2+2(-1)-3\cdot 3-1+\lambda(2\cdot 2+(-1)-3\cdot 3-4)=0.$$

Отсюда $\lambda=-1$. Подставляя значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение $x-y+3=0$.

4.3. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(2,-1,4)$ и $M_2(5,2,-3)$.

Решение. Уравнение плоскости проходящей через точку M_1 будет $A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0$. Так как искомая плоскость параллельна оси Ox, то проекция нормального к плоскости вектора на эту ось равна нулю, т. е. $A=0$. Поскольку плоскость проходит еще и через точку M_2, то получим $3A+3B-7C=0$.

Система имеет решение отличное от нулевого, когда определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 7y+3z-5=0.$$

4.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,2,-1)$ и параллельной прямым $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0, будет $A(x-3)+B(y-2)+C(z+1)=0$. Поскольку плоскость параллельна прямым, то из условия (2) имеем $2A+3B-2C=0$ и $4A+B+3C=0$. Система этих уравнений может иметь решение, если определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда уравнение искомой плоскости

$$11x-14y-10z-15=0.$$

4.5. Определить угол между прямой, проходящей через точки $M_1(0,2,6)$ и $M_2(3,6,-6)$, и плоскостью $2x-y-2z-1=0$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, примет вид $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-12}$.

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле (1)

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 3-1\cdot 4+2\cdot 12}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16+144}} = \frac{26}{3\cdot 13} = \frac{2}{3}.$$

4.6. Найти проекцию точки $M_0(1,2,3)$ на плоскость $x-2y+z-6=0$.

Решение. Уравнение перпендикуляра, проходящего через точку M_0 к плоскости, имеет вид

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

Поскольку направляющий вектор прямой совпадает с нормальным вектором к плоскости, то на основании условия (3) будем иметь

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}=t.$$

Откуда $x=1+t$, $y=2-2t$, $z=3+t$. Зная параметрические уравнения прямой, находим точку пересечения прямой и плоскости. Для этого подставим эти уравнения в уравнение плоскости и найдем параметр t: $1+t-4+4t+3+t-6=0$, $t=1$. Отсюда $x=2$, $y=0$, $z=4$.

4.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 8x+2y+3z+6=0, \\ 3x+4y+z+1=0 \end{cases}$$

параллельно прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей (4), проходящих через первую из данных прямых $8x+2y+3z+6+\lambda(3x+4y+z+1)=0$.

Выберем из этого пучка плоскость параллельную второй прямой, то есть найдем соответствующее численное значение λ. Представим уравнение пучка плоскостей в виде $(8+3\lambda)x+(2+4\lambda)y+(3+\lambda)z+6+\lambda=0$.

Используя условие параллельности прямой и плоскости (2), имеем $2(8+3\lambda)+3(2+4\lambda)-2(3+\lambda)=0$, откуда $\lambda=-1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка плоскостей, получим искомое уравнение $5x-2y+2z+5=0$.

4.8. Найти проекцию прямой
$\begin{cases} x-3y-z+4=0, \\ 2x-4y+3z-2=0 \end{cases}$ на плоскость $3x+2y+z-7=0$.

Решение. Искомая проекция определится, как пересечение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую

$$x-3y-z+4+\lambda(2x-4y+3z-2)=0$$

или

$$(1+2\lambda)x-(3+4\lambda)y-(1-3\lambda)z+4-2\lambda=0.$$

Искомая плоскость должна быть перпендикулярна данной плоскости. Используя условие перпендикулярности двух плоскостей для определения неизвестной величины λ, получим уравнение $3(1+2\lambda)-2(3+4\lambda)-(1-3\lambda)=0$, откуда $\lambda=4$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, находим уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую перпендикулярно к данной плоскости $9x-19y+11z-4=0$.

Проекция данной прямой на данную плоскость определяется пересечением плоскостей

$$\begin{cases} 9x-19y+11z-4=0, \\ 3x+\ 2y\ +\ \ z-7=0. \end{cases}$$

4.9. Найти расстояние от точки $M(1,2,-1)$ до прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Решение. Найдем точку пересечения плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной прямой. Искомое расстояние будет равно расстоянию от точки M до точки пересечения плоскости и прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M, имеет вид $A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$. Из условию перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{1}=\frac{B}{1}=\frac{C}{2}$, полагая множитель пропорциональности равным единице, находим $A=1,\ B=1,\ C=2$. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $x+y+2z-1=0$.

Для нахождения точки пересечения плоскости и данной прямой решаем совместно уравнения плоскости и прямой. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=t+3,\ y=t+2$, $z=2t+4$. Подставляя эти выражения в левую часть уравнения данной плоскости $t+3+t+2+2(2t+4)-1=0$, находим, что параметр t равен $t=-2$. Следовательно, координаты искомой точки суть $x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=0$.

Искомое расстояние от точки M до прямой определяем по формуле расстояния между двумя точками $d=\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$.

4.5. Поверхности второго порядка

Степень алгебраического уравнения, определяющего данную поверхность, называется порядком этой поверхности.

1°. *Эллипсоид.* Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

где a,b,c — полуоси трехосного эллипсоида (рис. 4.4).

Эллипсоид, две оси которого равны между собой, например $a=b$, называется *эллипсоидом вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

и получается от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Oz.

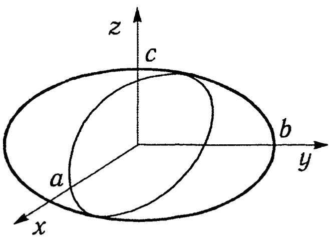


Рис. 4.4

2°. *Однополостный гиперболоид.* Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

где a,b — полуоси эллипса в плоскости xOy (рис. 4.5).

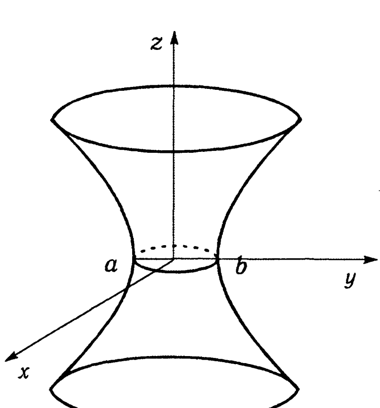


Рис. 4.5

Форму поверхности определяют методом сечений. При z=0 в плоскости xOy получают $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — наименьший из всех возможных эллипсов, который называется *горловым*. Сечения поверхности с плоскостями yOz и xOz образуют гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Сечение поверхности с плоскостью $x = a$ образует две прямые $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$; $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$. Можно установить, что через любую точку однопостного гиперболоида проходят две прямые, лежащие на этом гиперболоиде.

Поэтому однополостный гиперболоид называют линейчатой поверхностью.

Если $a = b$, то уравнение (3) принимает вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Она образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

3°. *Двухполостный гиперболоид*. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

При $x = a$ получаем точки $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$ — вершины поверхности (рис. 4.6). В сечении с плоскостями $|x| > a$ поверхность образует эллипсы. В сечении с плоскостями xOy и xOz получаются гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Поверхность (5) симметрична относительно плоскости yOz.

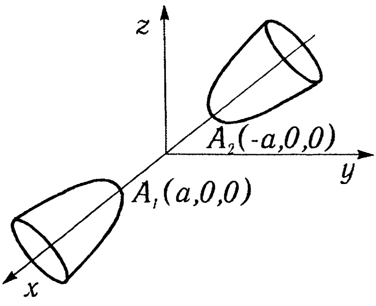


Рис. 4.6

При $b = c$ уравнение (5) принимает вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *двухполостным гиперболоидом вращения*. Она образуется при вращении гиперболы вокруг оси Ox.

4°. *Эллиптический параболоид*. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z; \quad p > 0; \quad q > 0. \tag{6}$$

При пересечении с плоскостями $z = h$ поверхность (6) образует эллипс (рис. 4.7).

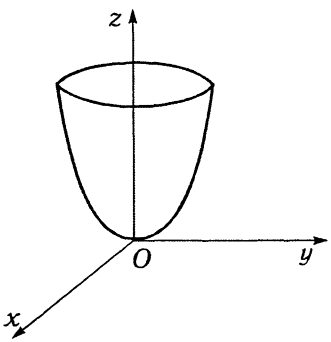


Рис. 4.7

В сечении с плоскостями xOz и yOz поверхность образует параболы $x^2 = 2pz$ и $y^2 = 2qz$. При $p = q$ уравнение (6) принимает вид $x^2 + y^2 = 2pz$ и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *параболоидом вращения.* Она образуется вращением параболы вокруг оси z.

5°. *Гиперболический параболоид.* Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z; \quad p > 0; \quad q > 0. \tag{7}$$

Сечение поверхности (7) с плоскостью xOy образует пару прямых $y = \sqrt{\frac{q}{p}}x;\quad y = -\sqrt{\frac{q}{p}}x$ (рис. 4.8). Сечения поверхности с плоскостями $z = h$ $(h > 0)$ — гиперболы, у которых действительная ось параллельна оси Ox. Сечения с плоскостями $z = h$ $(h < 0)$ — гиперболы, у которых действительная ось параллельна оси Oy. Сечения поверхности с плоскостями xOz и yOz представляют параболы $x^2 = 2pz$ и $y^2 = -2qz$.

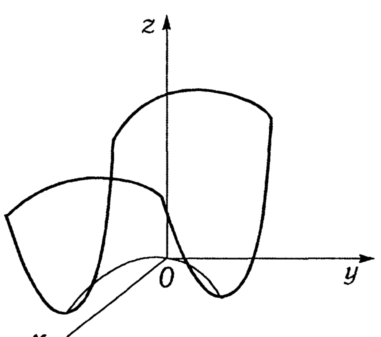


Рис. 4.8

Если $p = q$, то уравнение (7) принимает вид $x^2 + y^2 = 2pz$, гиперболы в сечениях будут равносторонними, а параболы будут иметь равные параметры.

При повороте системы координат вокруг оси Oz на угол 135° уравнение (7) примет вид $xy = pz$. Сечения поверхности плоскостями $z = h$ суть равносторонние гиперболы. Плоскость xOy пересекает эту поверхность по осям координат.

6°. *Цилиндрические поверхности.* Уравнения, не содержащие какой-либо одной координаты, в пространстве изображаются цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны отсутствующей координатной оси. Само же уравнение есть уравнение направляющей кривой этого цилиндра.

1. *Эллиптический цилиндр* (рис. 4.9)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{8}$$

Направляющей, лежащей в плоскости xOy, служит эллипс. Если $a = b$, то направляющая есть круг, а цилиндр называется круговым.

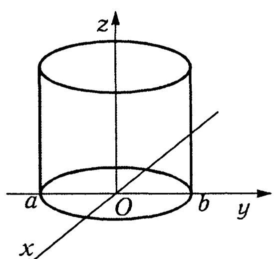


Рис. 4.9

2. *Гиперболический цилиндр* (рис. 4.10)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

Направляющей является гипербола.

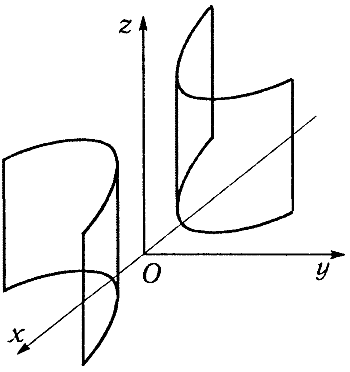


Рис. 4.10

3. *Параболический цилиндр* (рис. 4.11)

$$y^2 = 2px. \qquad (10)$$

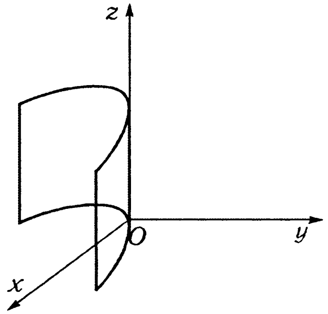


Рис. 4.11

Направляющей является парабола.

Аналогично записываются уравнения цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными координатным осям Ox и Oy.

7°. Поверхность, образованная движением прямой, проходящей через неподвижную точку пространства и пересекающей при этом некоторую кривую, называется ***конической поверхностью.***

Неподвижная точка называется *вершиной,* кривая — *направляющей* и прямая — *образующей* конической поверхности. Каноническое уравнение конуса, когда ось симметрии конуса совпадает с осью Oz (рис. 4.12), имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (11)$$

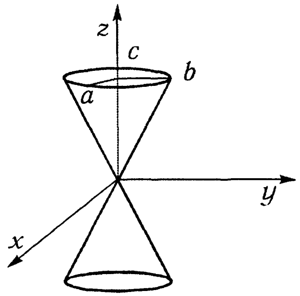


Рис. 4.12

Если $a=b\neq c$ — конус круговой; если $a=b=c$, то $x^2+y^2-z^2=0$ — прямой круговой конус, образующие наклонены к плоскости xOy под углом 45°.

5.1. По заданному уравнению $f(x,y,z)=0$ **определить** вид поверхности и указать ее расположение в координатной системе:
а) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$; б) $4x^2+4y^2+5z^2-20=0$;
в) $5x^2+5y^2-4z^2-20=0$; г) $4x^2+y^2-2z=0$; д) $x^2+z^2-y=0$;
ж) $y^2-4z-5=0$; з) $y^2-8x+3=0$.

Решение. а) Дополним до полных квадратов многочлен в левой части $x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9-9=0$ или $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3^2$.

Полагая $x'=x-1$; $y'=y+1$; $z'=z-3$, находим, что в системе координат x', y', z', смещенной относительно системы x, y, z параллельным переносом в точку с координатами $x_0=1$; $y_0=-1$; $z_0=3$, данная поверхность имеет простейшее уравнение вида $x'^2+y'^2+z'^2=3^2$. Таким образом, данное уравнение определяет сферу с центром в точке $O'(1,-2,3)$ и радиусом равным $R = 3$.

б) Перенесем свободный член в правую часть и разделим на него, тогда будем иметь

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Данное уравнение представляет эллипсоид вращения вокруг оси z с полуосями $a=b=\sqrt{5}$; $c=2$.

в) Пернесем свободный член в правую часть и разделим на него, тогда будем иметь $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$.

Данное уравнение представляет однополостный гиперболоид вращения (4) вокруг оси z.

г) Разрешим выражение относительно z, тогда будем иметь

$$z=\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{2}.$$

Данное уравнение представляет эллиптический параболоид (5).

д) Разрешим выражение относительно y, тогда получим $y=x^2+z^2$. Нетрудно заметить, что это уравнение предствляет параболоид вращения с осью вращения y (рис. 4.13).

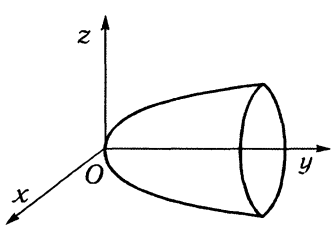


Рис. 4.13

ж) Поскольку переменная x отсутствует, то уравнение $z=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$ представляет параболический цилиндр с образующими параллельными оси x (рис. 4.14). Сечение параболического цилиндра с плоскостью Oyz образует параболу, вершина которой находится в точке с координатой $z=-\frac{5}{4}$.

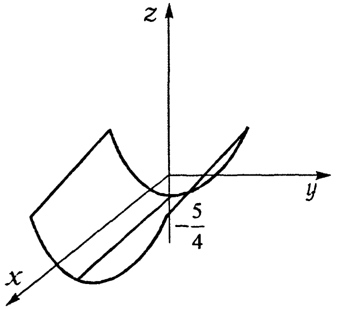


Рис. 4.14

з) Поскольку переменная z отсутствет, то выражение $x=\frac{1}{8}y^2+\frac{3}{8}$ представляет параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси z (рис. 4.15). Сечение параболического цилиндра с плоскостью Oxy образуют параболу, вершина которой находится в точке с координатой $x=\frac{3}{8}$.

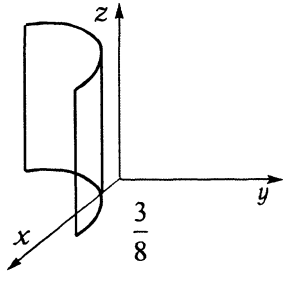


Рис. 4.15

5.2. Установить поверхность, определяемую уравнением:

а) $4x^2+9y^2+16z^2-16x+36y+32z+59=0$;

б) $x^2-4y^2+4z^2+2x+8y-7=0$;

в) $x^2-16y^2-4z^2-10x-64y+24z-48=0$;

г) $5x^2+2y+3z^2-9=0$.

Решение. а) Поскольку уравнение не содержит произведений координат, то приведение его к простейшему виду осуществляется посредством параллельного переноса. Выделим полные квадраты

$$4x^2+9y^2+16z^2-16x+36y+32z+59=$$

$$=4(x^2-4x+4)+9(y^2+4y+4)+16(z^2+2z+1)-9=$$

$$=4(x-2)^2+9(y+2)^2+16(z+1)^2-9.$$

Полагая $x'=x-2$, $y'=y+2$, $z'=z+1$, находим, что в системе координат x', y', z', смещенной относительно системы x,y,z паралельным переносом начала в точку с координатами $a=2$, $b=-2$, $c=-1$ данная поверхность имеет простейшее уравнение вида

$$4(x')^2+9(y')^2+16(z')^2=9 \text{ или } \frac{(x')^2}{\left(3/2\right)^2}+\frac{(y')^2}{1^2}+\frac{(zx)^2}{\left(3/4\right)^2}=1.$$

Таким образом, данное уравнение определяет эллипсоид (1) с центром в точке $O'(2,-2,-1)$ и полуосями $a=3/2$, $b=1$, $c=3/4$.

б) Уравнение не содержит произведений координат. Преобразуем левую часть до полных квадратов

$$x^2+2x+1-4(y^2-2y+1)+4z^2-4=(x+1)^2-4(y-1)^2+4z^2-4.$$

Полагая $x'=x+1$, $y'=y-1, z'=z$, получим уравнение поверхности в системе координат x',y',z', смещенной относительно системы x,y,z параллельным переносом начала в точку $O'(-1,1,0)$

$$(x')^2-4(y')^2+4(z')^2=4 \text{ или } \frac{(x')^2}{2^2}-(y')^2+(z')^2=1.$$

Поскольку в этом уравнении коэффициенты при $(x')^2$ и $(z')^2$ положительные, а при $(y')^2$ — отрицательный, то данное уравнение определяет однополостный гиперболоид (3), расположенный вдоль оси y'.

в) Преобразуя левую часть до полных квадратов, приходим к уравнению $(x-5)^2-16(y+2)^2-4(z-3)^2=0$, из которого после замены $x'=x-5$, $y'=y+2$, $z'=z-3$ получим уравнение поверхности в системе координат x',y',z', смещенной относительно системы x,y,z параллельным переносом начала координат в точку $(5,-2,3)$

$$(x')^2-16(y')^2-4(z')^2=0.$$

Поскольку в этом уравнении свободный член равен нулю и коэффициенты при квадратах координат разных знаков, то данное уравнение определяет конус второго порядка (11) с осью вдоль оси x' и вершиной в точке $(5,-2,3)$.

г) Данное уравнение содержит две координаты во второй степении одну в первой, следовательно, уравнение определяет эллиптический парболоид (5). Переписывая его в виде $5x^2+3z^2=-2(y-9/2)$, заключаем, что вершина параболоида расположена в точке с координатами $O'(0,9/2,0)$ и его полость обращена в сторону отрицательных значений y. Если обозначить $x'=x$, $y'=y-9/2$, $z'=z$, то получим каноническое уравнение параболоида (рис. 4.16)

$$\frac{(x')^2}{2/5}+\frac{(zx)^2}{2/3}=-y'.$$

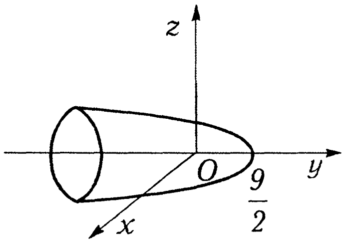


Рис. 4.16

4.6. Геометрический смысл уравнений с тремя неизвестными в пространстве

1°. Рассмотрим уравнение с тремя неизвестными $F(x,y,z) = 0$.

Предположим, что уравнение может быть разрешено относительно z, то есть $z = f(x, y)$. Данное уравнение в пространстве представляет поверхность и называется *уравнением поверхности.*

Если поверхность определена геометрически, т. е. задано некоторое свойство, принадлежащее всем ее точкам и не принадлежащее другим точкам пространства, то можно составить уравнение этой поверхности. Заданное геометрическое свойство, выраженное уравнением, связывающим текущие координаты, и будет уравнением поверхности.

2°. Всякую линию в пространстве можно расматривать как пересечение двух поверхностей $F(x,y,z) = 0$ и $\Phi(x,y,z) = 0$. То есть, линия в проствнстве рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе этих уравнений.

6.1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $M(2,1,-1)$ и $N(-3,0,3)$.

Решение. Пусть точка $P(x,y,z)$ будет текущей точкой искомого геометрического места точек. Тогда, по формуле (11, Гл.2.2) данное условие примет вид

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2+(z-3)^2}.$$

Упрощая, получим уравнение геометрического места точек $5x+y-4z+6=0$. Полученное уравнение изображает плоскость, перпендиклярную отрезку MN и пересекающую его посередине.

6.2. Найти геометрическое место точек, удаленных на расстояние 5 единиц от точки $C(1,-2,1)$.

Решение. Пусть точка $M(x,y,z)$ есть текущая точка поверхности. Тогда, воспользовавшись формулой (11,Гл.2.2), по условию задачи будем иметь $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Данное уравнение представляет сферическую поверхность с центром в точке C и радиусом $R = 5$.

6.3. Каков геометрический смысл системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение есть сфера, второе представляет в пространстве плоскость. Подставляя $z = 3$ в первое уравнение, получим $x^2+y^2=16$. То есть пересечение плоскости со сферой есть окружность, параллельная плоскости Oxy, с центром в точке $C(0,0,3)$ и радиусом равным 4.

6.4. Найти проекцию линии пересечения конуса $x^2+y^2-3z^2=0$ $(z\geq 0)$ и сферы $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ на координатную плоскость Oxy.

Решение. Находим уравнение проектирующего цилиндра. Для этого исключаем из уравнений поверхностей переменную z. Умножая второе уравнение на 3 и складывая с первым, получим $4x^2-6x+4y^2=0$. Таким образом, проекция линии на плоскость Oxy определяется следующей системой: $x^2+y^2-\frac{3}{2}x=0;$ $z=0$. Выделяя в первом уравнении полный квадрат, получим $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$. Следовательно, проекция линии пересечения поверхностей на плоскость Oxy представляет окружность с центром в точке $O_1\left(3/4;0\right)$ и радиусом, равным $\frac{3}{4}$.

6.5. Тело в пространстве задано системой неравенств. **Определить** вид поверхностей, ограничивающих это тело. Указать по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются эти поверхности: а) $x^2+y^2<(z-2)^2$, $x^2+y^2\le z$ б) $x^2+y^2+z^2\le 25$, $x^2+y^2\le 9$; в) $x^2+y^2-9\ge z^2$, $x^2+y^2\le 16$.

Решение. а) Уравнение $x^2+y^2=(z-2)^2$ задает в пространстве конус, смещенный вверх по оси Oz на 2. Неравенство $x^2+y^2\le(z-2)^2$ показывает, что поверхность ограничивает тело внутри конуса.

Уравнение $x^2+y^2=z$ задает в пространстве параболоид, а неравенство $x^2+y^2\le z$ показывает, что поверхность ограничивает тело внутри параболоида. Объединяя результаты, мы получим, что тело, ограниченное заданными поверхностями, имеет вид (рис. 4.17).

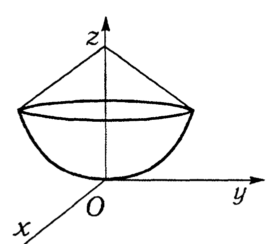


Рис. 4.17

Решая совместно уравнения поверхностей $x^2+y^2=z$ и $x^2+y^2=(z-2)^2$, находим, что $z=1$, то есть поверхности пересекаются по окружности $x^2+y^2=1$ в плоскости $z=1$.

б) Уравнение $x^2+y^2+z^2=25$ задает сферу с центром в начале координат и радиусом равным 5. Неравенство $x^2+y^2+z^2\le 25$ показывает, что ограничивает тело внутри сферы.

Уравнение $x^2+y^2=9$ задает цилиндрическую поверхность с осью Oz и радиусом 3. Неравенство $x^2+y^2\le 9$ показывает, что ограничивает тело внутри цилиндра. Таким образом, тело, ограниченное заданными поверхностями, имеет вид (рис. 4.18).

Очивидно, что линиями пересечения поверхностей будут окружности того же радиуса, что и направляющая цилиндра. Теперь определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности. Для этого из системы уравнений исключим x и y. Подставляя x^2+y^2 в уравнение сферы, получим $z^2=16$, $z=\pm 4$. Следовательно, поверхности пересекаются по окружности в плоскостях $z=\pm 4$.

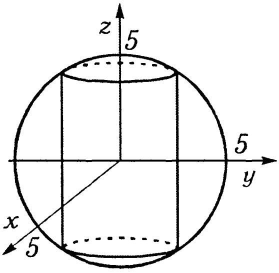


Рис. 4.18

в) Уравнение $x^2+y^2-z^2\ge 9$ задет в пространстве однополостный гиперболоид с осью вращения Oz и радиусом окружности в плоскости Oxy равным 3. Неравенство $x^2+y^2-9\ge z^2$ показывает, что тело находится вне поверхности.

Уравнение $x^2+y^2=16$ задает цилиндрическую поверхность радиуса 4 с осью Oz. Неравенство $x^2+y^2\le 16$ показывает, что тело находится внутри цилиндра. Таким образом, тело находится между однополостным гиперболоидом и цилиндром (рис. 4.19).

Определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности. Исключая x, y из системы уравнений $x^2+y^2-9=z^2$, $x^2+y^2=16$, находим, что $z^2=7$. Отсюда уравнения плоскостей $z=\sqrt{7}$.

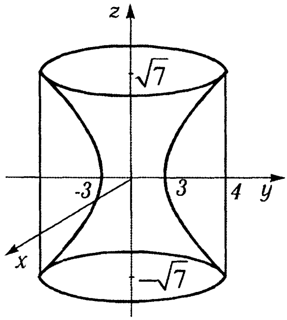


Рис. 4.19

4.7. Параметрические уравнения пространственных кривых

1°. Уравнения вида

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \tag{1}$$

где t — параметр, называются параметрическими уравнениями линии в пространстве.

Исключая из двух любых пар уравнений (1) параметр t, можно получить уравнение линии в виде двух уранений с тремя переменными.

2°. Цилиндрической винтовой линией называется линия, которую описывает точка M, движущаяся по поверхности кругового цилиндра радиуса R, обходя его кругом и одновременно поднимаясь вверх пропорионально углу, описываемому ее проекцией на горизонтальную плоскость (рис. 4.20).

Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид

$$x=R\cos\ t, \quad y=R\sin\ t, \quad z=kt, \quad (k=R\operatorname{tg}\alpha>0). \tag{2}$$

Если $k > 0$, то уравнения (2) называют уравнениями правой винтовой линии, если же $k < 0$ эти уравнения представляют левую винтовую линию.

Когда точка M совершит полный оборот, апликата z точки M увеличится на величину, называемую шагом или ходом винтовой линии, равным $l = 2\pi R \operatorname{tg}\alpha$.

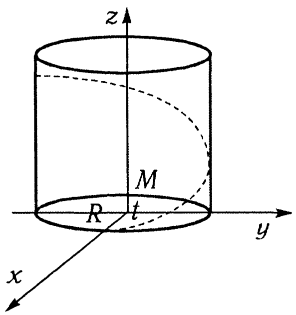


Рис. 4.20.

7.1. Определить линию, заданную уравнениями $x = (t-1)^2$, $y = 3(t+1)$ и $z = -(t+2)$.

Решение. Исключая из второго и третьего уравнения параметр t, получим $y + 3z + 3 = 0$ — уравнение плоскости. Находя из второго t и подставляя в первое уравнение, будем иметь $9x = (y-2)^2$ — параболический цилиндр. Следовательно, мы имеем линию пересечения плоскости с параболическим цилиндром.

7.2. Определить линию, заданную уравнениями: $x = 3\cos t$, $y = 4\cos t$, $z = 5\sin t$.

Решение. Деля первое уравнение на второе, получим $4x - 3y = 0$ — уравнение плоскости.

Возводя в квадрат левые и правые части каждого из трех уравнений и складывая, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ — уравнение сферы. Следовательно, мы имеем линию пересечения плоскости со сферой.

Глава 5
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5.1. Линейные преобразования

Линейное преобразование двух переменных

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' \end{aligned} \tag{1}$$

выражает значения переменных x и y через значения перменных x' *и* y'.

Равенство (1) можно рассматривать как линейное преобразование координат точки (или вектора) на плоскости. Линейное преобразование (1) характеризуется его матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование трех переменных

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned} \tag{2}$$

выражает значения переменных x, y, z через значения переменных x', y', z'.

Равенства (2) можно рассматривать как линейное преобразование координат точки (вектора) в пространстве. Преобразование (2) характеризуется матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Если ввести обозначения $R=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и $R'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, то равенства (2) в матричной форме примут вид

$$R=AR', \tag{3}$$

т. е. каждому линейному преобразованию векторов $\vec{r} = A\vec{r}\,'$ соответствует линейное преобразование координат этих векторов. Поэтому вместо линейных преобразований векторов обычно рассматривают соответствующие преобразования координат.

Если вектор $\vec{x}$ переводится в вектор $\vec{y}$ линейным преобразованием с матрицей A, а вектор $\vec{y}$ переводится в вектор $\vec{z}$ линейным преобразованием с матрицей B, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{z}$. Матрица этого линейного преобразования равна $C = BA$.

1.1. Дано линейное преобразование

$$x = x' - y' + z',$$
$$y = x' + y' - z',$$
$$z = x' + z'$$

и даны точки в системе координат x',y',z': $(1,-1,2)$ и $(2,-3,0)$. **Найти** координаты этих точек в системе x,y,z.

Решение. Подставляя координаты точек в данное линейное преобразование, получим: если $x'=1,\ y'=-1,\ z'=2$, то $x=4$, $y=-2$, $z=3$; если $x'=2,\ y'=-3,\ z'=0$, то $x=5,\ y=-1,\ z=2$.

1.2. У каких точек линейное преобразование

$$x=2x'+3y',$$
$$y=4x'+y'$$

не меняет координат?

Решение. Нужно найти x и y, если $x=x',\ y=y'$. Отсюда: $x=2x+3y,\ y=4x+y$.

Следовательно, $x=x'=0,\ y=y'=0$.

1.3. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+3x_3, \\ y_2=x_1-4x_2+2x_3, \\ y_3=2x_1+x_2+2x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1=3y_1+2y_2-2y_3, \\ z_2=3y_1+4y_2-4y_3, \\ z_3=y_1+y_2-2y_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

Решение. Первое преобразование определяется матрицей A, а второе — матрицей B

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Искомое преобразование является матрицей, определяемой произведением данных матриц

$$C=BA=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -1 & -14 & 9 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое преобразование будет

$$z_1 = x_1 - 4x_2 + 9x_3,$$
$$z_2 = -x_1 - 14x_2 + 9x_3,$$
$$z_1 = -2x_1 - 4x_2 + x_3.$$

1.4. Дано линейное преобразование координат

$$y_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3,$$
$$y_2 = x_1 - 4x_2 + 2x_3,$$
$$y_3 = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3.$$

Требуется **найти** обратное преобрзование.

Решение. Запишем данное линейное преобразование в матричном виде $Y{=}AX$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, матрица A невырожденная и поэтому имеет обратную

$$a^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу a_{ij}.

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}=6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-1.$$

Отсюда

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & -6 & 6\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Умножив обе части исходного преобразования на A^{-1}, получим $A^{-1}Y=A^{-1}AX$. Поскольку $A^{-1}A=E$, где E — единичная матрица, то будем иметь $A^{-1}Y=X$ или $X=A^{-1}Y$. Подставляя сюда матрицу A^{-1}, получим

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

Откуда обратное преобразование

$$\begin{aligned}x_1&= \phantom{\frac{1}{3}y_1} - y_2 + y_3,\\ x_2&=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{6}y_3,\\ x_3&=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{6}y_3.\end{aligned}$$

1.5. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3; \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3; \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3'; \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3'; \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Решение. Первое преобразование определяется матрицей A, а второе матрицей B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомое преобразование является матрицей, определяемой произведением данных матриц

$$C = BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 31 \\ 16 & 3 & 17 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое преобразование будет

$$x_1'' = 18x_1 + 4x_2 + 31x_3;$$
$$x_2'' = 16x_1 + 3x_2 + 17x_3;$$
$$x_3'' = 4x_1 - 3x_2 - 4x_3.$$

5.2. Разложение векторов по базису. Арифметические векторы

1°. *Арифметическим вектором* называется всякая упорядоченная совокупность из n действительных чисел $\vec{x} = x(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ — компоненты арифметического вектора $\vec{x}$.

Система арифметических векторов $\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_r\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1,...,\lambda_r$, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r = 0$, иначе эта система называется *линейно независимой.*

Система векторов $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_r)$ называется *базисом* в произвольном множестве Q арифметических векторов, если она линейно независима и для любого вектора $\vec{x} \in Q$ найдутся числа $\lambda_1,...,\lambda_r$ такие, что

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \vec{e}_k, \tag{1}$$

где $\lambda_1,...,\lambda_r$ — координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

Формула (1) представляет разложение вектора $\vec{x}$ по базису $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_r)$.

2°. Если $B(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ и $B'(\vec{e}_1',...,\vec{e}_n')$ два различных базиса в произвольном n — мерном пространстве, причем каждый из векторов базиса B' разложим по базису $B: \vec{e}_k' = t_{1k}\vec{e}_1 + t_{2k}\vec{e}_2 + ... + t_{nk}\vec{e}_n$, то матрицей перехода T от базиса B к базису B' называется матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой столбцы состоят из координат векторов $\vec{e}'$ в базисе B.

Если $\vec{x}$ — произвольный вектор, а X и X' — столбцы его координат в базисах B и B' соответственно, то зависимость преобразования координат при преобразовании базиса примет вид

$$X' = T^{-1}X. \tag{2}$$

2.1. Выяснить, является ли система арифметических векторов $\vec{x}_1 = (3,1,1)$, $\vec{x}_2 = (1,-1,11)$, $\vec{x}_3 = (1,1,-5)$ линейно зависимой или линейно независимой. **Найти** ее ранг и какой-нибудь базис.

Решение. Составим матрицу X, вектор-столбцами которой будут вектора $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель матрицы равен нулю, а минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ отличен от нуля, то ранг матрицы равен 2 и исходная система арифметических векторов линейно зависима. Принимая минор второго порядка за базисный полагаем, что арифметические векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ образуют искомый базис.

2.2. Показать, что векторы $\vec{a}(2,1,-4)$, $\vec{b}(1,-4,-3)$, $\vec{c}(3,6,-2)$ образуют базис пространства и найти координаты вектора $\vec{d}(1,-4,3)$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу из компонент векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приняв их за столбцы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для определения ранга этой матрицы вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $r = 3$. Так как ранг матрицы равен числу векторов, то они линейно независимы, а в трехмерном пространстве любые три линейно независимых вектора образуют базис.

Обозначив координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, получим векторное уравнение

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_1\vec{c},$$

которое равносильно системе трех уравнений

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, \\ -4 = \lambda_1 - 4\lambda_2 + 6\lambda_3, \\ 3 = -4\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. По формулам Крамера $\Delta = -27$.

$$\lambda_1 = \frac{1}{-27}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad \lambda_2 = \frac{1}{-27}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{-27}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, т. е. $\vec{d} = -4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

2.3. Показать, что векторы $\vec{e}_1(2,4,1)$, $\vec{e}_2(1,3,6)$, $\vec{e}_3(5,3,1)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}(24,20,6)$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу из компонент векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, приняв их за столбцы

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения ранга этой матрицы вычислим определитель

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 74 \neq 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $r = 3$. Поскольку ранг матрицы равен числу векторов, то они линейно независимы, а в трехмерном пространстве любые три линейно независимых вектора образуют базис. Так как определитель матрицы не равен нулю, то для нахождения решения используем формулу (2). Вычисляем алгебраические дополнения матрицы T

$$T_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -15, \quad T_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$T_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 21,$$

$$T_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 29, \quad T_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$T_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -11,$$

$$T_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad T_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$T_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Окончательно решение примет вид

$$X' = T^{-1}X = \frac{1}{74}\begin{pmatrix} -15 & 29 & -12 \\ -1 & -3 & 14 \\ 21 & -11 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, соответственно, равны $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$.

2.4. Показать, что система арифметических векторов $\vec{e}_1 = (1,1,1,1,1)$ $\vec{e}_2 = (0,1,1,1,1)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,1,1)$, $\vec{e}_4 = (0,0,0,1,1)$, $\vec{e}_5 = (0,0,0,0,1)$ образует базис и найти координаты вектора $\vec{x} = (1,0,1,0,1)$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу из компонентов векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_5$, приняв их за столбцы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель этой матрицы равен 1 и не равен нулю, то ранг матрицы $r = 5$. Так как ранг матрицы равен числу векторов, то они линейно независимы и образуют базис.

Обозначив координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_5$ через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ получим векторное уравнение

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4 + \lambda_5\vec{e}_5,$$

которое равносильно системе пяти уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1, \\ 0 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ 0 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5. \end{aligned}$$

Из решения системы находим, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = 1$. Таким образом, координаты вектора $\vec{x}$ будут $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 + \vec{e}_5$.

5.3. Собственные числа и собственные векторы матрицы

1°. *Линейным оператором* в линейном векторном пространстве называется всякое отображение $\vec{A}$ пространства в себя, обладающее свойствами $\vec{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{A}\vec{x} + \vec{A}\vec{y}$ и $\lambda\vec{A}\vec{x} = \vec{A}(\lambda\vec{x})$. Если $\vec{A}$ — линейный оператор и $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — некоторый базис, то разложение векторов $\vec{A}\vec{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ по базису примет вид

$$\vec{A}\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nk}\vec{e}_n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей оператора $\vec{A}$ в базисе B.

Если число λ и вектор $\vec{x}$ удовлетворяют выражению $\vec{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то число λ называется *собственным числом* линейного оператора $\vec{A}$, а вектор $\vec{x}$ — *собственным вектором*, соответствующим собственному числу λ. В матричном виде

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad X \neq 0, \tag{1}$$

где X — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу λ.

Отсюда следует, что для нахождения собственного числа оператора $\vec{A}$ необходимо решить уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

2°. Характеристическое уравнение матрицы третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

где λ — называется *собственным числом* матрицы.

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого уравнения называются *характеристическими или собственными числами матрицы.* Если исходная матрица симметрическая, то корни уравнения (2) вещественны.

Система уравнений

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0, \\ &a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\xi_2+a_{23}\xi_3=0, \\ &a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda)\xi_3=0, \end{aligned} \qquad (3)$$

в которой λ имеет одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и определитель которой равен нулю, определяет тройку чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3, соответствующую данному характеристическому числу. Совокупность этих трех чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяет вектор $\vec{r}=\xi_1\vec{i}+\xi_2\vec{j}+\xi_3\vec{k}$, который называется *собстенным вектором матрицы A.*

3.1. Найти собственные значения и собственные вектора линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или $-(4-\lambda)^2(7+\lambda)+12(7+\lambda)+52(4-\lambda)-180=0$, $\lambda^2(\lambda-1)=0$. Отсюда собственные значения: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$.

Найденное собственное значение линейного преобразования λ_1 подставим в систему уравнений (3)

$$\begin{cases}4\xi_1-5\xi_2+2\xi_3=0,\\ 5\xi_1-7\xi_2+3\xi_3=0,\\ 6\xi_1-9\xi_2+4\xi_3=0.\end{cases}$$

Решая систему уравнений методом Гаусса, находим собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=0$

$$\begin{cases}4\xi_1-5\xi_2+2\xi_3=0,\\ \quad 2\xi_1-\xi_2=0,\\ \quad 2\xi_1-\xi_2=0,\end{cases}\qquad \xi_2=2\xi_1,\quad \xi_3=3\xi_1.$$

Полагаем $\xi_1=\alpha$, тогда $\xi_2=2\alpha$ и $\xi_3=3\alpha$.

Следовательно, $\vec{r}_1=\vec{r}_2=\alpha\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)$, где α — любое отличное от нуля действительное число.

Находим собственный вектор, соответствующий $\lambda_3=1$. Получим систему

$$\begin{cases} 3\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 5\xi_1 - 8\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 6\xi_1 - 9\xi_2 + 3\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, будем иметь

$$\begin{cases} 3\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 = 0, \\ \xi_1 - \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$. Полагаем $\xi_1 = \alpha$, тогда $\xi_2 = \xi_3 = \alpha$ и собственный вектор $\vec{r}_3 = \alpha\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$, где α — произвольный, отличный от нуля множитель.

5.4. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду

Квадратичной формой от двух переменных x_1, x_2 называется однородный многочлен второй степени

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — коэффициенты формы.

Положим $a_{12} = a_{21}$ и запишем квадратичную форму (1) в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

или

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2 \tag{2}$$

где

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2. \end{cases} \tag{3}$$

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определяет выражения (3), а следовательно, и квадратичную форму (2) и называется *матрицей квадратичной формы*. Квадратичная форма имеет канонический вид, если она содержит только члены с квадратами переменных, т. е. если $a_{12}=a_{21}=0$.

Заменим базис. Для этого перейдем от переменных x_1, x_2 к переменным x_1', x_2', которые выражаются через x_1, x_2 линейно.

Квадратичная форма (2) преобразуется к виду

$$\Phi(x_1', x_2') = x_1'y_1' + x_2'y_2', \tag{4}$$

где

$$\begin{cases} a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2' = y_1', \\ a_{21}'x_1' + a_{22}'x_2' = y_2'. \end{cases} \tag{5}$$

Теперь матрица A примет вид $A'=\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}$.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных чисел и собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования примет вид

$$A'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2 — собственные числа.

Выражения (5) примут вид $y_1' = \lambda_1 x_1'$, $y_2' = \lambda_2 x_2'$, а квадратичная форма (4) вид

$$\Phi(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2, \tag{6}$$

который называется *каноническим видом* квадратичной формы.

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду используются при приведении к каноническому виду уравнений кривых второго порядка.

4.1. Используя теорию квадратичных форм, **привести** к каноническому виду уравнение линии второго порядка $5x^2-8xy+5y^2=9$.

Решение. В данном случае матрица старших членов имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad 5-\lambda=\pm 4,\quad \lambda_1=9,\quad \lambda_2=1.$$

Полагая $\lambda_1=9$, для определения соответствующего собственного вектора получим систему уравнений

$$\begin{cases}-4\xi_1+4\xi_2=0,\\ 4\xi_1-4\xi_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $\xi_1=\xi_2$ и $\vec{r}_1=\vec{i}+\vec{j}$. Нормируем вектор $\vec{r}_1$:

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Полагая $\lambda_2=1$, для определения второго собственного вектора получим систему уравнений

$$\begin{cases}4\eta_1+4\eta_2=0,\\ 4\eta_1+4\eta_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $\eta_1=-\eta_2$ и $\vec{r}_2=\vec{i}-\vec{j}$. Нормируя, находим

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональны: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Для построения матрицы преобразования координат используем собственные нормированные ортогональные векторы

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad D_S = -1.$$

Отсюда: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $\quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$. Значения x и y подставим в уравнение кривой

$$5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) +$$

$$+5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 = 9,$$

$$5\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 8\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 5\left(\frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) = 9.$$

Откуда $x'^2 + 9y'^2 = 9$ или $\frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Глава 6
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

6.1. Множества и операции над ними

1°. Для описания совокупности элементов или предметов принято использовать понятие множества. Обычно множества элементов обозначаются прописными буквами A, B, N, ... , а их элементы малыми буквами a, b, n, ...

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и обозначается знаком $\emptyset$. Множество A называется *счетным*, если имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества всех натуральных чисел N.

Если множество содержит конечное число элементов, то можно перечислить эти элементы в фигурных скобках $\{a, b, c\}$. Выражение $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ обозначает *множество натуральных чисел*, а $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ *множество всех целых чисел*. *Множество рациональных чисел* обозначается отношением

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$, где $m, n \in Z$, $n \neq 0$, когда только дробь периодическая. В противном случае числа *иррациональные*. Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных или вещественных чисел* и обозначается через R.

Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов $A = B$. Если множество B содержит множество A, то множество A называется *подмножеством* множества B и обозначается $B \supset A$ или $A \subset B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B и обозначается $A \cap B$.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B и обозначается $A \cup B$.

Пусть множество A принадлежит основному множеству E. Тогда множество элементов основного множества E, не принадлежащих множеству A, называется *дополнением* множества A до множества E и обозначается $\overline{A}$, отсюда $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Для любых подмножеств A и B основного множества E справедливы соотношения: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2°. Пусть A — множество действительных чисел. Множество A называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число a, что для всех чисел $x \in A$ выполняется $x \leq a$. Наименьший элемент множества верхних граней ограниченного сверху множества A называется *точной верхней гранью* и обозначается $sup\ A$. Для множества A, ограниченного снизу, точная нижняя грань множества обозначается $inf\ A$. Множество A называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

1.1. Описать перечислением элементов множество $A=\left\{x\in N\middle|x^2-3x-4\le 0\right\}$.

Решение. Найдем множество значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $x^2-3x-4\le 0$. Так как $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)\le 0$, то $x\in[-1,4]$. Поскольку A есть множество натуральных чисел, то $A=\{1,2,3,4\}$.

6.2. Логическая символика

1°. Логическую символику обычно используют при записи математических объяснений. Рассмотрим несколько наиболее простых символов.

Для обозначения высказываний или утверждений воспользуемся прописными буквами латинского алфавита A,B,C и т. д. Операция отрицания утверждения A обозначается «не A» или $\overline{A}$.

Если высказывание составлено из двух высказываний при помощи союза «или», то оно является суммой этих высказываний (*дизъюнкцией*) и обозначается $A\vee B$ или (A+B). Если же высказывание составлено из высказываний при помощи союза «и», то оно является произведением этих высказываний (*конъюнкцией*) и обозначается $A\wedge B$ или ($A\cdot B$).

Если из высказывания A следует высказывание B, то имеет место *импликация* $A\Rightarrow B$. Если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует A, то имеет место *эквивалентность*, которую обозначают $A\Leftrightarrow B$.

Знак общности $\forall$ употребляется вместо слов любой, каждый. $\forall a\in A$ означает:«для любого элемента $a\in A$». Знак существования $\exists$ употребляется вместо слова существует. $\exists a\in A$ означает:«существует элемент $a\in A$».

2°. Основные свойства:

1. Коммутативность (переместительность)

$$A\wedge B=B\wedge A;\quad A\vee B=B\vee A.$$

2. Ассоциативность (сочетательность)

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C; \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C.$$

3. Дистрибутивность (распределительность)

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2.1. Используя логическую символику, **записать** утверждение:«число a есть точная верхняя грань множества X».

Решение. То, что число a есть точная верхняя грань множества X, записывается $a = sup\ X$ и означает $\forall x \in X\,(x \le a)$, причем для сколь угодно малого ε справедливо условие $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \quad (x > a - \varepsilon)$.

6.3. Понятие о функции

1°. Если каждому значению одной переменной x по некоторому правилу ставится в соответствие определенное значение другой переменной y, то говорят, что между переменными существует функциональная зависимость $y = f(x)$.

Переменную x называют независимой переменной или *аргументом*, а y — *функцией*. Функция может задаваться аналитически, графически и таблично.

Если функция задана уравнением, неразрешенным относительно y, то говорят, что функция задана неявно, и записывают $f(x,y) = 0$.

Если соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную (например t), называемую параметром, то говорят, что функция задана параметрически, и записывают

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Функция может быть задана также различными аналитическими выражениями на разных участках, например функция Дирихле

$$\begin{cases} \chi(x)=1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \chi(x)=0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

или «сигнум x»

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} x=1, & \text{если } x>0; \\ \operatorname{sgn} x=-1, & \text{если } x<0; \\ \operatorname{sgn} 0=0. \end{cases}$$

2°. Если каждому значению у ставится в соответствие одно или несколько значений x, то этим определяется однозначная или многозначная функция $x=\varphi(y)$, которая называется *обратной функцией* для функции $y=f(x)$. Так для функции $y=a^x$ обратной фунукцией будет $x=\log_a y$. В этом случае обратная функция является однозначной. Для функции $y=x^2$ обратная функция будет двухзначной $x=\pm\sqrt{y}$.

Для обратных функций справедливы соотношения:

$$\varphi(f(x))=x; \quad f(\varphi(y))=y.$$

Пусть каждому значению переменной x ставится в соответствие определенное значение переменной $u=\varphi(x)$, а каждому уже определенному знчению u ставится в соответствие определенное значение $y=f(u)$, тогда соответствие между значениями x и y имеет вид $y=f(\varphi(x))$ и определяет y как *сложную функцию* от x, т. е. функцию от функции.

3°. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не меняется, т. е. $f(x)=f(-x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента на противоположный численное значение функции не меняется, а знак функции меняется на противоположный, т. е. $f\,(-x) = -f\,(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется *периодической*, если существует такое число l, называемое периодом функции, что значение функции не меняется при прибавлении или вычитании этого числа к любому значению аргумента, т. е. $f(x) = f(x+l) = f(x+2l) = ... = f(x+kl)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число. График периодической функции повторяется через равные интервалы.

4°. *Областью определения* функции является совокупность всех значений аргумента, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл.

5°. Преобразование графиков при некоторых простейших изменениях функции $y = f\,(x)$:

а) график функции $y = f\,(x - a)$ получается из исходного переносом всех точек на a единиц по оси абсцисс вправо, если a положительно, и влево, если a отрицательно;

б) график функции $y = f\,(x) + b$ получается из исходного переносом всех точек на b единиц по оси ординат вверх, если b положительно, и вниз, если b отрицательно;

в) график функции $y = Af\,(x)$ ($A > 0$) получается из исходного растяжением его вдоль оси ординат в A раз, если $A > 1$, а при $A < 1$ сжатием в $\frac{1}{A}$ раз, если же $A < 0$, то ординаты меняют еще и знак;

г) график функции $y = f\,(kx)$ ($k > 0$) получается из исходного при $k > 1$ уменьшением абсцисс в k раз, а при $k < 1$ увеличением абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз, если же $k < 0$, то абсциссы меняют знак и график функции симметричен относительно оси Oy.

Последовательно выполняя рассмотренные сдвиги и деформации графика исходной фунции, можно получить график и функции более сложного вида $f(x) = Af[k(x-a)]+b$.

3.1. Дана функция $f(x) = 2x^3 - x^2 + \dfrac{x-1}{x+4} - 3$. **Найти** частное значение функции при $x = 1$.

Решение. Чтобы найти частное значение функции при $x = 1$, достаточно это значение аргумента подставить вместо x. Получим

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + \frac{1-1}{1+4} - 3 = -2.$$

3.2. Дана функция $f(x) = x^2 + \log_a x + \sin\dfrac{\pi x}{a}$. **Найти** значение функции при $x = a$.

Решение. Подставляем вместо x ее частное значение

$$f(a) = a^2 + \log_a a + \sin\frac{\pi a}{a} = a^2 + 1.$$

3.3. Функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Требуется записать эту функцию в неявном виде.

Решение. Чтобы записать функцию в неявном виде, следует исключить параметр t. Возводя в квадрат

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = b^2\sin^2 t \end{cases}$$

и преобразуя, получим $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3.4. Построить графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases} x & при \;\; x\le 0; \\ x^2 & при \;\; x>0; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x^2 & при \;\; x<0; \\ 0 & при \;\; 0\le x\le 2; \\ -2x+4 & при \;\; x\ge 2. \end{cases}$

Решение. а) Строим график функции для $x\le 0$ и для $x>0$ (рис. 6.1.).

б) Строим график функции последовательно для участков: x < 0; $0\le x<2$; $x\ge 2$ (рис. 6.2.).

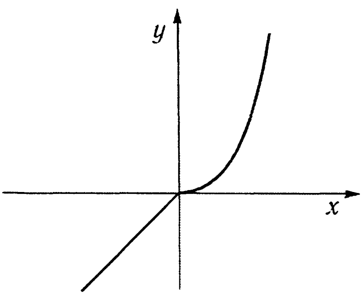


Рис. 6.1

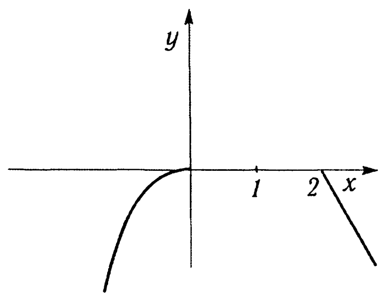


Рис. 6.2

3.5. Найти область определения следующих функций: а) $y=\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$; б) $y=\lg\left(2-\sqrt{1-x}\right)$; в) $y=\arcsin\frac{1}{x-3}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$; д) $y=\sqrt{\lg\sin x}$.

Решение. а)Выражения под знаком радикала должны быть неотрицательны, т. е. $1+x\ge 0$ и $1-\sqrt{1+x}\ge 0$. Отсюда $x\ge -1$ и $\sqrt{1+x}\le 1$; $1+x\le 1$; $x\le 0$. Следовательно, $x\in[-1,0]$.

б) Выражение под знаком логарифма должно быть больше нуля, т. е. $2-\sqrt{1-x}>0$; $\sqrt{1-x}<2$; $1-x<4$; $x>3$ и выражение под знаком квадратного корня $1-x\geq 0$; $x\leq 1$. Поскольку неравенства одновременно не могут быть выполнены, то $x\in\emptyset$.

в) Выражение имеет смысл, когда $-1\leq\dfrac{1}{x-3}\leq 1$ и $x\neq 3$. Отсюда

$$\begin{cases} -x+3\leq 1; \\ \quad 1\leq x-3; \end{cases}$$

или $x\geq 2$; $x\geq 4$. Таким образом $x\in[4,\infty)$.

г) Выражение имеет смысл при $x-1>0$ и $5-x>0$. Решая эту систему неравенств, имеем $x>1$ и $x<5$. Отсюда $x\in(1,5)$.

д) В силу свойств логарифмической и степенной функции имеем следующую систему неравенств: $\sin x>0$ и $\lg\sin x\geq 0$. Решением первого неравенства на периоде 2π является множество: $0\leq x\leq\pi$, которое с учетом периодичности можно записать в виде $2\pi k\leq x\leq\pi(1+2k)$, $\quad k\in z$. Так как $|\sin x|\leq 1$, то второму неравенству удовлетворяет только равенство $\sin x=1$, откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$. Таким образом, область определения функции определяется значениями $x=\dfrac{\pi}{2}(1+4k)$, $\quad k\in z$.

3.6. Путем деформации и сдвига графика исходной функции **построить** графики функций: а) $y=2\sin(3x-2)$; б) $y=1-2\sqrt{x+3}$; в) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$; г) $y=\dfrac{6x-1}{2x+3}$.

Решение. а) За исходную функцию возьмем $y=\sin x$, а данную функцию представим в виде $y=2\sin 3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$. В данном случае $A=2$; $k=3$; $a=\dfrac{2}{3}$.

1. Строим одну волну синусоиды (рис. 6.3.).

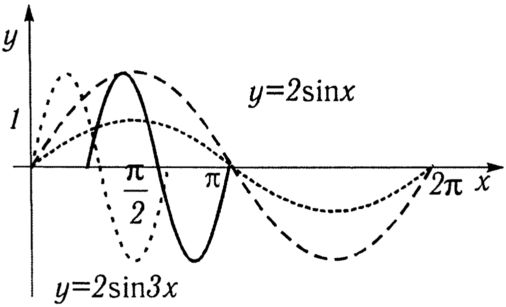


Рис. 6.3

2. Увеличиваем ординаты всех точек в два раза $y = 2\sin x$.

3. Уменьшаем в три раза абсциссы точек графика и строим график функции $y = 2\sin 3x$.

4. Переносим точки графика функции $y = 2\sin 3x$ на $\frac{2}{3}$ вправо по оси абсцисс, получаем график одной волны данной функции.

б) За исходную функцию возьмем $y = \sqrt{x}$. В данном случае $A = -2$; a = –3; b = 1.

1. Строим график функции $y = \sqrt{x}$. (рис. 6.4.).

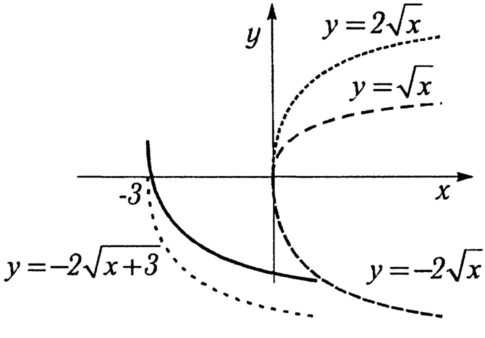


Рис. 6.4

2. Увеличивая ординаты в два раза, строим график функции $y = 2\sqrt{x}$.

3. Меняем знак на противоположный $y = -2\sqrt{x}$. График этой функции симметричен графику $y = 2\sqrt{x}$ относительно оси абсцисс.

4. Переносим точки графика функции $y = -2\sqrt{x}$ на 3 единицы влево по оси абсцисс и строим график функции $y = -2\sqrt{x+3}$.

5. Поднимаем график функции $y = -2\sqrt{x+3}$ на 1 вверх и строим график данной функции.

в) Преобразуем данную функцию к виду $y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2.$

За исходную функцию возьмем $y = x^2$. В данном случае $A = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = -2$.

1. Строим график исходной функции $y = x^2$ (рис. 6.5).

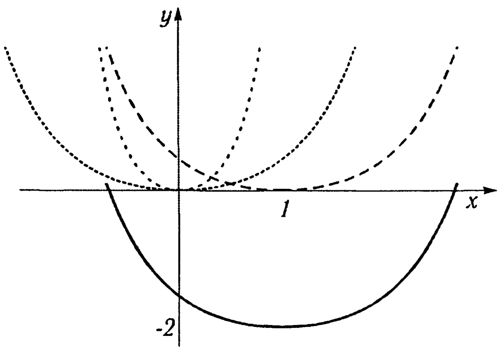


Рис. 6.5

2. Уменьшаем ординаты графика функции в два раза и строим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

3. Сдвигаем по оси абсцисс на 1 единицу вправо точки графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ и строим график функции $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$.

4. Опускаем точки графика функции на 2 единицы вниз и строим график данной функции.

г) Преобразуем функцию к виду $y=3-\frac{10}{2x+3}=3-\frac{5}{x+\frac{3}{2}}$ и устанавливаем переход от функции $y=\frac{1}{x}$ к заданной: $\frac{1}{x}$, $\frac{5}{x}$, $-\frac{5}{x}, -\frac{5}{x+\frac{3}{2}}, 3-\frac{5}{x+\frac{3}{2}}$.

Выполняем следующие последовательные преобразования (рис. 6.6): строим пока только одну ветвь гиперболы; растягиваем по оси Oy в пять раз; заменяем графиком, симметричным относительно оси Ox; строим вторую ветвь гиперболы; делаем горизонтальный сдвиг координатной системы на $\frac{3}{2}$ единицы вправо и вертикальный сдвиг на 3 единицы вниз.

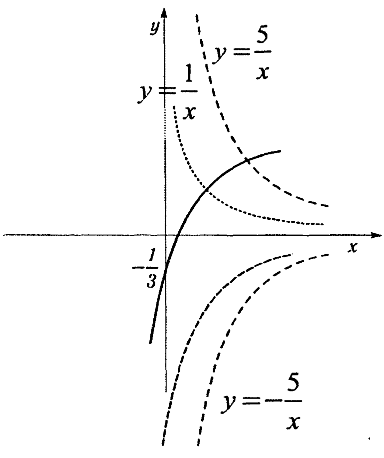


Рис. 6.6

3.7. Показать, что функции $y=\dfrac{4x-9}{2}$ и $x=\dfrac{9+2y}{4}$ являются взаимно обратными.

Решение. Подставим во вторую функцию вместо y его выражение через x, тогда получим $\varphi\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{9+2\dfrac{4x-9}{2}}{4}=x$. Аналогично, подставляя в первую функцию вместо x его выражение через y имеем $f\left(\varphi\left(y\right)\right)=\dfrac{4\dfrac{9+2y}{4}-9}{2}=y$.

6.4. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

1°. Число b называется *пределом функции* $f\left(x\right)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$ как только $\left|x-a\right|<\delta$. Обозначают предел

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=b.$$

Предел функции $f(x)$, если он существует, при стремлении x к a справа обозначают $\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)$.

Аналогично, предел функции при стремлении x к a слева обозначают $\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)$.

2°. *Теоремы о пределах.*

1. Предел постоянной равен самой постоянной.
2. $\lim(u+v)=\lim u+\lim v$.
3. $\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v$.
4. $\lim\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim u}{\lim v}$, если $\lim v\neq 0$.

3°. *Замечательные пределы.*

1. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ x}{x}=1$.

2. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2,718\ldots.$$

4°. Некоторые важные пределы:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a\left(1+\alpha\right)}{\alpha}=\log_a e;\quad \lim_{a\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\ln a;$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\left(1+\alpha\right)^\mu}{\alpha}=\mu;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^k\log_a x=0,\ \left(a>1,k>0\right).$$

5°. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ раскрывается, как правило, делением числителя и знаменателя на множитель, стремящийся к нулю, или с помощью первого замечательного предела.

6°. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ раскрывается делением на x в старшей степени.

7°. Неопределенность вида $\left(\infty-\infty\right)$ и $\left(0\cdot\infty\right)$ раскрывается путем преобразования функции к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

8°. Неопределенность вида (1^∞) раскрывается посредством преобразования предела ко второму замечательному пределу.

9°. Бесконечно малые функции $\alpha\left(x\right)$ и $\beta\left(x\right)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=1$. При раскрытии неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ можно пользоваться следующим правилом.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если их под знаком предела заменить на эквивалентные. Обозначая эквивалентность бесконечно малых следующим образом $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$, запишем наиболее известные

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a,$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad 1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x), \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x), \quad \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}.$$

4.1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}x-1}$.

Решение. а) Разложим на множители числитель и знаменатель

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)}.$$

Сокращая на $x-2$, будем иметь $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x+8} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4.$

б) Разлагаем числитель и знаменатель на множители

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{(2x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x+4}{2x-1} = \frac{-3}{3} = -1.$$

в) Поскольку при $x = 1$ многочлены в числителе и знаменателе обращаются в ноль, то их можно разложить на множители, причем одним из сомножителей будет $(x-1)$. Тогда, деля многочлены на $(x-1)$ получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+2x-3)}{(x-1)(x^2+5x-2)} = \frac{0}{4} = 0.$$

г) Выполнив очевидные преобразования, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$.

Решение. а) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{6}.$$

б) Умножаем числитель и знаменатель на выражения сопряженные числителю и знаменателю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+1}=\sqrt{2}.$$

в) Делаем замену $t^6=x$, тогда при $x\to 1$ $t\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

г) Умножаем числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

4.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\operatorname{tg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{8\sin^3\frac{\pi}{4}}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 5x}$.

Решение. а) Умножим и разделим знаменатель на 4 и подведем выражение под знаком предела к первому замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{4\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

б) Представим тангенс через синус и косинус и воспользуемся теоремами о пределах

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos^2\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

в) По формулам половинных углов имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x=2.$$

г) Умножим и разделим числитель на 4 в кубе

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^3\left(\frac{x}{4}\right)^3}{8\sin^3\frac{x}{4}}=8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{\sin^3\frac{x}{4}}=8.$$

д) Сделаем замену $x-2=t$, тогда при $x\to 2$ $\quad t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1.$$

е) На основании второй теоремы о пределах имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{7}{6}.$$

ж) Преобразуем числитель с помощью формул разности косинусов двух углов и синуса двойного угла

$$\cos x-\cos 3x=2\sin 2x\sin x=4\sin^2 x\cos x,$$

тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x=4\lim_{x\to 0}\cos x=4.$$

з) Умножим числитель и знаменатель на x, тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 5x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2\cos^2 5x}{25\sin^2 5x}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\frac{3}{25}.$$

4.4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^5-5x+1}{6x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^3+4x^5}{4x^2+x^6}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{4n^4+3}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^n}{1+2^{n+1}}$; е) $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{10^n-1}{1+10^{n+1}}$.

Решение. а) Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^3}-2}=-\frac{3}{2},$$

т.к. величины $\dfrac{2}{x^4},\dfrac{1}{x^3},\dfrac{1}{x^2}$ есть величины при $x\to\infty$ бесконечно малые.

б) Здесь можно разделить числитель и знаменатель на x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{6}=\infty.$$

в) Деля числитель и знаменатель на x^6, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x}}{\dfrac{4}{x^4}+1}=\frac{0}{1}=0.$$

г) Здесь числитель есть сумма арифметической прогрессии. Находя в числителе сумму арифметической прогрессии, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1+n}{2}n}{\sqrt{4n^4+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2\sqrt{4n^4+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+1}{2\sqrt{4+\dfrac{3}{n^4}}}=\frac{1}{4}.$$

д) Делим числитель и знаменатель на 2^{n+1}

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^{n+1}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

е) При $n\to-\infty$ 10^n и 10^{n+1} стремятся к нулю и неопределенности в пределе нет

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{10^n-1}{1+10^{n+1}}=\frac{0-1}{1+0}=-1.$$

4.5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

Решение. а) Приведем к общему знаменателю $\lim\limits_{n\to1}\frac{1-2(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{n\to1}\frac{-2x-1}{x^2-1}$. При $x\to1$ знаменатель стремится к нулю, следовательно, дробь является бесконечно большой величиной и стремится к ∞.

б) Умножим и делим на сопряженное выражение

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x-1}}=0.$$

в) Раскрываем тангенс и приводим к общему знаменателю

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin x-1)}{1-\sin^2 x}=-\lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}=-\frac{1}{2}.$$

4.6. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\operatorname{tg}3^{-n}$.

Решение. а) Делаем замену $x = 1 - \alpha$, тогда при $x \to 1$ $\alpha \to 0$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1-\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}\alpha = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\sin \frac{\pi}{2}\alpha} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin \frac{\pi}{2}\alpha} \lim_{\alpha \to 0} \cos \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

б) Полагая $3^n = \frac{1}{x}$, получим

$$\lim_{n \to \infty} 3^n \operatorname{tg} 3^{-n} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1.$$

4.7. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+2} \right)^{2+3x^2}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{2x} \right)^{3-2x}$.

Решение. а) Разделим почленно числитель на x

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{5x} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right]^{20}.$$

Если сделать замену $x = 4t$, то при $x \to \infty$ $t \to \infty$ и

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right]^{20} = \lim_{t \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^{t} \right]^{20} = e^{20}.$$

б) Выделим целую часть и почленно разделим числитель на знаменатель

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{1+3x}.$$

Сделаем замену $x+1=t$. Тогда при $x\to\infty$ $t\to\infty$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t-2}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}=e^{3},$$

т.к. второй предел неопределенности не представляет и равен единице.

в) Выделим в скобках целую часть

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+3}{x^2+2}\right)^{2+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+2}\right)^{2+3x^2}.$$

Сделаем замену $x^2+2=3t$. Тогда при $x\to\infty$ $t\to\infty$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{9t-4}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{9}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-4}=e^{9}.$$

г) Представим предел в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}\right]^{3-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3-2x}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}.$$

В первом пределе сделаем замену $-\frac{1}{x}=t$. Тогда при $x\to\infty$ $t\to 0$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{2}{t}+3}\right]\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{2^3}=e^2\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{8}=\infty.$$

4.8. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^2}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{3x}-1}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$.

Решение. а) Сделаем замену $5x=t$. При $x\to 0$ $t\to 0$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{10}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{10}=e^{10}.$$

б) Сделаем преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^2}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=2\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=2\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2\ln e=2.$$

в) Полагая $e^{-x}-1=t$, получим, что при $x\to 0$ $t\to 0$. Преобразуем замену $e^{x}=\dfrac{1}{t+1}$, $x=\ln\dfrac{1}{t+1}$.

Таким образом,

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)^{-1}}=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}}=-1.$$

г) Полагая $a^{3x}-1=t$, получим, что при $x\to 0$ $t\to 0$. Преобразуем замену

$$a^{3x}=t+1;\quad 3x\ln a=\ln(t+1);\quad x=\frac{\ln(t+1)}{3\ln a}.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to 0}\frac{3t\ln a}{\ln(t+1)}=3\ln a\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=3\ln a.$$

Решение этого примера можно найти и более простым путем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{a^{3x}-1}{3x}=3\ln a.$$

д) Делаем замену $\operatorname{tg}^2 x=t$. При $x\to 0$ $t\to 0$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right]^2=e^2.$$

е) Делаем замену $\sin 2x=1+t$. При $x\to\frac{\pi}{4}$ $t\to 0$. Представим

$$\operatorname{tg}^2 2x=\frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{(1+t)^2}{1-(1+t)^2}=-\frac{(1+t)^2}{t(2+t)}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-\frac{(1+t)^2}{2+t}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

ж) Сделаем следующие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 2x-\sin x}-1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 2x-\sin x}-1\right)(\sin 2x-\sin x)}{x(\sin 2x-\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

з) Воспользовавшись свойствами логарифмов, имеем

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln x-\ln(x+2))=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-x}=$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x} = \ln \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{-2} = \ln e^{-2} = -2.$$

4.9. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Неопределенность вида 0^0. Обозначая функцию под знаком предела за y и логарифмируя, будем иметь

$$\ln y = \sin x \ln x = \frac{\sin x}{x} x \ln x.$$

Отсюда, на основании пункта 4, имеем

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0} x\ln x = 0,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = 1$.

б) Неопределеность вида ∞^0. Обозначая функцию под знаком предела за y и логарифмируя, будем иметь $\ln y = \frac{1}{x}\ln\ln x$.

Отсюда на основании пункта **4°** имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\frac{\ln x}{x} = 0,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

4.10. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x^3}-1\right)\sin 3x}{\ln\left(1-3x^2\right)\left(1-\cos 2x\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)\operatorname{arctg} 3x}{\left(e^{\operatorname{tg} x}-1\right)\operatorname{arctg} 2x}$.

Решение. а) Так как при $x \to 0$, $2x^3 \to 0$, $3x \to 0$, $-3x^2 \to 0$, и $2x \to 0$, то имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Заменяя исходные бесконечно малые эквивалентными, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x^3}-1\right)\sin 3x}{\ln\left(1-3x^2\right)\left(1-\cos 2x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\cdot 3x}{-3x^2\cdot\frac{1}{2}(2x)^2}=-1.$$

б) При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Заменяем исходные бесконечно малые эквивалентными и упрощаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x-1}\right)\operatorname{arctg} 3x}{\left(e^{\operatorname{tg} x}-1\right)\arcsin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x\cdot 3x}{\operatorname{tg} x\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\cos x=\frac{3}{4}.$$

6.5. Непрерывность и точки разрыва функции

1°. Если аргумент функции получает приращение $\Delta x = x_2 - x_1$, то значение функции при новом значении аргумента равно $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$. Отсюда приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, т. е. приращение функции равно разности наращенного значения функции (при наращенном значении аргумента) и начального значения функции.

Приращение аргумента может быть не только положительным, но и отрицательным числом.

2°. Определение непрерывности функции:

1. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если пределы слева и справа равны и равны значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

2. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если она определена в этой точке и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ вблизи точки a.

Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3°. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает любое промежуточное значение между ее наименьшим m и наибольшим M значением, то есть $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$. Отсюда следует, что если в граничных точках отрезка $[a,b]$ функция имеет разные знаки, то внутри отрезка есть по крайней мере одно такое значение $x=c$, при котором функция обращается в ноль. Это свойство непрерывности функций позволяет находить приближенно корни многочленов.

4°. Значения аргумента, которые не удовлетворяют условиям непрерывности, называются точками разрыва функции. При этом различают два рода точек разрыва функции.

Если при $x\to a$ слева функция имеет конечный предел k_1, а при $x\to a$ справа функция имеет конечный предел k_2 и $k_1\ne k_2$, то говорят, что функция при $x=a$ имеет *разрыв первого рода.* Разность $|k_1-k_2|$ определяет скачок функции в точке $x=a$. Значение функции при $x=a$ при этом может быть равно какому угодно числу k_3.

Если значение функции при $x=a$ равно k_1, то говорят, что функция непрерывна слева; если же k_2, то говорят, что функция непрерывна справа.

Если $k_1=k_2\ne k_3$, то говорят, что функция имеет в точке a *устранимый разрыв.*

Если при $x\to a$ справа или слева, предел функции не существует или равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то говорят, что при $x=a$ функция имеет *разрыв второго рода.*

5.1. Найти приращение функции $y=2x^3-3x+1$, если аргумент x изменился от $x_1=1$ до $x_2=2$.

Решение. Найдем приращение аргумента $\Delta x=x_2-x_1=2-1=1$. Вычислим исходное значение функции $y(x_1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1+1=0$. Вычислим новое значение функции $y(x_1+\Delta x)=y(1+1)=2\cdot 2^3-3\cdot 2+1=11$.

Отсюда приращение функции $\Delta y=y(x_1+\Delta x)-y(x_1)=11$.

5.2. Найти приращение функции $y=3x^2-2x+4$ и вычислить его при $x=2$ и $\Delta x=-0{,}1$.

Решение. Новому значению аргумента $x+\Delta x$ соответствует новое значение функции $y(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+4$.

Приращение функции равно $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=$ $=3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+4-3x^2-2x-4=(3\Delta x+6x-2)\Delta x$.

При $x=2$ и $\Delta x=-0{,}1$ получим $\Delta y=(-0{,}3+12-2)(-0{,}1)=0{,}97$.

5.3. Найти множество значений x, при которых функция $y=x^3-2x$ непрерывна.

Решение. Найдем приращение функции

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)-\left(x^3-2x\right)=\Delta x\left(\Delta x^2+3x\Delta x+3x^2-2\right).$$

При любых значениях x приращение $\Delta y\to 0$, если только $\Delta x\to 0$, поэтому функция непрерывна при всех действительных значениях x.

5.4. Доказать непрерывность функции $y=\dfrac{1}{x-1}$ в точке $x=3$.

Решение. Для доказательства найдем приращение функции y при переходе значения аргумента от $x=3$ к $x=3+\Delta x$

$$\Delta y=\frac{1}{3+\Delta x-1}-\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}=\frac{2-2-\Delta x}{2(2+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}.$$

Найдем предел приращения функции при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2(2+\Delta x)}=0.$$

Так как предел приращения функции при $\Delta x\to 0$ равен нулю, то функция при $x=3$ непрерывна.

5.5. Найти хотя бы один корень уравнения $3x^3+2x^2-x-1=0$.

Решение. Найдем точку пресечения графика функции $y=3x^3+2x^2-x-1=0$ с осью Ox, то есть точку, в которой $y=0$. Подберем две произвольные точки, в которых функция имеет разные знаки. Пусть $x=0$, тогда $y=-1$, $y<0$. При $x=1$, $y=3+2-1-1=3$, $y>0$. Значит корень находится между $x=0$ и $x=1$ (в силу свойства непрерывности).

Определим знак функции в середине промежутка $[0,1]$, т. е. при $x=0{,}5$.

Находим $y=3\cdot 0{,}5^3+2\cdot 0{,}5^2-0{,}5-1=-0{,}625$; $y<0$. Значит корень находится между $x=0{,}5$ и $x=1$.

Определим знак функции в середине этого промежутка, т. е. при $x=\frac{3}{4}$. Находим $y=3\left(\frac{3}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}-1=\frac{41}{64}$.

Следовательно, корень находится внутри промежутка $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$. Находим знак функции в середине этого промежутка, т. е. при $x=\frac{5}{8}$, $y=3\left(\frac{5}{8}\right)^3+2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2-\frac{5}{8}-1=\frac{213}{192}=\frac{71}{64}>0.$

Значит корень находится внутри промежутка $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$.

Можно уже считать, что $x\simeq\frac{9}{16}$. Если требуется большая точность, то указанный процесс приближений может быть продолжен дальше.

5.6. Определить характер разрыва функций: а) $y=\dfrac{1}{x-1}$ при $x = 1$; б) $y=\dfrac{x}{|x|}$ при $x = 0$; в) $y=\begin{cases}2x & при \quad x\neq 2\\ 1 & при \quad x=2;\end{cases}$

г) $y=a^{\frac{1}{x}}$ $(a>1)$; д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ и построить графики.

Решение. а) При $x = 1$ функция не определена: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 6.7).

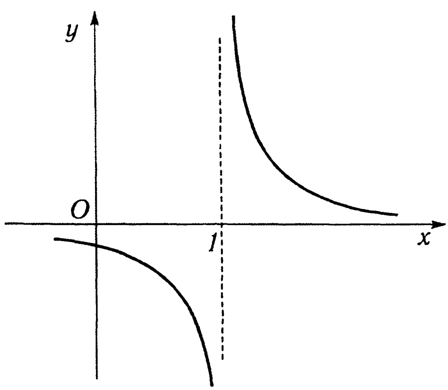


Рис. 6.7

б) При $x < 0$ предел равен $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{|x|}=-1=k_1$.. При $x > 0$ предел равен $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{|x|}=1=k_2$.. Следовательно, при $x = 0$ функция имеет разрыв первого рода и скачок функции равен $|k_1-k_2|=|-1-1|=2$ (рис. 6.8).

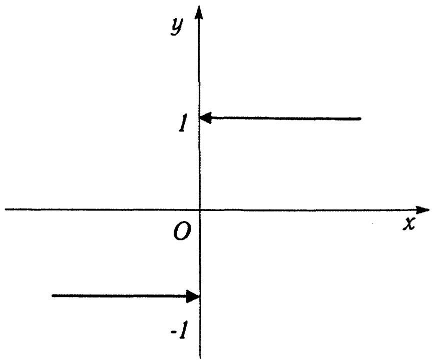


Рис. 6.8

в) Функция определена на всей числовой оси, неэлементарная, так как в точке $x = 2$ аналитическое выражение функции меняется.

Исследуем непрерывность функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} 2x = 4, \quad \lim_{x\to 2+0} 2x = 4, \quad y(2) = 1, \quad k_1 = k_2 \neq k_3.$$

Очевидно, что в точке $x = 2$ функция имеет устранимый разрыв (рис. 6.9).

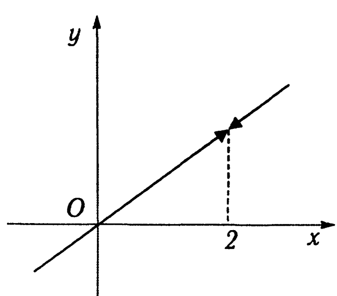


Рис. 6.9

г) Найдем пределы:

$$y(+0) = \lim_{x\to +0} a^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad y(-0) = \lim_{x\to -0} a^{\frac{1}{x}} = 0.$$

В точке $x = 0$ справа функция имеет разрыв второго рода, а слева — непрерывность (рис. 6.10).

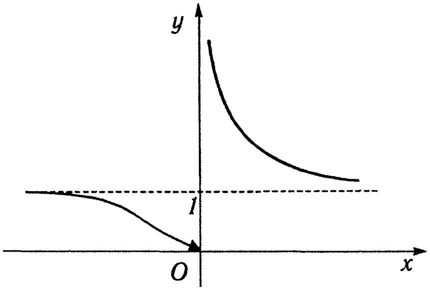


Рис. 6.10

д) Найдем пределы:

$$y(+0) = \lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad y(-0) = \lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

В точке $x = 0$ с обеих сторон скачки (рис. 6.11).

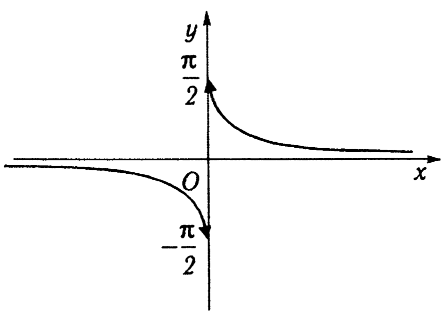


Рис. 6.11

5.7. Дана функция $y = \dfrac{1}{x^2+4x-5}$ и три значения аргумента $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Выяснить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x? Сделать чертеж.

Решение. Исследуем непрерывность функции в точке $x_1=-5$:

$$\lim_{x\to -5-0}\frac{1}{x^2+4x-5}=-1,\quad \lim_{x\to -5+0}\frac{1}{x^2+4x-5}=-\infty..$$

Следовательно, при $x=-5$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 6.12).

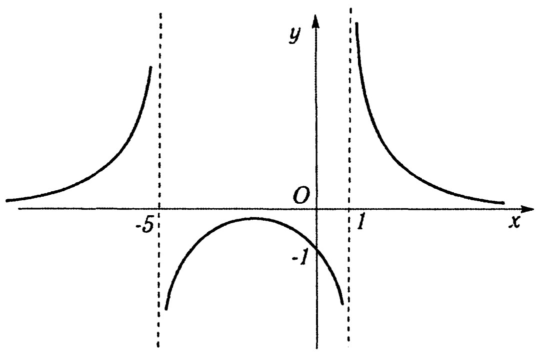


Рис. 6.12

При $x = 0$ пределы слева и справа равны:

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2+4x-5}=-1,\quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2+4x-5}=-1,\quad y(0)=-1,$$

следовательно, функция в этой точке непрерывна.

Исследуем непрерывность функции в точке $x_3=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x^2+4x-5}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2+4x-5}=\infty.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 6.12). Точки $x = 1$ и $x = -5$ являются вертикальными асимптотами.

5.8. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и сделать чертеж:

а) $y=\begin{cases} x^2, & x\le 1; \\ 1, & 1<x\le 3; \\ -x+5, & x>3; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 2^x, & x\le -1; \\ x+1, & -1<x\le 0; \\ \cos x, & x>0. \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} 3, & x=0 \text{ и } x=\pm 3; \\ 9-x^2, & 0<|x|\le 3; \\ 9, & |x|>3, \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} 2x-1, & x<0; \\ \dfrac{1}{x-1}, & x\ge 0. \end{cases}$

Решение. а) Функция неэлементарная, так как задана тремя аналитическими выражениями на различных промежутках изменения аргумента, определена на всем множестве действительных чисел.

Исследуем непрерывность функции в точках $x = 1$ и $x = 3$

$$y(1)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1;\quad y(3)=1;\quad \lim_{x\to 3+0}(-x+5)=2=k.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ функция непрерывна, а в точке $x = 3$ терпит разрыв первого рода (рис. 6.13.) и имеет скачок, равный $|y(3)-k|=|1-2|=1$.

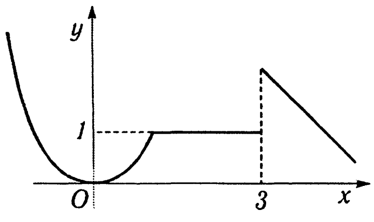


Рис. 6.13

б) Функция определена на всем множестве чисел и неэлементарная. Исследуем непрерывность функции в точках $x = -1$ и $x = 0$:

$$y(-1)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to -1+0}(x+1)=0;\quad y(0)=1;\quad \lim_{x\to +0}\cos x=1.$$

Таким образом, функция в точке $x = -1$ имеет разрыв первого рода, а в точке $x = 0$ непрерывна (рис. 6.14).

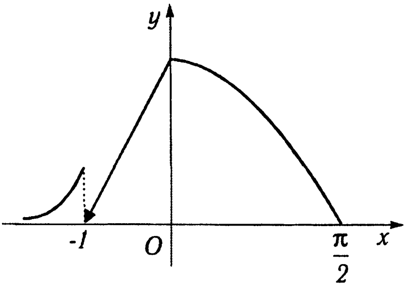


Рис. 6.14

в) Функция определена на всей числовой оси, неэлементарная. Исследуем непрерывность функции в точках $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$:

$$y(-3)=3, \quad \lim_{x\to-3+0}\left(9-x^2\right)=0; \quad y(-3-0)=9;$$

$$y(0)=3, \quad \lim_{x\to-0}\left(9-x^2\right)=9; \quad \lim_{x\to+0} y\left(9-x^2\right)=9;$$

$$y(3)=3, \quad \lim_{x\to3-0}\left(9-x^2\right)=0; \quad y(3+0)=9.$$

Таким образом, функция в точках $x = -3$ и $x = 3$ имеет разрывы первого рода, а в точке $x = 0$ устранимый разрыв (рис. 6.15).

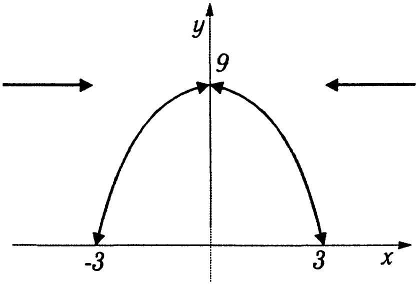


Рис. 6.15

г) Функция неэлементарная и определена везде кроме точки $x = 1$. Исследуем непрерывность функции в точках $x = 0$ и $x = 1$:

$$\lim_{x\to -0}(2x-1) = -1, \quad y(0) = -1, \quad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x-1} = \infty.$$

Таким образом, функция в точке $x = 0$ непрерывна, а в точке $x = 1$ имеет разрыв второго рода (рис. 6.16).

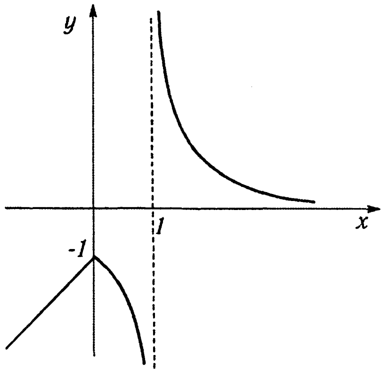


Рис. 6.16.

5.9. Найти точки разрыва функции и построить график в окрестности точек разрыва: а) $f(x) = \dfrac{2|x+1|}{x^2 - x - 2}$; б) $f(x) = 3^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Решение. а) Приравнивая знаменатель к нулю, находим корни и преобразуем выражение

$$f(x) = \frac{2|x+1|}{x^2 - x - 2} = \frac{2|x+1|}{(x+1)(x-2)}.$$

Функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 2$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Находим односторонние пределы для точки $x = -1$:

1. При $x \to -1-0$ $\quad x+1 < 0$ и, следовательно, $|x+1| = -(x+1)$. Отсюда

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)2}{(x+1)(x-2)}=-2\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x-2}=\frac{2}{3}.$$

2. При $x\to-1+0$ $x+1>0$, значит $|x+1|=x+1$ и

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=2\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x-2}=-\frac{2}{3}.$$

Поскольку оба предела конечны и не равны, то точка $x=-1$ — точка разрыва первого рода. Находим скачок функции (рис. 6.17) $\delta=f(-1+0)-f(-1-0)=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}.$

В окрестности точки $x=2$ $x+1>0$, следовательно, $|x+1|=x+1$ и односторонние пределы будут

$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0}\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=2\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=2\lim_{x\to2+0}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

Таким образом, точка $x=2$ — точка разрыва второго рода.

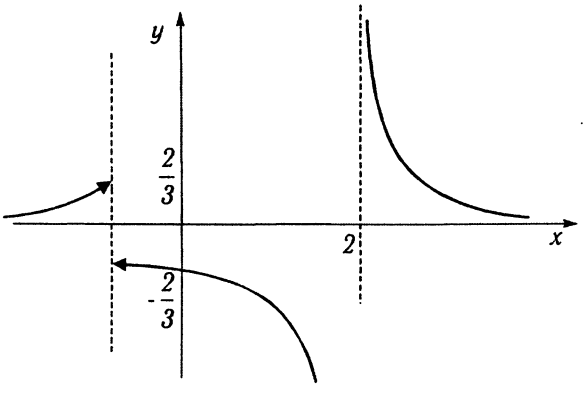


Рис. 6.17

б) Данная показательная функция не определена в точках $x=-1$ и $x=1$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Найдем односторонние пределы, учитывая, что $a>1$, то есть $a^t \to +\infty$ при $t \to= +\infty$ и $a^t \to 0$ при $t \to -\infty$.

1. Для точки $x=-1$ при $x \to -1-0$, $x^2-1>0$, $\dfrac{x}{x^2-1}<0$ и $\dfrac{x}{x^2-1} \to -\infty$. Отсюда $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=0$.

При $x \to -1+0$, $x^2-1<0$, $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ и $\dfrac{x}{x^2-1} \to= \infty$.

Следовательно, $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=+\infty$.

Таким образом, точка $x=-1$ — точка разрыва второго рода.

2. Рассмотрим точку $x=1$. Находим пределы

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=0, \quad f(1+0)=\lim_{x\to1+0} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=+\infty.$$

Функция в точке $x=1$ имеет также разрыв второго рода.

Найдем теперь пределы при $x \to \pm\infty$

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=1$, $f(\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{x}{x^2-1}}=1$. График функции показан на рис. 6.18.

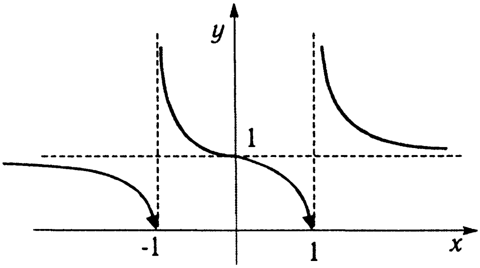


Рис. 6.18.

Глава 7
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Вычисление производных

1°. *Производной* от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция называется *дифференцируемой* в точке x_0.

Производная обычно обозначается y' или y'_x, или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$. Нахождение производной называется *дифференцированием функции.*

Частное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'\big|_{x=a}$.

Геометрически производная $y'(x_0)$ функции $y = f(x)$ представляет угловой коэфициент $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0)$ касательной к графику этой функции в точке x_0 (рис. 7.1).

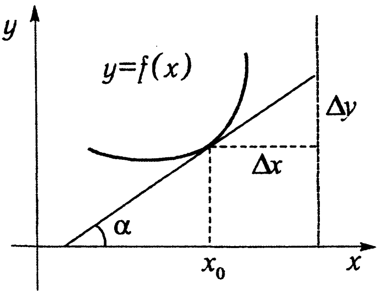


Рис. 7.1

Числа $f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и $f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ называются соответственно *левой и правой производными* функции $y=f(x)$ в точке x_0. Для существования производной функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и были равны между собой: $f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)$.

Если существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=M$, то такова же будет и производная в точке x_0 справа (слева).

Если в точке x_0 производная не определена, но функция имеет различные односторонние пределы $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, то в этой точке графика функции существуют две различные с соответствующими угловыми коэффициентами k_1, k_2, односторонние касательные, составляющие угол (рис. 7.2.), а точка называется *угловой*.

Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y(x_1)}{\Delta x}=\pm\infty$, то есть функция имеет бесконечную производную, то она не дифференцируема в этой точке. В этом случае график функции имеет вертикальную касательную (*точка перегиба*).

Если в точке x_2 функция имеет бесконечные односторонние производные разных знаков, то график функции имеет две слившиеся вертикальные касательные (точка возврата с вертикальной касательной (рис. 7.2)).

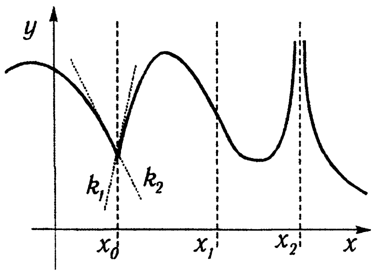


Рис. 7.2

2°. Основные правила дифференцирования:

1. $(Cu)' = Cu'$; 2. $(u+v)' = u' + v'$;

3. $(uv)' = u'v + v'u$; 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

где u, v — некоторые функции от x, а C — постоянная величина.

3°. Таблица производных основных функций:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2. $y = C,\ y' = 0$;

3. $(\sin x)' = \cos x$; 4. $(\cos x)' = -\sin x$;

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7. $(a^x)' = a^x \ln a$; $a > 0$; 8. $(e^x)' = e^x$;

9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $a \neq 1$; $a > 0$; 10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Гиперболический синус, косинус, тангенс и котангенс определяются выражениями

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

и обладают свойствами:

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;

3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; 4. $\operatorname{sh} 0 = 0$; $\operatorname{ch} 0 = 1$.

5°. Производная от сложной функции $y = f(u)$, где $u = u(x)$, равна произведению производной от этой функции по промежуточному аргументу u на производную от промежуточного аргумента u по независимой переменной x, т. е.

$$y' = f'_u u'_x.$$

1.1. Пользуясь только определением производной, **найти** производные от функций:

а) $y = x^2 - 3x + 5$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. а) Находим приращение функции

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 5 - x^2 + 3x - 5 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 5 - x^2 + 3x - 5 = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x.$$

По определению производной имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3.$$

б) Приращение функции равно: $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

в) Находим приращение функции

$$\Delta y = \operatorname{tg}(2x+2\Delta x) - \operatorname{tg} 2x =$$

$$= \frac{\sin(2x+2\Delta x)\cos 2x - \sin 2x \cos(2x+2\Delta x)}{\cos(2x+2\Delta x)\cos 2x} = \frac{\sin(2\Delta x)}{\cos(2x+2\Delta x)\cos 2x}.$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(2\Delta x)}{\Delta x \cos(2x+2\Delta x)\cos 2x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\cos(2x+2\Delta x)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}.$$

1.2. Найти производные функций: а) $y = |x|$, ($x \neq 0$); б) $y = |2x-3|$; в) $y = e^{2|x|}$ г) $y = |x+1| + |x-1|$.

Решение. а) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} x, & x > 0; \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Следует заметить, что функция $y = |x|$ не имеет производной в точке x_0, так как $f'_{-}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, а $f'_{+}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

б) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} 2x - 3, & x > \dfrac{3}{2}; \\ -2x + 3, & x < \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 2, & x > \dfrac{3}{2}; \\ -2, & x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

в) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} e^{2x}, & x > 0; \\ e^{-2x}, & x < 0. \end{cases}$$

В этом случае производная будет

$$y' = \begin{cases} 2e^{2x}, & x > 0; \\ -2e^{-2x}, & x < 0. \end{cases}$$

г) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} 2x, & x > 1; \\ 2, & -1 < x < 1; \\ -2x, & x < -1, \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 2, & x > 1; \\ 0, & -1 < x < 1; \\ -2, & x < -1. \end{cases}$$

1.3. Найти производные $y'_-(x_0)$, $y'_+(x_0)$ для функций:

а) $y=\begin{cases} x, & x \le 1; \\ -x^2+2x, & x>1, \end{cases}$ $x_0=1;$

б) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0=0$; в) $y=|2-x|+|2+x|$, $x_0=\pm 2$.

Решение. а) Находим производную

$$y'=\begin{cases} 1, & x \le 1; \\ -2x+2, & x>1. \end{cases}$$

и вычислим пределы производной слева и справа в точке $x_0=1$:

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1-0} 1=1, \quad y'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}(-2x+2)=0.$$

б) Находим производную

$$y'=\frac{x}{e^{x^2}\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

и вычислим пределы производной слева и справа в точке $x_0=0$:

$$y'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}\sqrt{e^{x^2}-1}}=-1, \quad y'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}\sqrt{e^{x^2}-1}}=1.$$

Касательные к кривой в точке $x_0=0$ показаны на рис. 7.3.

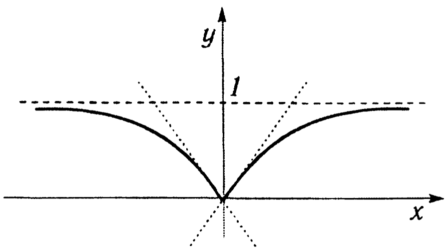


Рис. 7.3

в) Представим заданную функцию в виде

$$y=\begin{cases}-2x, & x\in]-\infty,-2];\\ 4, & x\in]-2,2];\\ 2x, & x\in]2,\infty[\end{cases}$$

и найдем производную

$$y'=\begin{cases}-2, & x\in]-\infty,-2];\\ 0, & x\in]-2,2];\\ 2, & x\in]2,\infty[.\end{cases}$$

1.4. Найти производные: а) $y=\frac{x^3}{2}-\frac{3}{x^2}+4\sqrt{x}-5$;

б) $y=x^3\cos x$; в) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$; г) $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1$, **вычислить** $f'(0), f'(1), f'(-1)$.

Решение. а) Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования. Пользуясь основными правилами дифференцирования и таблицей производных, имеем

$$y=\frac{1}{2}x^3-3x^{-2}+4x^{\frac{1}{2}}-5,$$

$$y'=\frac{3}{2}x^2+6x^{-3}+2x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

б) Здесь имеет место случай произведения двух функций, поэтому

$$y'=\left(x^3\right)'\cos x+x^3\left(\cos x\right)'=3x^2\cos x-x^3\sin x.$$

в) Поскольку имеет место частное двух функций, то

$$y'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

г) Находим производную $f'(x)=x^2-2x$ и вычисляем ее значения в точках $x=0$, $x=1$, $x=-1$, т. е. находим частные значения производной в этих точках:

$$f'(0)=0,\ f'(1)=-1,\ f'(-1)=3.$$

1.5. Найти производные: а) $y=\ln\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}$;

б) $y=\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $y=\log_2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 2x}$; г) $y=\ln^3\cos\frac{x}{3}$.

Решение. а) Упростим логарифмируемое выражение

$$y=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2=2\ln\frac{x-2}{x+2}.$$

Полагая $y=2\ln u$, где $u=\frac{x-2}{x+2}$, применяем правило дифференцирования сложной функции

$$y'=2(\ln u)'_u\cdot u'_x=2\frac{x+2}{x-2}\frac{(x-2)'(x+2)-(x-2)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{8}{x^2-4}.$$

б) Полагая $y=\ln u$, где $u=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$, имеем

$$y'=(\ln u)'_u\cdot u'_x=\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{1-x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{3}{2}\frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

в) Упростим логарифмируемое выражение $y=\log_2\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}2x=\frac{2}{3}\log_2\operatorname{tg}2x$. Дифференцируем как сложную функцию

$$y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\operatorname{tg}2x\cdot\ln 2}\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=\frac{8}{3}\frac{1}{\sin 4x\ln 2}.$$

г) Дифференцируем как сложную функцию

$$y'=3\ln^2\cos\frac{x}{3}\frac{1}{\cos\frac{x}{3}}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3}=-\operatorname{tg}\frac{x}{3}\ln^2\cos\frac{x}{3}.$$

1.6. Найти производные: а) $z=xe^{\frac{x}{a}}+ae^{-\frac{x}{a}}$;

б) $y=e^{-3x}(\sin 3x+\cos 3x)$; в) $z=\ln\sqrt{\frac{1-2^x}{1+2^x}}$; г) $y=e^{\sin^3 x}+5^{\sqrt[5]{x}}$.

Решение. а) Дифференцируем как сумму сложных функций

$$z'=e^{\frac{x}{a}}+xe^{\frac{x}{a}}\frac{1}{a}+ae^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)=e^{\frac{x}{a}}\left(1+\frac{x}{a}\right)-e^{-\frac{x}{a}}.$$

б) Дифференцируем как произведение сложных функций

$$y'=e^{-3x}(-3)(\sin 3x+\cos 3x)+e^{-3x}(\cos 3x\cdot 3+(-\sin 3x)3)=$$

$$=-6e^{-3x}\sin 3x.$$

в) Упростим функцию $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-2^x}{1+2^x}$. Находим производную как от сложной функции

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2^x}{1-2^x}-\frac{2^x\ln 2(1+2^x)+(1-2^x)2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}=\frac{2^x\ln 2}{2^{2x}-1}.$$

г) Дифференцируем как сумму сложных функций

$$y'=e^{\sin^3 x}\cdot 3\sin^2 x\cos x+5^{\sqrt[5]{x}}\ln 5\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=$$

$$=3e^{\sin^3 x}\sin^2 x\cos x+5^{\sqrt[5]{x}-1}x^{-\frac{4}{5}}\ln 5.$$

1.7. Найти производные: а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $u=\arcsin\sqrt{1-4t}$; в) $r=\arccos\dfrac{2-3\varphi}{4}$; г) $y=3\operatorname{arctg}e^{-\frac{x}{3}}$.

Решение. а) Находим производную как от сложной функции

$$y'=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

б) Производная равна

$$u'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-4t)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-4)}{\sqrt{1-4t}}=-\frac{1}{\sqrt{t(1-4t)}}.$$

в) Производная равна

$$r'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2-3\varphi}{4}\right)^2}}\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{4+4\varphi-3\varphi^2}}.$$

г) Производная равна

$$y'=3\frac{-(1)}{1+e^{-\frac{2x}{3}}}e^{-\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{1+e^{-\frac{2x}{3}}}.$$

1.8. Найти производные: а) $y=\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}$; б) $y=\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x$.

Решение. а) Дифференцируем как сумму

$$y'=2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\operatorname{sh}x.$$

б) Дифференцируя как сумму и пользуясь свойствами гиперболических функций, имеем

$$y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}=-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}.$$

1.9. Найти производные:

а) $y=\begin{cases} x^2, & x<0; \\ \ln\left(1+x^2\right), & x\geq 0, \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} xe^{-x}, & |x|\leq 0; \\ \dfrac{1}{e}, & |x|>0, \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} 2-x, & -1<x<2; \\ x^2-5x+6, & 2\leq x\leq 3; \\ x-3, & 3<x<4, \end{cases}$

построить график функции и производной.

Решение. а) Поскольку функция на разных участках имеет различный вид, то для этих участков

$$y'=\begin{cases} 2x, & x<0; \\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x\geq 0. \end{cases}$$

б) Находим производную на разных участках

$$y'=\begin{cases} e^{-x}(1-x), & |x|\leq 0; \\ 0, & |x|>0. \end{cases}$$

в) Находим производную на разных участках

$$y=\begin{cases} -1, & -1<x<2; \\ 2x-5, & 2\leq x\leq 3; \\ 1, & 3<x<4. \end{cases}$$

Строим график функции и график производной (рис. 7.4).

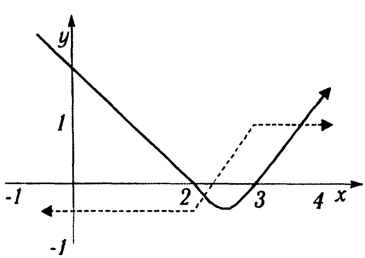


Рис. 7.4

1.10. Найти производные: а) $y=|\sin x|$; б) $y=|\operatorname{arctg} x|$.

Решение. а) График функции $y=|\sin x|$ показан на рис. 7.5. Если $x\in(\pi k,\pi(k+1))$, то данную функцию можно записать в виде $y=\sin(x-\pi k)$. Отсюда производная $y'=\cos(x-\pi k)$.

Если $x=\pi k$, то $y'_-(\pi k)=\lim\limits_{x\to\pi(k+1)-0}\cos(x-\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=\lim\limits_{x\to\pi k+0}\cos(x-\pi k)=1$.

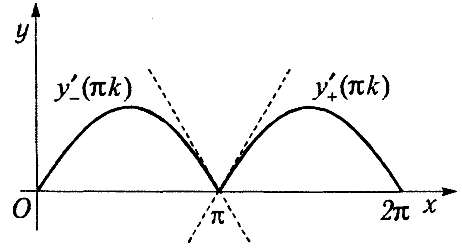


Рис. 7.5

б) Представим график функции $y=|\operatorname{arctg} x|$ на рис. 7.6 и запишем функцию в виде

$$y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\ge 0;\\ -\operatorname{arctg} x, & x<0.\end{cases}$$

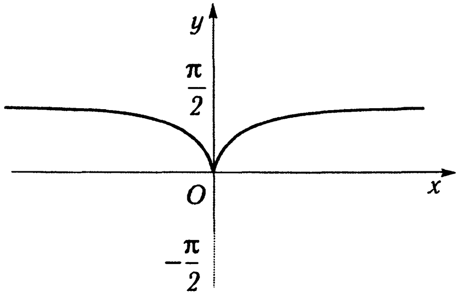


Рис. 7.6

Производная для различных участков будет

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \ge 0; \\ -\frac{1}{1+x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Производная слева $y'_-(0) = \lim\limits_{x \to -0}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -1$; справа $y'_+(0) = \lim\limits_{x \to +0}\frac{1}{1+x^2} = 1$.

1.11. Найти производные функций, обратных к заданным: а) $y = \operatorname{sh} x$; б) $y = \operatorname{ch} x$; в) $y = \operatorname{th} x$; г) $y = \operatorname{cth} x$.

Решение. а) По правилу дифференцирования обратной функции получим

$$(\operatorname{Arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

отсюда, переходя к обычным обозначениям, имеем $(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

б) По правилам дифференцирования обратной функции имеем

$$(\operatorname{Arch} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}},$$

откуда $(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(|x| > 1)$.

в) Производная обратной функции равна

$$(\operatorname{Arth} y)' = \frac{1}{y'_x} = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1-y^2},$$

откуда $(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $(|x| < 1)$.

г) Производная обратной функции равна

$$(\operatorname{Arcth} y)' = \frac{1}{y'_x} = -\operatorname{sh}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} = -\frac{1}{y^2-1},$$

откуда $(\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}, \quad (|x|>1).$

1.12. Пользуясь результатами предыдущего примера, **найти** производные: а) $y = \operatorname{Arch} \ln x$; б) $y = \operatorname{Arcth} \frac{2x}{x^2+1}$.

Решение. а) По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\ln^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}.$$

б) Функция сложная, поэтому

$$y' = -\frac{1}{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

7.2. Производные функций, не являющихся явно заданными

1°. Пусть функция y задана уравнением $f(x,y) = 0$, не разрешенным относительно y, то есть y есть неявная функция от x.

Чтобы найти производную от неявной функции y аргумента x дифференцируем по x обе части этого равенства, считая y функцией x. Из полученного равенства определяем искомую производную y', которая, как правило, будет зависеть от x и y

$$y' = \varphi(x, y).$$

2°. Если функциональная зависимость между переменными x и y задана параметрически

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

то производная от y по x равна $y'_x=\frac{y'_x}{x'_t}$, а от x по y: $x'_y=\frac{x'_y}{y'_t}$.

3°. *Логарифмическое диференцирование.* Если $y=u^v$, то

$$y'=vu^{v-1}u'+u^v v'\ln u,$$

т. е. производная показательно-степенной функции состоит из двух слагаемых: первое получается, если рассматривать функцию при дифференцировании как степенную, второе как показательную.

4°. Если основание логарифма $\log_v u$ является некоторой функцией x, то при нахождении производной целесообразно перейти к натуральным логарифмам

$$y=\log_v u=\frac{\ln u}{\ln v},\quad u=u(x),\quad v=v(x).$$

2.1. Найти производные y'_x: а) $y=\cos(x+y)$;
б) $e^y+4xy-x^2=1$; и производные x'_y: в) $x\ln y-y\ln x=1$;
г) $x^2y^2-4\ln y=2\ln x$.

Решение. а) Дифференцируем обе части по x, считая y сложной функцией, зависящей от x

$$y'=-\sin(x+y)(1+y')=-\sin(x+y)-y'\sin(x+y).$$

Откуда $y'(1+\sin(x+y))=-\sin(x+y)$ или

$$y'=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

б) Дифференцируя обе части равенства по x, получим

$$e^y y'+4(y+xy')-2x=0.$$

Разрешая равенство относительно y', получим

$$y' = \frac{2(x-2y)}{e^y + 4x}.$$

в) Дифференцируем обе части равенства по y, считая x сложной функцией, зависящей от y

$$x' \ln y + \frac{x}{y} - \left(\ln x + y\frac{1}{x}x' \right) = 0.$$

Разрешая равенство относительно x', получим

$$x' = \frac{\ln x - \dfrac{x}{y}}{\ln y - \dfrac{y}{x}}.$$

г) Дифференцируем обе части равенства по y

$$2xx'y^2 + 2x^2y - \frac{4}{y} = 2\frac{1}{x}x'.$$

Отсюда $$x' = \frac{\dfrac{2}{y} - x^2y}{xy^2 - \dfrac{1}{x}} = \frac{x(2-x^2y^2)}{y(x^2y^2-1)}.$$

2.2. Найти производные y'_x:

а) $\begin{cases} x = \cos^{3/2} t; \\ y = \sin^{3/2} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{\cos 2t}; \\ y = \ln \sin t; \end{cases}$

и производные x'_y:

в) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\sqrt{t}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}; \\ y = \ln\cos\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$

Решение. а) Находим $\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{2}\cos^{1/2}t\sin t$ и $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\sin^{1/2}t\cos t$. Отсюда

$$y'_x=\frac{\frac{3}{2}\sin^{1/2}t\cos t}{-\frac{3}{2}\cos^{1/2}t\sin t}=-\sqrt{\operatorname{ctg}t}.$$

б) Находим $\frac{dx}{dt}=-2e^{\cos 2t}\sin 2t$ и $\frac{dy}{dt}=\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{ctg}t.$

Отсюда $y'_x=-\frac{1}{4e^{\cos 2t}\sin^2 t}$.

в) Находим

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}=\frac{t^2+2t}{(1+t)^2} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+t}=\frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(1+t)^2}{2\sqrt{t}(1+t)t(t+2)}=\frac{1+t}{2t^{3/2}(t+2)}.$$

г) Находим $\frac{dy}{d\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и $\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

Отсюда $x'_y=-\frac{2}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=-\frac{2}{\sin\varphi}$.

2.3. Найти производные: а) $y=x^{x^2}$; б) $y=x^{\sin 2x}$;

в) $y=\frac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{(x-3)^3}$; г) $y=x^2e^{x^3}\sin 3x\operatorname{th}x$.

Решение. а) Прологарифмируем правую и левую часть $\ln y = x^2 \ln x$. Найдем производные от правой и левой части по x, считая y сложной функцией, зависящей от x

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x}.$$

Отсюда $y' = (2\ln x + 1)x^{x^2+1}$.

б) Логарифмируя правую и левую часть, имеем $\ln y = \sin 2x \ln x$. Откуда

$$\frac{y'}{y} = 2\cos 2x\ln x + \frac{\sin 2x}{x}, \quad y' = x^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\ln x + \frac{\sin 2x}{x}\right).$$

в) Логарифмируя правую и левую часть, имеем

$$\ln y = 2\ln(x-1) + \frac{1}{3}\ln(x+2) - 3\ln(x-3).$$

Отсюда $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{3(x+2)} - \dfrac{3}{x-3}$ или

$$y' = \frac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{(x-3)^3}\left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{3(x+2)} - \frac{3}{x-3}\right).$$

г) Логарифмируем правую и левую часть

$$\ln y = 2\ln x + x^3 + \ln\sin 3x + \ln \operatorname{th} x.$$

Берем производные

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + 3x^2 + \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} + \frac{1}{\operatorname{th} x}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Откуда

$$y = x^2e^{x^3}\sin 3x \operatorname{th} x\left(\frac{2}{x} + 3x^2 3\operatorname{ctg} 3x + \frac{2}{\operatorname{sh} 2x}\right).$$

2.4. Найти производные функций: а) $y=\log_x e$; б) $y=\log_{\cos x}\sin x$; в) $y=\log_{x^3} x^x$.

Решение. а) Перейдем к натуральному логарифму $y=\dfrac{1}{\ln x}$, тогда $y'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

б) Представим функцию в виде $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$, тогда

$$y'=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\ln\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}\ln\sin x}{\ln^2\cos x}=\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}.$$

в) Перейдем к натуральному логарифму $y=\dfrac{x\ln x}{3\ln x}=\dfrac{x}{3}$, отсюда $y'=\dfrac{1}{3}$.

7.3. Производные высших порядков

1°. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную y', которая является некоторой функцией от x.

Производной второго порядка называется производная от первой производной и обозначается y'' или $f''(x)$, или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная от второй производной называется третьей производной от функции $f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$, или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Аналогично определяются производные четвертого, пятого и более старших порядков, так $y^{(n)}$ — производная n-го порядка.

2°. Вторая производная от неявной функции $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ находится дифференцированием функции $y'=\varphi(x,y)$ по переменной x, учитывая при этом, что y есть функция от x.

3°. Вторая производная от функции y по x, заданной параметрически, равна

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}.$$

В последнем выражении точки означают дифференцирование по t.

Третья производная $y'''_{xxx} = \dfrac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}$ и т. д.

4°. Производную n-го порядка от произведения двух функций удобнее находить по формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + nu'v^{(n-1)} + nv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

5°. Приведем некоторые общие формулы для производных любого порядка

1. $y = x^\alpha$; $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Если $\alpha = -1$, то $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. Если $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, то $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2x)^n \sqrt{x}}$.

2. $y = (a+bx)^\alpha \quad (a, b - const)$;

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)b^n (a+bx)^{\alpha-n}.$$

а) $\left(\dfrac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$;

б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}.$

3. $y=\ln x;\quad y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

4. $y=a^x;\quad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n;\ (e^x)^{(n)}=e^x.$

5. $y=\sin x;\quad y^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$

6. $y=\cos x;\quad y^{(n)}=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$

7. $y=\dfrac{1}{x^2-a^2};\quad y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{2a}\left[\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}\right].$

8. $y=e^{ax}\sin bx;\quad y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi),$

где $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

9. $y=\operatorname{arctg}x;\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right),$

где $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}-y.$

3.1. Для данных функций **найти** производные указанного порядка: а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x},\ y''$?, б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a},\ y'''$?; в) $s=\sin^2\varphi,\ s^{(4)}$?; г) $y=\ln x,\ y^{(n)}$?; д) $y=e^{-x}\sin x,\ y^{(4)}$?

Решение. а) Находим первую производную

$$y'=\frac{\frac{1}{2}\frac{2x\cdot x}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Вторую производную находим диференцированием y' по x

$$(y')'_x=y''=\frac{-2x\sqrt{x^2-1}-x^2\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^4\left(x^2-1\right)}=\frac{2-3x^2}{x^3\left(x^2-1\right)^{3/2}}.$$

б) Находим первую производную

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Дифференцируя y' по x, находим вторую производную

$$y''=\frac{-2ax}{\left(a^2+x^2\right)^2}.$$

Дифференцируя еще раз по x, находим третью производную

$$y'''=-2a\frac{\left(a^2+x^2\right)^2-2x\left(a^2+x^2\right)2x}{\left(a^2+x^2\right)^4}=\frac{2a\left(3x^2-a^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^3}.$$

в) Для нахождения четвертой производной дифференцируем последовательно четыре раза по φ

$$s'=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi;\qquad s''=2\cos 2\varphi;$$

$$s'''=-4\sin 2\varphi;\qquad s^{(4)}=-8\cos 2\varphi.$$

г) Для нахождения n-й производной дифференцируем последовательно заданную функцию до тех пор, пока не выявим общую закономерность нахождения последующей производной

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1};\quad y''=-1\cdot x^{-2};\quad y'''=1\cdot 2x^{-3};\quad y^{(4)}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}\ \text{и т. д.}$$

Отсюда $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$. (См. 3. пункт 5°).

д) Поскольку функция y представляет произведение двух функций $u=e^{-x}$; $v=\sin x$, то применяя формулу Лейбница

$$y^{(4)}=(uv)^{(4)}=u^{(4)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{(4)} \quad (4),$$

получим

$$y^{(4)}=e^{-x}\sin x-4e^{-x}\cos x-6e^{-x}\sin x+4e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x.$$

3.2. Найти производные указанного порядка: а) $e^y+xy=e$; y''?; б) $y=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}$; y''?; в) $y^3=x^3+3xy$; x''?; г) $\cos(xy)=x^2$; x''?; д) $x^3+y^3=1$; y'''?; е) $x=\operatorname{tg}(x+y)$; x'''?

Решение. а) Дифференцируем правую и левую часть по x

$$e^y y'+y+xy'=0,$$

откуда $y'=-\dfrac{y}{e^y+x}$.

Дифференцируем еще один раз по x

$$y''=-\frac{y'(e^y+x)-y(e^y y'+1)}{(e^y+x)^2}.$$

Подставляя в последнее выражение значение y', получим

$$y''=\frac{\dfrac{y}{e^y+x}(e^y+x)+y\left(-e^y\dfrac{y}{e^y+x}+1\right)}{(e^y+x)^2}=$$

$$=\frac{2y-\dfrac{y^2e^y}{e^y+x}}{(e^y+x)^2}=\frac{2y(e^y+x)+y^2e^y}{(e^y+x)^3}.$$

б) Дифференцируем обе части по x

$$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}}\frac{y'}{2}$$

откуда $y' = \dfrac{\sqrt{4+y^2}}{\sqrt{4+y^2}-1}$.

Дифференцируем еще раз по x

$$y'' = \frac{\frac{2yy'}{2\sqrt{4+y^2}}\left(\sqrt{4+y^2}-1\right) - \sqrt{4+y^2}\,\frac{1}{2}\frac{2yy'}{\sqrt{4+y^2}}}{\left(\sqrt{4+y^2}-1\right)^2} = -\frac{y}{\left(\sqrt{4+y^2}-1\right)^3}.$$

в) Дифференцируем правую и левую часть по y

$$3y^2 = 3x^2x' + 3(x'y + x), \quad x' = \frac{y^2 - x}{x^2 + y}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x'' = \frac{(2y - x')(x^2 + y) - (y^2 - x)(2xx' + 1)}{(x^2 + y)^2}.$$

Подставляя в последнее выражение x', получим

$$x'' = \frac{2y(x^2+y) - (y^2 - x) - \frac{(y^2-x)^2 2x}{x^2+y} - (y^2 - x)}{(x^2+y)^2} =$$

$$= \frac{2y(x^2+y)^2 - 2(y^2-x)(x^2+y) - 2(y^2-x)^2 x}{(x^2+y)^3}.$$

г) Дифференцируем обе части по y

$$-\sin(xy)(x'y + x) = 2xx', \quad \text{откуда} \quad x' = -\frac{x\sin(xy)}{2x + y\sin(xy)}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x'' = \left(-\left(\left(x'\sin(xy) + x\cos(xy)(x'y + x)\right)(2x + y\sin(xy)\right) -$$

$$-x\sin(xy)\left(2x' + \sin(xy) + y\cos(xy)(x'y + x)\right)\right)\Big/\left(\left(2x + y\sin(xy)\right)^2\right).$$

д) Дифференцируем обе части по x

$$3x^2 + 3y^2y' = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Дифференцируем еще раз по x

$$y'' = -2\frac{x}{y}\frac{y - xy'}{y^2} = -2\frac{xy + x^2\dfrac{x^2}{y^2}}{y^3} = -2\frac{xy^3 + x^4}{y^5}.$$

Для нахождения y''' дифференцируем еще один раз по x

$$y''' = -2\frac{\left(y^3 + xy^2y' + 4x^3\right)y^5 - 5\left(xy^3 + x^4\right)y^4y'}{y^{10}} =$$

$$= -2\frac{\left(y^3 + 3x^3\right)y^3 + 5\left(y^3 + x^3\right)x^3}{y^8} = -2\frac{y^6 + 8x^3y^3 + 5x^6}{y^8}.$$

е) Дифференцируем обе части по y

$$x' = \frac{x' + 1}{\cos^2(x + y)}, \quad \text{откуда}$$

$$x' = \frac{1}{\cos^2(x + y)}\frac{\cos^2(x + y)}{\cos^2(x + y) - 1} = -\frac{1}{\sin^2(x + y)}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x'' = 2\frac{\cos(x + y)(x' + 1)}{\sin^3(x + y)} = -2\frac{\cos^3(x + y)}{\sin^5(x + y)}.$$

Дифференцируя еще раз по y, окончательно получим

$$x''' = -2(-3\cos^2(x + y)\sin^6(x + y)(x' + 1) - \cos^3(x + y)\cdot$$

$$\cdot 5\sin^4(x+y)\cos(x+y)(x'+1))/\left(\sin^{10}(x+y)\right)=$$

$$=-2\frac{\left(3\sin^2(x+y)+5\cos^2(x+y)\right)\cos^4(x+y)}{\sin^8(x+y)}=$$

$$=-2\left(\left(3+2\cos^2(x+y)\right)\cos^4(x+y)\right)/\sin^8(x+y).$$

3.3. Найти производные указанных порядков:

а) $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=t^2+1, \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$? б) $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=\sin 2t, \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$?

в) $\begin{cases} x=\cos^2\frac{\varphi}{2}, \\ y=\sin^2\frac{\varphi}{2}, \end{cases}$ $\frac{d^2x}{dy^2}$? г) $\begin{cases} x=2^{t-1}, \\ y=\frac{1}{4}\left(t^2+1\right), \end{cases}$ $\frac{d^2x}{dy^2}$?

д) $\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi, \end{cases}$ $\frac{d^3y}{dx^3}$? е) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln t, \end{cases}$ $\frac{d^3x}{dy^3}$?

Решение. а) Найдем первую производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{2t}{\ln t+1}.$$

Вторую производную находим по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{2(\ln t+1)-2t\frac{1}{t}}{(\ln t+1)^2}}{\ln t+1}=\frac{2\ln t}{(\ln t+1)^3}.$$

б) Первая производная равна

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{2\cos 2t}{-2\sin t+2\sin 2t}=\frac{\cos 2t}{\sin 2t-\sin t}.$$

Вторую производную находим по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=$$

$$=\frac{-4\sin 2t\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)-\left(-2\cos t+4\cos 2t\right)2\cos 2t}{\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^3}=$$

$$=\frac{2\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t-2}{2\left(\sin 2t-\sin t\right)^3}.$$

в) Находим первую производную

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x'_\varphi}{y'_\varphi}=\frac{-2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-1.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\left(x'_y\right)'_\varphi}{y'_\varphi}=\frac{0}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}=0.$$

г) Первая производная

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2^{t-1}\ln 2}{\frac{1}{4}\cdot 2t}=\frac{2^t\ln 2}{t}.$$

Вторая производная будет

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{y'_t}=\frac{\frac{2^t\ln^2 2\cdot t-2^t\ln 2}{t^2}}{\frac{t}{2}}=2\frac{2^t\ln 2\left(t\ln 2-1\right)}{t^3}.$$

д) Находим первую производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{a\cos\varphi}{-a\sin\varphi}=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y'_x\right)'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\dfrac{1}{\sin^2\varphi}}{-a\sin\varphi}=-\frac{1}{a\sin^3\varphi}.$$

Третью производную находим по формуле

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_\varphi}{x'\varphi}=\frac{\dfrac{-3\sin^2\varphi\cos\varphi}{a\sin^6\varphi}}{-a\sin\varphi}=-\frac{3\cos\varphi}{a^2\sin^5\varphi}.$$

е) Находим первую производную

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\left(x'_y\right)'_t}{y'_t}=\frac{\dfrac{\sqrt{1-t^2}-t\dfrac{1}{2}\dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{t}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}.$$

Третью производную находим по формуле

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{\left(x''_{yy}\right)'_t}{y'_t}=\frac{\dfrac{\left(1-t^2\right)^{3/2}+t\dfrac{3}{2}\left(1-t^2\right)^{1/2}2t}{\left(1-t^2\right)^3}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{\left(1+2t^2\right)t}{\left(1-t^2\right)^{7/2}}.$$

3.4. Найти производные указанных порядков:

а) $y=x\ \cos x;\ y^{(50)}$? б) $y=\left(x^3-x^2+1\right)e^x,\ y^{(30)}$?

в) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3},\ y^{(20)}$? г) $y=e^{3x}\sin 4x,\ y^{(10)}$?

д) $y=\ln(2x+1)$, $y^{(40)}$? е) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-x+6}$, $y^{(n)}(0)$?

Решение. а) Положим $u=x^2$, $v=\cos x$. Тогда $u'=2x$, $u''=2$, $u'''=u^{(4)}=\ldots=0$, $v^{(n)}=\cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$.

По формуле Лейбница все слагаемые, кроме трех последних, равны нулю, поэтому получаем

$$y^{(50)}=\frac{1}{2}50\cdot 49\cos\left(x+48\frac{\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cos\left(x+49\frac{\pi}{2}\right)+x^2\cos\left(x+50\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(1225-x^2\right)\cos x-100x\sin x.$$

б) Положим $u=e^x$, $v=x^3-x^2+1$. Тогда $v'=3x^2-2x$, $v''=6x-2$, $v'''=6$, $v^{(4)}=v^{(5)}=\ldots=0$, $u^{(n)}=e^x$. По формуле Лейбница все слагаемые, кроме четырех первых, равны нулю. Таким образом,

$$y^{(30)}=e^x\left(x^3-x^2+1\right)+30e^x\left(3x^2-2x\right)+\frac{30\cdot 29}{2}e^x(6x-2)+$$

$$+\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3!}e^x\cdot 6=e^x\left(x^3+89x^2+2550x+23481\right).$$

в) Преобразуем выражение к виду

$$y=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

то

$$y^{(20)}=\frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^{20}20!}{(x-3)^{21}}-\frac{(-1)^{20}20!}{(x+1)^{21}}\right)=\frac{20!}{4}\left(\frac{1}{(x-3)^{21}}-\frac{1}{(x+1)^{21}}\right).$$

г) Полагая в формуле (8) $a=3$, $b=4$, будем иметь $y^{(10)}=(3^2+4^2)^{\frac{10}{2}}e^{3x}\sin(4x+10\varphi)$, где $\sin\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}$, или $y^{(10)}=5^{10}e^{3x}\sin\left(4x+10\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.

д) Находим первую производную $y'=\dfrac{2}{x+1}$. Рассматривая первую производную как функцию от x, находим $(n-1)$ производную по формуле (2,а; пункт 5°)

$$\left(\frac{2}{1+2x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(1+2x)^n}.$$

Таким образом,

$$y^{(40)}=\frac{(-1)^{39}39!2^{39}}{(1+2x)^{39}}=-39!\left(\frac{2}{1+2x}\right)^{39}.$$

е) Запишем выражение в виде $y(x)(x^2-x+6)=2x+3$ и, применяя формулу Лейбница, продифференцируем n раз. При $n\geq 2$ будем иметь

$$y^{(n)}(x^2-x+6)+ny^{(n-1)}(2x-1)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}\cdot 2=0,$$

откуда при $x=0$ получим

$$6y^{(n)}(0)-ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0$$

или $y^{(n)}(0)=\dfrac{n}{6}y^{(n-1)}(0)-\dfrac{n(n-1)}{6}y^{(n-2)}(0)$.

Полученная рекурентная формула, позволяет определить n-ю производную в точке $x=0$ $(n\geq 2)$. Значения $y(0)$ и $y'(0)$ находятся непосредственно

$$y(0)=\frac{1}{2}, \qquad y'(0)=\left.\frac{-2x^2-6x+15}{\left(x^2-x+6\right)^2}\right|_{x=0}=\frac{15}{36}.$$

Полагая последовательно $n = 2,3,4,\ldots$, с помощью рекурентной формулы находим значения искомых производных. Так

$$y''(0)=\frac{2}{6}y'(0)-\frac{2\cdot 1}{6}y(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{15}{36}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{36},$$

$$y'''(0)=\frac{3}{6}y''(0)-\frac{3\cdot 2}{6}y'(0)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{36}-\frac{2\cdot 15}{36}\right)=-\frac{31}{72}.$$

7.4. Дифференциал функции

1°. Из определения производной $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ и предела переменной следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$ или $\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. приращение функции можно разбить на две части.

Произведение $y'\Delta x$ есть бесконечно малая первого порядка относительно Δx. Произведение же $\alpha\Delta x$ есть величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, т.к. $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

Первое слагаемое приращения функции называется *главной частью приращения*. Произведение $y'\Delta x$ называется *дифференциалом функции* и обозначается dy. Дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, т. е. $dx \simeq \Delta x$.

Итак, если функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x, то дифференциал функции равен произведению производной $f'(x)$ на дифференциал независимой переменной, т. е.

$$dy = f'(x)dx. \tag{1}$$

2°. *Правила дифференцирования*:

1. $d(Cu) = Cdu$; 2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3. $d(uv) = udv + vdu$; 4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

3°. *Геометрический смысл дифференциала*. Дифференциал функции геометрически определяется разностью ординат касательной к кривой при переходе от точки с абсциссой x_0 к точке с абсциссой $x_0 + \Delta x$ (рис. 7.7).

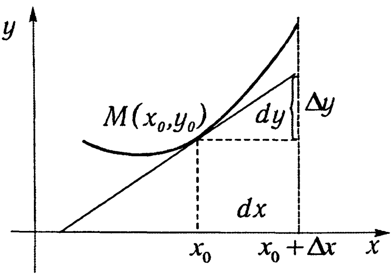


Рис. 7.7

4°. *Инвариантность формы дифференциала*. Форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Если $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, то

$$dy = f'_x dx = f'_x \varphi'_t dt. \tag{2}$$

5°. Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее первого дифференциала и обозначается

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2. \tag{3}$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = y'''dx^3;$$

....

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = y^{(n)}dx^n. \tag{4}$$

6°. Если функция сложная $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, то дифференциал второго порядка $d^2y = d\left(f'_x dx\right)$ находится по формуле

$$d^2y = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x, \tag{5}$$

где $dx = x'_t dt$.

Дифференциал третьего порядка будет

$$d^3y = f'''(dx)^3 + 3f''dxd^2x + f'd^3x. \tag{6}$$

и т. д. Здесь штрихами обозначено дифференцирование по x.

7°. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ следует

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{7}$$

Эту формулу используют при приближенных вычислениях.

8°. Абсолютная величина разности между истинным значением какой-либо величины a_0 и ее приближенным значением a называется *абсолютной погрешностью* и обозначается $\Delta = |a_0 - a|$.

Абсолютная величина отношения абсолютной погрешности к истинному значению называется *относительной погрешностью* и обозначается $\delta = \frac{\Delta}{|a_0|}$. Относительная погрешность обычно выражается в процентах $\delta = \frac{\Delta}{|a_0|}100\%$.

Если приращение функции заменить ее дифференциалом, то получим приближенное значение приращения $\Delta y \approx dy$. В этом случае абсолютная погрешность равна $\Delta = |\Delta y - dy|$, а относительная погрешность будет $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$.

4.1. Найти дифференциалы функций: а) $y = x^3 - x + \sqrt{x}$, б) $y = 3^{\ln \operatorname{tg} x}$, в) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$, г) $x = a\sin^3 t$.

Решение. а) Находим производную данной функции $y' = 3x^2 - 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отсюда дифференциал равен $dy = y'dx = \left(3x^2 - 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

б) Находим производную

$$y' = 3^{\ln \operatorname{tg} x} \ln 3 \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot 3^{\ln \operatorname{tg} x} \ln 3}{\sin 2x}.$$

Отсюда дифференциал

$$dy = \frac{2 \cdot 3^{\ln \operatorname{tg} x} \ln 3}{\sin 2x} dx.$$

в) Находим производную

$$y' = \frac{3x^2\left(x^3+1\right) - \left(x^3-1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

Отсюда дифференциал будет $dy = \dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2} dx.$

г) Производная по t равна $x' = 3a\sin^2 t \cos t$. Отсюда дифференциал $dx = 3a\sin^2 t \cos t dt$.

4.2. Найти дифференциалы указанных порядков от функций: а) $y = 3^{\ln \operatorname{tg} x}$, $d^2 y$?; б) $\rho = \dfrac{\sin 2\varphi}{1 - \varphi^2}$, $d^2\rho$? в) $y = \left(x^2 - x + 1\right)^3$, $d^3 y$? г) $x^{1/3} + y^{1/3} = a^{1/3}$, $d^2 y$?

Решение. а) Находим дифференциал 1-го порядка

$$dy = 3^{\ln \operatorname{tg} x} \ln 3 \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \ln 3 \frac{3^{\ln \operatorname{tg} x}}{\sin 2x} dx.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$d^2 y = 2 \ln 3 \frac{2 \ln 3 \dfrac{3^{\ln \operatorname{tg} x} \sin 2x}{\sin 2x} - 2 \cdot 3^{\ln \operatorname{tg} x} \cos 2x}{\sin^2 2x} dx^2 =$$

$$= 4 \ln 3 \cdot 3^{\ln \operatorname{tg} x} \frac{\ln 3 - \cos 2x}{\sin^2 2x} dx^2.$$

б) Дифференцируя последовательно дважды, имеем

$$d\rho = 2 \frac{\cos 2\varphi \left(1 - \varphi^2\right) + \varphi \sin 2\varphi}{\left(1 - \varphi^2\right)^2} d\varphi.$$

$$d^2 \rho = 2(\left(-\sin 2\varphi \cdot 2\left(1 - \varphi^2\right) - \cos 2\varphi \cdot 2\varphi + \sin 2\varphi + 2\varphi \cos 2\varphi\right)\left(1 - \varphi^2\right)^2 +$$

$$+2(\cos 2\varphi(1 - \varphi^2) + \varphi \sin 2\varphi)(1 - \varphi^2)^4 =$$

$$= 2(\sin 2\varphi(5\varphi^2 - 1 - 2\varphi^4) + 2\varphi \cos 2\varphi(1 - \varphi^2))d\varphi^2.$$

в) Дифференцируя последовательно три раза, имеем

$$dy = 3\left(x^2 - x + 1\right)^2 (2x - 1) dx,$$

$$d^2 y = 3\left(2\left(x^2 - x + 1\right)(2x - 1)^2 + \left(x^2 - x + 1\right)^2 2\right) dx^2 =$$

$$= 6\left(x^2 - x + 1\right)\left(5x^2 - 5x + 2\right) dx^2,$$

$$d^3 y = 6\left((2x - 1)\left(5x^2 - 5x + 2\right) + \left(x^2 - x + 1\right)(10x - 5)\right) dx^3 =$$

$$= 6(2x - 1)\left(10x^2 - 10x + 7\right) dx^3.$$

г) Функция задана неявно. Находим первую производную $y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2/3}$, тогда $dy = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2/3} dx$.

Вычисляем вторую производную

$$y'' = -\frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{ay}{x^5}},$$

отсюда $d^2y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{ay}{x^5}}dx^2$.

4.3. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал: а) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$, $x = t^2 + 1$; б) $z = \ln y$, $y = \operatorname{tg} x$, $x = 2t^2 + t$; в) $y = e^x$, $x = \operatorname{tg} t$, представить d^2y через: 1) x и dx, 2) t и dt.

Решение. а) Дифференциал сложной функции равен $dy = y'_x x'_t dt$. Находим производные $y'_x = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$; $x'_t = 2t$. Подставляя значение x в y'_x, окончательно получим

$$dy = \frac{\left(2t^2 - 1\right)tdt}{\sqrt{\left(t^2+1\right)\left(t^2-2\right)}}.$$

б) Дифференциал сложной функции в этом случае имеет вид $dz = z'_y y'_x x'_t dt$.

Находя производные $z'_y = \frac{1}{y}$, $y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x'_t = 4t + 1$ и подставляя их значения в выражение дифференциала, окончательно получим

$$dz = \frac{1}{y}\frac{1}{\cos^2 x}\left(4t+1\right)dt = \frac{2\left(4t+1\right)dt}{\sin\left(2\left(2t^2+t\right)\right)}.$$

в) Находим дифференциал первого порядка $dy = y'_x dx = e^x dx$. Дифференциал второго порядка через x и dx равен $d^2y = y''_{xx}dx^2 = e^x dx^2$.

Выразим теперь дифференциал через t и dt. Дифференциал первого порядка будет $dy = y'_x x'_t dt = e^x \frac{1}{\cos^2 t}dt = e^{\operatorname{tg} t}\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Дифференцируя по t, получим

$$d^2y = \frac{e^{\operatorname{tg} t}\dfrac{1}{\cos^2 t}\cos^2 t + e^{\operatorname{tg} t}2\sin t\cos t}{\cos^4 t}dt^2 = e^{\operatorname{tg} t}\frac{1+\sin 2t}{\cos^4 t}dt^2.$$

Если воспользоваться формулой (5), где $f'_x = e^x$, $f''_{xx} = e^x$,

$dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$, то придем к такому же результату

$$d^2y = e^x\frac{dt^2}{\cos^4 t} + e^x d\left(\frac{dt}{\cos^2 t}\right) = e^{\operatorname{tg} t}\frac{1+\sin 2t}{\cos^4 t}dt^2.$$

4.4. Вычислить приближенно: а) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; б) $\lg 9$; в) $\sqrt[5]{0{,}98}$.

Решение. а) Полагаем $f(x) = \operatorname{arctg} x$, тогда $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Отсюда по формуле (7) имеем $\operatorname{arctg}(x+\Delta x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{1+x^2}\Delta x$.

Пусть $x = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}05$. Таким образом

$$\operatorname{arctg}(1+0{,}05) = \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2}0{,}05 = \frac{\pi}{4} + 0{,}025.$$

б) Положим $f(x) = \lg x$, тогда $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10}$. Отсюда по формуле (7) имеем $\lg(x+\Delta x) = \lg x + \dfrac{\Delta x}{x\ln 10}$.

Пусть $x = 10$, тогда $\Delta x = -1$ и $\lg(10-1) = \lg 10 + \dfrac{-1}{10\ln 10}$.

Отсюда $\lg 9 = 1 - \dfrac{0{,}1}{\ln 10} = 0{,}956.$

в) Полагаем $f(x) = \sqrt[5]{x}$, тогда $f'(x) = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Отсюда $\sqrt[5]{x+\Delta x} = \sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{5}\dfrac{\Delta x}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Пусть $x = 1$, тогда $\Delta x = 0,02$ и $\sqrt[5]{1-0,02} = \sqrt[5]{1} + \frac{1}{5}\frac{-0,02}{\sqrt[5]{1^4}}$ или $\sqrt[5]{0,98} = 1 - 0,004 = 0,996$.

4.5. Для функции $y = x^2 + 3x + 1$ **найти** приращение ординаты касательной и приращение функции при переходе аргумента x от значения $x = 2$ к $x = 2,1$.

Решение. Согласно геометрическому смыслу дифференциала, приращению ординаты касательной соответствует дифференциал функции $dy = (2x+3)dx$.

При $x = 2$ и $dx = \Delta x = 2,1 - 2 = 0,1$ получим $dy = (2\cdot 2 + 3)0,1 = 0,7$.

Приращение функции находим по формуле

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= (2,1^2 + 3\cdot 2,1 + 1) - (2^2 + 3\cdot 2 + 1) = 11,71 - 11 = 0,71.$$

Следавательно, приращение ординаты касательной равно 0,7, а приращение функции 0,71. Так как $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$, то $\alpha\Delta x = 0,71 - 0,7 = 0,01$.

4.6. Найти дифференциал и приращение функции $y = x^3 - 2x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции её дифференциалом.

Решение. Имеем: $dy = \left(3x^2 - 2\right)dx$,

$$\Delta y = \left(\left(x+\Delta x\right)^3 - 2\left(x+\Delta x\right)\right) - \left(x^3 - 2x\right) = \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 2\right)\Delta x.$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$ получим: $dy = (3\cdot 2^2 - 2)0,1 = 1$; $\Delta y = (3\cdot 2^2 + 3\cdot 2\cdot 0,1 + 0,1^2 - 2)0,1 = 1,061$.

Абсолютная погрешность $\Delta = \left|\Delta y - dy\right| = 0,061$, а относительная погрешность $\delta = \frac{\Delta}{\left|\Delta y\right|}100\% = \frac{0,061}{1,061}100\% \approx 6\%$.

4.7. При измерении сторона куба x оказалась равной 4см, причём максимально возможная при этом погрешность измерения Δx находится в пределах $\pm 0{,}01$см. **Определить** абсолютную и относительную погрешности при вычислении объёма куба.

Решение. Объём куба равен $V = x^3 = 64 cm^3$. Возможная неточность измерения $|\Delta x| = 0{,}01$. Отсюда абсолютная погрешность $|\Delta V| \approx |dV| = 3x^2 dx = 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}48$. Относительная погрешность $\left|\frac{dV}{V}\right| = \frac{0{,}48}{64} 100\% = 0{,}75\%$.

7.5. Приложения производной к задачам геометрии и физики

1°. Уравнение касательной и нормали к кривой. Значение производной $f'(x)$ в некоторой точке $x = x_0$ геометрически представляет угловой коэффииент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

Из геометрического смысла производной следует, что угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ (рис. 7.8) в точке $M(x_0, y_0)$ $M \in y$ равен значению производной в этой точке, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Поэтому, если в уравнение пучка прямых, проходящих через точку M, подставить угловой коэффициент касательной, то уравнение касательной к кривой в данной точке примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормалью к кривой в точке $M(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной к кривой в этой точке. В силу условия перпендикулярности двух прямых $\left(k_1 = -\frac{1}{k_2}\right)$, уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ если } f'(x_0) \neq 0.$$

Отрезки $AN = y_0 \operatorname{ctg}\alpha$, $BN = y_0 \operatorname{tg}\alpha$ называются, соответственно, *подкасательной* и *поднормалью*, а длины отрезков AM и BM — длинами касательной и нормали.

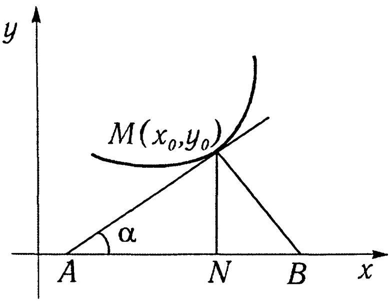


Рис. 7.8

2°. Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по известной формуле аналитической геометрии

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

3°. Отрезки, связанные с касательной и нормалью, в полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 7.9), тогда угол, образованный касательной MK и полярным радиусом $\rho = OM$, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'_\varphi}.$$

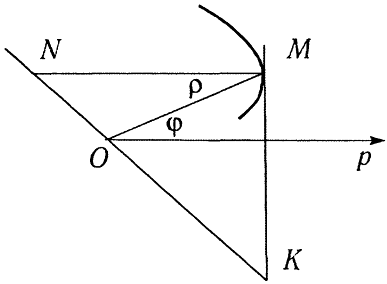


Рис. 7.9

Касательная MK и нормаль MN в точке M вместе с полярным радиусом OM точки касания и перпендикуляром к полярному радиусу, проведённому через полюс O, определяют следующие четыре отрезка: $MK = \frac{\rho}{|\rho|}\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ — отрезок касательной; $MN = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ — отрезок нормали; $OK = \frac{\rho^2}{|\rho'|}$ — полярная подкасательная; $ON = |\rho'|$ — полярная поднормаль.

4°. Средняя скорость движения точки за промежуток времени Δt определяется отношением приращения пути ΔS ко времени. Чем меньше Δt, тем точнее выражается скорость через среднюю скорость. Скорость движения точки в момент времени t определяется пределом, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

При движении точки по окружности угловой скоростью вращения ω в момент времени t называют предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю, т. е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, угловая скорость в данный момент равна производной от угла поворота φ по времени.

Ускорение точки w, движущейся по прямой, есть первая производная от скорости по времени $w=\frac{dv}{dt}$ или вторая производная от пути S по времени $w=\frac{d^2S}{dt^2}$.

Угловое ускорение точки есть первая производная от угловой скорости $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ или вторая производная от угла поворота по времени $\varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

5°. Сила тока определяется как предел отношения $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, где Δq — положительный электрический заряд, переносимый через сечение цепи за время Δt, т. е.

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

Таким образом, сила тока в данный момент времени равна производной от количества протёкшего электричества по времени.

6°. Химическое истолкование производной. Пусть $Q(t)$ - концентрация вещества, получаемого в ходе химической реакции в момент времени t. Тогда $C'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q(t_0)}{\Delta t}$ — скорость реакции в момент t_0.

5.1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=\frac{1}{x^2+1}$ в точке $M(1,\frac{1}{2})$.

Решение. Находим производную $y'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ и вычисляем частное значение производной при $x=1$: $y'(1)=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, уравнение касательной будет

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2(x-1)} \text{ или } x+2y-2=0.$$

Уравнение нормали к кривой в точке $M(1,\frac{1}{2})$ имеет вид

$$y-\frac{1}{2}=2(x-1) \text{ или } 4x-2y-3=0.$$

5.2. Написать уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ в точке $M(\frac{9}{5},4)$.

Решение. Находим производную $\frac{2x}{9}+\frac{2yy'}{25}=0$, $y'=-\frac{25x}{9y}$. Вычисляем частное значение производной в точке M $y'\left(\frac{9}{5}\right)=-\frac{25}{9}\frac{9}{5}\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$. Отсюда уравнение касательной $y-4=-\frac{5}{4}(x-\frac{9}{5})$ или $5x+4y-25=0$.

Уравнение нормали имеет вид $y-4=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{9}{5}\right)$ или $20x-25y+64=0$.

5.3. На кривой $y=3x^2-4x+1$ **найти** точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

Решение. Пусть искомая точка касания есть $M(x_0,y_0)$. Находим угловой коэффициент касательной в точке касания $k=y'(x_0)=6x_0-4$.

Поскольку касательная и прямая параллельны, то их угловые коэффициенты равны $6x_0-4=2$, откуда $x_0=1$.

Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, находим её ординату $y_0=3\cdot1^2-4\cdot1+1=0$. Итак, точка M имеет координаты (1,0).

5.4. Найти точку линии $y = x^2 - 2x + 5$, в которой касательная перпендикулярна прямой $3x + 6y - 1 = 0$, составить уравнение этой касательной. Сделать чертёж.

Решение. Пусть искомая точка есть $M(x_0, y_0)$. Находим угловой коэффициент касательной $y'(x_0) = 2x_0 - 2$. Угловой коэффициент прямой $k_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Из условия перпендикулярности прямых $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$, где k_2 — угловой коэффициент касательной, находим абсциссу искомой точки $-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2x_0 - 2}$, $x_0 = 2$. Ординату точки M находим из уравнения линии $y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 5 = 5$. Уравнение касательной будет $y - 5 = 2(x - 2)$ или $2x - y + 1 = 0$.

Чтобы построить график параболы, преобразуем её уравнение $y = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$, т. е. вершина параболы сдвинута на единицу вправо и на четыре единицы поднята вверх (рис. 7. 10). Уравнения касательной и прямой, перпендикулярной касательной, показаны на рисунке.

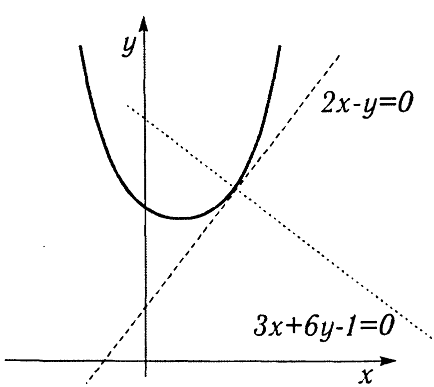


Рис. 7.10

5.5. Найти длину подкасательной, поднормали и нормали кривой $y^2 = x^3$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Данная кривая представляет полукубическую параболу. Поскольку касательная и нормаль проходят через точку $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, то рассмотрим только одну ветвь кривой (рис. 7.11). AN — подкасательная; BN — поднормаль.

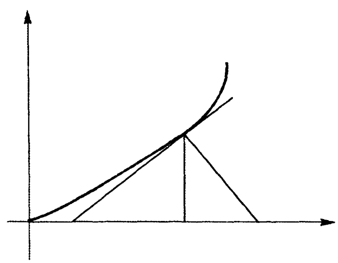


Рис. 7.11

Найдём угловой коэффициент касательной в точке M: $2yy' = 3x^2$; $y' = \frac{3}{2}\frac{x^2}{y}$; $y'(1) = k_1 = \frac{3}{2}$.

Угловой коэффициент нормали в точке $M(1,1)$ будет $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{2}{3}$. Уравнение касательной $y-1 = \frac{3}{2}(x-1)$; нормали $y-1 = -\frac{2}{3}(x-1)$.

Найдём координаты точек A и B. Поскольку точки лежат на оси Ox, то $y = 0$ и из уравнений касательной и нормали имеем $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Длина подкасательной $|AN| = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; поднормали $|BN| = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$. Длина касательной $|AM| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$; длина нормали $|BM| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

5.6. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$?

Решение. Совместно решив уравнения кривых (рис. 7. 12), находим абсциссу точки их пересечения: $\sin x - \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Продифференцируем уравнения кривых $y' = \cos x$ и $y = -\sin x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения (т. е. значения производных при $x_0 = \frac{\pi}{4}$): $f_1'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_2'(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда по формуле (4) пункта 3.4 имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}.$$

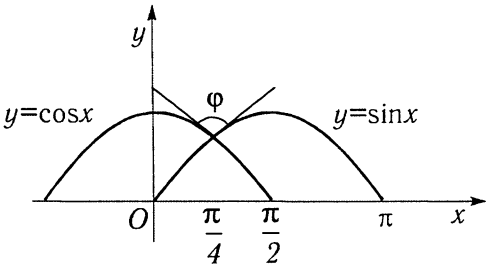


Рис. 7.12

5.7. Под каким углом кривая $y = \ln\left(\sqrt{3}x - 1\right)$ пересекает ось x?

Решение. Находим точку пересечения кривой с осью Ox. Полагая $y = 0$, получим: $\ln\left(\sqrt{3}x - 1\right) = 0$, $\sqrt{3}x - 1 = 1$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Находим производную $y' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x - 1}$ и угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$:

$$y'(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1}=\sqrt{3}.$$

Поскольку угловой коэффициент оси Ox равен нулю, то по формуле (4) пункта 3.4: $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$. Следовательно, искомый угол $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5.8. Найти длины отрезков полярных касательной, нормали, подкасательной и поднормали, а также угол между касательной и полярным радиусом точки касания у спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ в точке с полярным углом $\varphi=2\pi$.

Решение. Представим график спирали Архимеда (рис.7.13). Находим производную $\rho'=a$, тогда длина полярной касательной равна $|MK|=\dfrac{\rho}{|\rho'|}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\dfrac{2\pi a}{a}\sqrt{4\pi^2a^2+a^2}=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; длина полярной нормали $|MN|=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{(2\pi a)^2+a^2}=$ $=a\sqrt{1+4\pi^2}$; длина подкасательной $OK=\dfrac{\rho^2}{|\rho'|}=\dfrac{a^2 4\pi^2}{a}=4a\pi^2$; длина поднормали $ON=|\rho'|=a$.

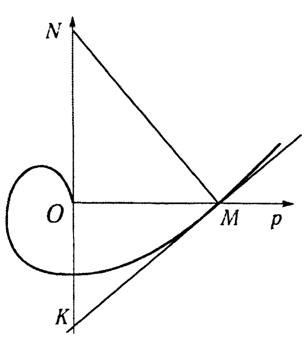


Рис. 7.13

Угол, образованный касательной MK и полярным радиусом точки касания, находим по формуле $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'_\varphi} = \frac{a2\pi}{a} = 2\pi$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2\pi$.

5.9. Точка движется вдоль прямой по закону $s = 2t^3 - 3t + 4$. **Найти** скорость и ускорение точки в момент времени $t = 3c$.

Решение. Скорость точки определяется первой производной по времени $v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 3$. При $t = 3$ скорость равна $v(t = 3) = 6 \cdot 3^2 - 3 = 51$ с$^{-1}$.

Ускорение точки определяется второй производной $w = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t$. При $t = 3$ ускорение равно $w(t = 3) = 12 \cdot 3 = 36$ с$^{-2}$.

5.10. Угол поворота шкива в зависимости от времени задан формулой $\varphi = t^2 + 2t + 4$. **Найти** угловую скорость и ускорение при $t = 4$ с.

Решение. Угловая скорость определяется первой производной от угла поворота по времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t + 2$, а угловое ускорение определяется второй: $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2$.

При $t = 4$ угловая скорость равна $\omega = 2 \cdot 4 + 2 = 10\frac{1}{c}$, а угловое ускорение постоянно, от времени не зависит, и равно $2\frac{1}{c^2}$.

5.11. Снаряд выпущен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 \frac{м}{c}$. **Определить** скорость и ускорение движения снаряда. На каком растоянии от земли и через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки? (Сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх, имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где x — высота подъема тела за время t, g — ускорение свободного падения.

Первая производная от пути определяет скорость движения снаряда $v = v - gt$, а вторая производная — ускорение $w = -g$.

Когда снаряд достигнет наивысшей точки подъема, его скорость будет равна нулю, т. е. $0 = v - gt$, откуда время подъема $t = \frac{v_0}{g}$ с.

Чтобы найти расстояние снаряда от земли до наивысшей точки подъема, необходимо в уравнение движения подставить время подъема

$$x = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

7.12. Движение точки M определяется уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos kt, \\ y = b\sin kt. \end{cases}$$

Определить направление скорости в момент времени $t = \frac{\pi}{4k}$.

Решение. Скорость направлена по касательной к траектории. Тангенс угла наклона касательной в момент $t = t_0$ равен

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0} = \left.\frac{bk\cos kt}{-ak\sin kt}\right|_{t=\frac{\pi}{4k}} = -\frac{b}{a}.$$

В момент $t = \frac{\pi}{4k}$ скорость направлена к положительному направлению оси Ox под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$.

7.13. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, определяется по закону

$q = 3t^2 - 2$. **Найти** силу тока в конце второй секунды.

Решение. Сила тока равна первой производной от количества электричества по времени $I = \dfrac{dq}{dt} = 6t$. При $t = 2$ сила тока равна $I(t=2) = 6 \cdot 2 = 12\,\text{а}$.

5.14. Зависимость между количеством q вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $q = A(1 - e^{-at})$.

Определить скорость реакции.

Решение. Скорость реакции есть производная

$$\frac{dq}{dt} = Aae^{-at} \quad \text{или} \quad \dot{q} = a(A - q).$$

7.6. Теоремы о среднем

1°. *Теорема Ролля.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка и удовлетворяет условию $f(a) = f(b) = 0$, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $f'(\xi) = 0$.

Геометрически это означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны нулю, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси Ox (рис. 7.14). Теорема также верна, если $f(a) = f(b) \neq 0$.

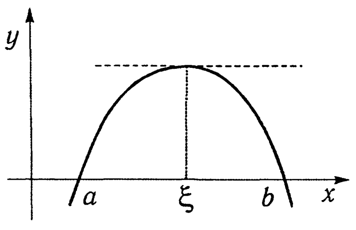


Рис. 7.14

2°. *Теорема Лагранжа.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$. Эта формула называется формулой конечных приращений.

Геометрически это означает следующее: на дуге AB (рис. 7.15) всегда найдется по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

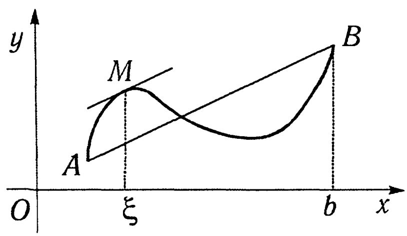


Рис. 7.15

3°. *Теорема Коши.* Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные в каждой внутренней точке этого отрезка. Если эти производные не обращаются в нуль одновременно и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, если $\varphi'(x) \neq 0$ в промежутке $[a, b]$.

6.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: а) $y=x^2-2x-3$ на отрезке $[-1,3]$; б) $y=1-\sqrt[5]{x^2}$ на отрезке $[-1,1]$.

Решение. а) Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех значениях x. Значения функции на границах отрезка равны между собой $y(-1)=y(3)=0$ и функция имеет конечную производную $y' = 2x - 2$ в каждой точке этого отрезка, следовательно условия теоремы Ролля выполняются. Значение ξ определяем из выражения $y' = 0,\ 2x - 2 = 0$, т. е. $\xi = 1$.

б) Функция непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и на концах этого отрезка принимает равные значения $y(-1) = y(1) = 0$. Находим производную $y' = -\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$. В точке $x = 0 \in [-1,1]$ производная не существует. Поскольку условия теоремы Ролля не выполнены, то теорема Ролля к данной функции неприменима.

6.2. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функций: а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ на $[0,1]$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ на $[-1,1]$. Если теорема применима, то найти точку ξ.

Решение. а) Даная функция на отрезке $[0,1]$ непрерывна и имеет конечную производную $f'(x) = x^2 - 1$. Следовательно, условия теоремы Лагранжа выполняются. Точку ξ найдем из формулы конечных приращений $f(1) - f(0) = (1-0)f'(\xi)$, $\frac{1}{3} - 1 = \xi^2 - 1,\ \xi_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $\xi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ не принадлежит отрезку $[0,1]$, то искомое значение $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Функция непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и имеет производную $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Поскольку производная в точке $x = 0 \in [-1,1]$ не существует, то теорема Лагранжа к данной функции не применима.

6.3. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 2x$ параллельна хорде, стягивающей точки A (–2,0) и B (1,3)? Пояснить графически.

Решение. Наклон хорды AB (рис. 7.16) определяется угловым коэффициентом $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{1+2} = 1$. По теореме Лагранжа $f(1) - f(-2) = (1+2)f'(\xi)$, $3 = 3(2\xi + 2)$, $\xi = -\frac{1}{2}$. Угловой коэффициент касательной к данной кривой $k = y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2x + 2\big|_{x=-\frac{1}{2}} = 1$.

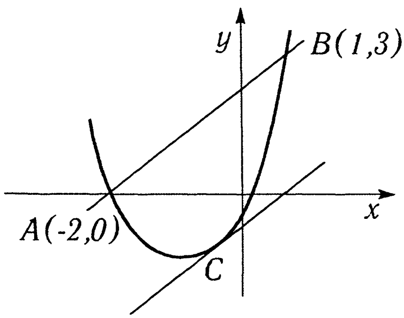


Рис. 7.16

Следовательно, в точке $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ касательная к параболе параллельна хорде AB.

6.4. Для функций $\varphi(x) = \sin x$ и $\psi(x) = \cos x$ **проверить** выполнение условий теоремы Коши в интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ и найти ξ.

Решение. Найдем производные $\varphi'(x) = \cos x$; $\psi'(x) = -\sin x$. Поскольку производные существуют во всех точках этого интервала и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$; $\sin 0 \neq \sin\frac{\pi}{2}$, то условия теоремы Коши выполняются.

По формуле Коши имеем

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}=\frac{-\sin\xi}{\cos\xi}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg}\xi=1,\ \xi=\frac{\pi}{4}.$$

6.5. Доказать, что уравнение $e^x-x-1=0$, имеющее корень $x=0$, не имеет других действительных корней.

Решение. Пусть данное уравнение имеет еще один действительный корень x_2, тогда между корнями $x=0$ и x_2 найдется такая точка ξ, в которой $f(\xi)=0$. Обозначим левую часть уравнения за $f(x)=e^x-x-1$ и найдем производную $f'(x)=e^x-1$. Приравнивая ее нулю, получим $e^x=1,\ x=0$. Поскольку это значение x совпадает с корнем уравнения, а другой точки ξ, где бы $f(\xi)=0$ нет, то данное уравнение не имеет других действительных корней.

6.6. Многочлен $f(x)=x^4-x^3+x^2-x$ имеет корни $x=0$ и $x=1$. **Доказать,** что $\frac{df}{dx}$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу [0,1].

Решение. Находим производную $\frac{df}{dx}=4x^3-3x^2+2x-1$. Поскольку функция $f(x)$ удовлетворяет на интервале [0,1] условиям теоремы Ролля, то приравниваем производную нулю $4x^3-3x^2+2x-1=0$. Даное уравнение третьей степени, следовательно, имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Поскольку многочлен $\frac{df}{dx}$ на концах интервала [0,1] имеет разные знаки, а производная от него $\frac{d^2f}{dx^2}=12x^2-6x+2$ не имеет корней, то $\frac{df}{dx}$ на данном интервале имеет один действительный корень.

7.7. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Если при $x \to a$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одновременно стремятся к нулю или ∞, то предел их отношения равен пределу отношения их производных, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

При этом предполагается, что $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ существуют и конечны.

Если же отношение производных также будет представлять случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можно снова и снова применять правило Лопиталя.

Если неопределенности типа $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$, то сначала приводят эти функции к виду дроби, которая представляет неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем уже пользуются правилом Лопиталя.

Нахождение предела функции в случае неопределенностей типа $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ с помощью логарифмирования также сводится сначала к случаям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем уже используется правило Лопиталя.

7.1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{\sin^4 2x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$.

Решение. а) При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3\cos 3x}=\frac{1}{3}.$$

б) При $x\to 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 3x}.$$

При $x\to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя еще раз

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{9\cos 3x}=\frac{4}{9}.$$

в) При $x\to 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x^2-1}{\sin^4 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-2x}{4\sin^3 2x\cos 2x\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}-x}{4\sin^3 2x\cos 2x}.$$

Выделим первый замечательный предел и воспользуемся теоремами о пределах и правилом Лопиталя еще раз

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)}{8\sin 2x\sin^2 2x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{8\sin^2 2x\cos 2x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 2x}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{2\sin 2x\cos 2x\cdot 2}=\frac{1}{32}.$$

г) При $x\to 0$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

7.2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x}{x\sin x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. а) При $x\to 1$ имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приводим к общему знаменателю и получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

б) При $x\to 0$ имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Приводим к общему знаменателю и получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+4(\cos x-x\sin x)-2x\sin x-x^2\cos x}=-\frac{1}{6}.$$

в) При $x\to\pi$ имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Приводим неопределенность к виду $\dfrac{0}{0}$ и пользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{-\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}}=-2.$$

г) При $x \to \infty$ имеем неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Приводим эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и пользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1.$$

7.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}x^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\operatorname{ctg}5x}$.

Решение. а) При $x \to \frac{\pi}{4}$ имеем неопределенность 1^∞.

Прологарифмируем данную функцию $y = (\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

$\ln y = \operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x$, тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x$, т. е. получим неопределенность вида $\infty \cdot 0$.

Представим эту неопределенность в виде неопределенности $\frac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\operatorname{tg}2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y = -1$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ или $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x} = \frac{1}{e}$.

б) Неопределенность вида ∞^0. Прологарифмируем данную функцию $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; $\ln y = \frac{1}{x}\ln\ln x$ и сведем неопределенность к виду $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$

Применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=1$.

в) Неопределенность вида 0^0. Прологарифмируем функцию $y=x^x$: $\ln y=x\ln\ x$ и представим неопределенность в виде $\frac{\infty}{\infty}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Применим правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}y=1$. Итак $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

г) Неопределенность вида ∞^0. Положим $y=(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ и прологарифмируем: $\ln y=\frac{1}{x}\ln(x+2^x)$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2}=\ln 2,$$

откуда $\lim\limits_{x\to\infty}y=2$.

д) Неопределенность вида 1^∞. Прологарифмируем функцию $y=(1+\sin 2x)^{\operatorname{ctg}5x}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}5x\ln\left(1+\sin 2x\right)$$

и приведем неопределенность к виду $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cos 5x\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 5x}.$$

Пользуясь теоремами о пределах и правилом Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{5\cos 5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin 2x}=\frac{2}{5}.$$

Таким образом, $\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\operatorname{ctg}5x}=e^{\frac{2}{5}}$.

7.8. Возрастание и убывание функций

При исследовании поведения функции $y=f(x)$ в зависимости от изменения независимой переменной x обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. каждое следующее ее значение больше предыдущего $x_2>x_1$.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают $f(x_2)>f(x_1)$, то функция называется *возрастающей*, а если они убывают $f(x_2)<f(x_1)$, то функция называется *убывающей*.

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком ее производной: если внутри некоторого промежутка $y'>0$, то функция возрастает, а если $y'<0$, то в этом промежутке функция убывает.

При практическом исследовании функции на возрастание и убывание находят производную и приравнивают ее к нулю. Находят корни получившегося уравнения, а также точки, в которых производная не существует. Все эти точки, вместе с возможными точками разрыва функции, разбивают область существования функции на ряд промежутков, на каждом из которых вопрос о возрастании или убывании функции определяется знаком производной.

8.1. Определить промежутки монотонности функций:

а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = \log_a(x-1)$; $a < 1$; в) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;
г) $y = (x+1)^3(x-3)$; д) $y = x^2\,|x|$.

Решение. а) Функция определена для всех значений x, т. е. область ее существования $(-\infty, \infty)$. Находим производную $y = 3x^2$. Очевидно, что при любом x $y' > 0$, следовательно, функция возрастает на всем промежутке (рис. 7.17).

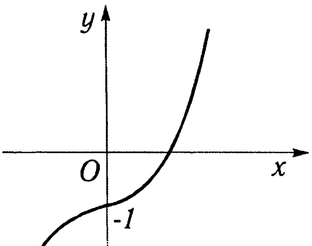


Рис. 7.17

б) Функция существует для всех $x > 1$, т. е. область ее существования $(1, \infty)$. Находим производную $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln a}$. Поскольку $a < 1$, то $\ln a < 0$ и y' для всех $x > 1$ меньше нуля. Следовательно, данная функция на промежутке $(1, \infty)$ убывает (рис. 7.18).

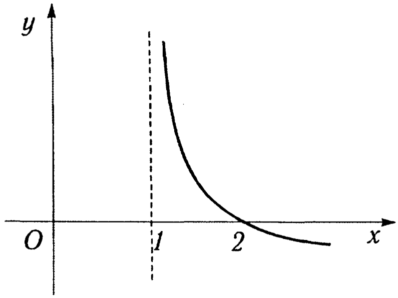


Рис. 7.18

в) Функция определена для всех x кроме $x = 1$, где она терпит разрыв. Находим производную $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ и приравниваем ее к нулю $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Учитывая точку разрыва $x = 1$, разбиваем числовую ось на промежутки (рис. 7.19) и определяем знак производной на каждом из них. Следовательно, функция возрастает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(2, \infty)$ и убывает — $(0,1)$ и $(1,2)$. На рис. 7.20 показан график функции.

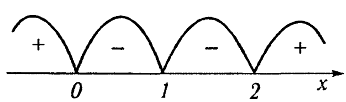


Рис. 7.19

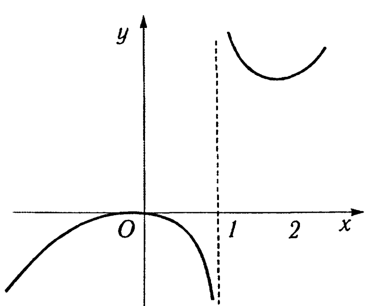


Рис. 7.20

г) Функция определена на всей числовой оси x. Находим производную $y' = 3(x+1)^2(x-3)+(x+1)^3 = 4(x+1)^2(x-2)$. Из уравнения $(x+1)^2(x-2)=0$ определяем корни производной $x_{1,2} = -1$ и $x_3 = 2$. Корни уравнения определяют три промежутка $]-\infty,-1]$; $]-1,2]$ и $]2,\infty[$. Из выражения производной видно, что при переходе через корень $x_{1,2} = -1$ производная не меняет знака. При $x < -1$ и при $-1 < x < 2$ имеем: $y' < 0$, следовательно, функция убывает. При $x > 2$ производная $y' > 0$, следовательно функция возрастает.

д) Функция y определена на всей числовой оси. Находим ее производную

$$y' = \begin{cases} 3x^2 & \textit{при} \quad x > 0; \\ -3x^2 & \textit{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что функция при $x < 0$ убывает, так как $y' < 0$ при любом значении x, а при $x > 0$ возрастает, так как $y' > 0$. График этой четной функции показан на рис. 7.21.

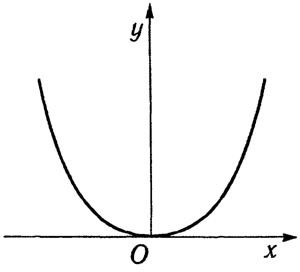


Рис. 7.21

8.2. Доказать справедливость неравенств: а) $\operatorname{tg} x > \frac{x^3}{3} + x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$; б) $x > \ln(1+x)$ при $x > 0$; в) $x - \frac{x^3}{3} < \sin x < x$ при $x > 0$.

Решение. а) Найдем производную функции $y = \operatorname{tg} x - \frac{x^3}{3} - x$ для указанных значений x: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - x^2 - 1 = \operatorname{tg}^2 x - x^2$.

Поскольку $\operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0$, так как $\operatorname{tg}^2 x > x^2$, $\operatorname{tg} x > x$, то $y' > 0$ и функция возрастает, откуда $\operatorname{tg} x - \frac{x^3}{3} - x > 0$ или $\operatorname{tg} x > \frac{x^3}{3} + x$.

б) Найдем производную функции $y = x - \ln(1+x)$: $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$. При $x = 0$ функция имеет минимум, а при $x > 0$, $y' > 0$ и функция возрастает. Следовательно, $x - \ln(1+x) > 0$, откуда $x > \ln(1+x)$.

в) Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x - \frac{x^3}{3} < \sin x, \\ \sin x < x. \end{cases}$$

Введем функции $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \sin x$, $\varphi(x) = \sin x - x$ и найдем их производные $f'(x) = 1 - x^2 - \cos x$, $\varphi'(x) = \cos x - 1$. При $x > 0$ $f'(x) < 0$, так как $1 - x^2 < \cos x$, и $\varphi'(x) < 0$ или равна нулю для значений $x = 2\pi k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, так как $\cos x < 1$. Функции убывающие, следовательно $x - \frac{x^3}{3} - \sin x < 0$ и $\sin x - x < 0$, откуда $x - \frac{x^3}{3} < \sin x < x$.

7.9. Максимум и минимум функции

1°. Значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *максимальным* (*минимальным*), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Максимум и минимум функции называется *экстремумом* функции. Значения аргумента, при которых функция имеет экстремум, называются *критическими значениями или критическими точками.*

Чтобы найти экстремальные значения функции, надо найти ее производную $f'(x)$ и, приравняв ее к нулю, решить уравнение $f'(x)=0$. Корни этого уравнения, а также точки, производная в которых не существует, являются критическими точками, т. е. значениями аргумента, при которых может быть экстремум.

Если знак производной при переходе через точку x_0 меняется с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если знак производной меняется с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума; если знак не меняется, то в точке x_0 экстремума нет.

Иногда проще исследовать критическую точку по знаку второй производной.

Если в критической точке, где первая производная равна нулю, $f''(x_0)>0$, то x_0 есть точка минимума; если $f''(x_0)<0$, то x_0 есть точка максимума; если $f''(x_0)=0$, то такую точку исследуют по первой производной.

2°. Если функция задана неявно $F(x,y)=0$, то для того чтобы $y'_x=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=0$, должно выполняться равенство $F'_x(x,y)=0$. Здесь F'_x и F'_y производные от функции F по x и y, найденные в предположении, что y и x не зависят от x и y, соответственно. Решая совместно $F(x,y)=0$ и $F'_x(x,y)=0$, находим критические точки. Экстремум функции в критических точках находят по знаку второй производной $y''_{xx}=-\dfrac{F''_{xx}}{F'_x}$. Если в критической точке $y''_{xx}<0$, то это точка максимума; если $y''_{xx}>0$, то это точка минимума.

9.1. Исследовать на экстремум функции: а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$; б) $y=x(x-2)^3$.

Решение: а) Находим производную $y'=x^2-x-2$. Приравниваем ее к нулю $x^2-x-2=0$. Корни этого уравнения $x_1=-1$; $x_2=2$ являются критическими точками.

Представим производную в следующем виде $y'=(x+1)(x-2)$ и рассмотрим методом интервалов, как меняется знак при переходе через критические точки (рис. 7.22).

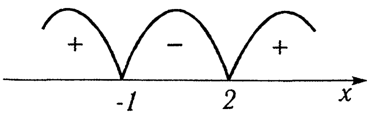


Рис. 7.22

При переходе через точку $x_1=-1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через $x_2=2$ с минуса на плюс. Значит, при $x_1=-1$ функция имеет максимум, а при $x_2=2$ функция имеет минимум.

Находим экстремальные знчения функции: $f(-1)=\frac{7}{6}$ — максимум функции; $f(2)=-\frac{10}{3}$ — минимум функции. График функции показан на рис. 7.23.

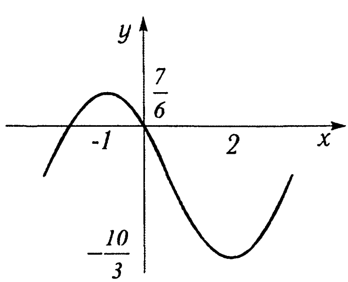


Рис. 7.23

б) Находим производную $y' = 2(x-2)^2(2x-1)$ и приравниваем ее к нулю $(x-2)^2(2x-1) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$ являются критическими точками.

При переходе через точку $x_1 = 2$ производная знака не меняет, поскольку данный множитель в квадрате, а при переходе через точку $x_2 = \frac{1}{2}$ меняет знак с минуса на плюс. Значит, при $x_2 = \frac{1}{2}$ функция имеет минимум.

Находим экстремальные значения функции, а именно минимум функции $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16}$. График функции показан на рис. 7.24.

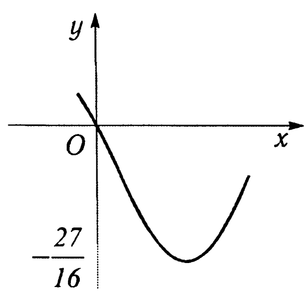


Рис. 7.24

9.2. Исследовать на экстремум функции: а) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$; б) $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$; в) $y = 4x - 5\sqrt[5]{x^4}$.

Решение. а) Находим первую производную $y' = x^3 - 4x$ и приравниваем ее к нулю $x(x^2-4) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2$ являются критическими точками.

Находим вторую производную $y''=3x^2-4$ и выясним знак второй производной в критических точках: $y''(0)<0$ — функция имеет максимум; $y''(2)>0$ — функция имеет минимум; $y''(-2)>0$ — функция имеет минимум. Определяем экстремальные значения функции: $f(0)=1$ — максимум функции; $f(2)=-3$ — минимум функции; $f(-2)=-3$ — минимум функции. График функции показан на рис. 7.25.

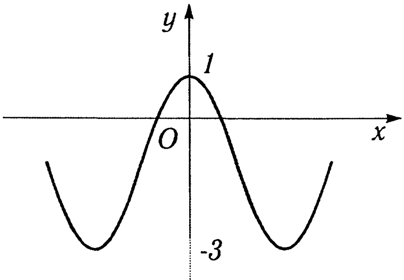


Рис. 7.25

б) Находим первую производную $y'=3x^2-x^3$ и приравниваем ее к нулю $x^2(3-x)=0$. Корни этого уравнения: $x_1=0,\ x_2=3$ являются критическими точками.

Находим вторую производную $y''=3x(2-x)$ и выясним знак в критических точках.

При $x_2=3$ вторая производная $y''(3)<0$ — функция имеет максимум. При $x_1=0$ вторая производная $y''(0)=0$, следовательно, судить об экстремуме нельзя. Проверим наличие экстремума по первой производной. Поскольку при переходе через точку $x_1=0$ первая производная знака не меняет, то в точке $x_1=0$ экстремума нет.

Определяем в точке $x_2=3$ максимальное значение функции $f(3)=\dfrac{27}{4}$.

График функции показан на рис. 7.26.

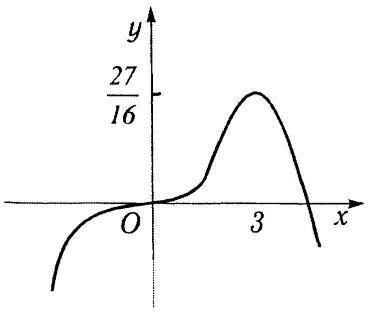


Рис. 7.26

в) Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = 4 - 4\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{4}{\sqrt[5]{x}}\left(\sqrt[5]{x} - 1\right)$. Приравниваем производную к нулю $\left(\sqrt[5]{x} - 1\right) = 0$ и находим критическую точку $x_1 = 1$. При переходе через точку $x_1 = 1$ производная y' меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке $x_1 = 1$ функция имеет минимум $y(1) = -1$.

Приравнивая к нулю знаменатель производной, получаем $\sqrt[5]{x} = 0$. Отсюда находим критическую точку функции $x_2 = 0$, в которой производная не существует. Очевидно, что в точке $x - 0$ производная $y' > 0$, а в точке $x + 0$ производная $y' < 0$. Следовательно, $x_2 = 0$ есть точка максимума функции $y(0) = 0$ (рис. 7.27).

9.3. Найти экстремальные значения функций:

а) $xy^2 - x^2y = 2a^3$; б) $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. а) Функция задана неявно. Находим $F_x' = y^2 - 2xy$ и $F_y' = 2xy - x^2$.

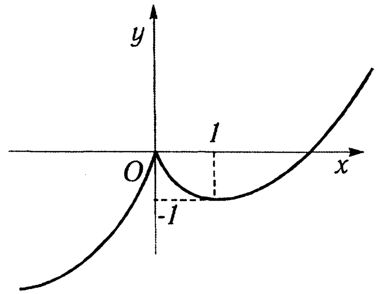


Рис. 7.27

Производная $y' = 0$ тогда, когда $F'_x = 0$, т. е. $y^2 - 2xy = 0$. Решая совместно систему

$$\begin{cases} xy^2 - x^2y = 2a^3, \\ y^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

находим критическую точку $x = a,\ y = 2a$.

Вычисляем вторую производную $y''_{xx} = \dfrac{2y}{2xy - x^2}$. В критической точке $y''_{xx} = \dfrac{4}{3a}$ и $y''_{xx} > 0$, если $a > 0$, и $y''_{xx} < 0$, если $a < 0$. Таким образом, функция y при $a > 0$ имеет минимум, а при $a < 0$ имеет максимум.

б) Находим $F'_x = 4x^3 - 4y,\ F'_y = 4y^3 - 4x$ и приравниваем к нулю $F'_x = 0,\ x^3 - y = 0$.

Из решения системы

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 4xy = 0, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

находим критические точки $x = 0,\ y = 0;\ x = \sqrt[8]{3},\ y = \sqrt[8]{27}$ и $x = -\sqrt[8]{3},\ y = -\sqrt[8]{27}$.

Вычисляем вторую производную $y''_{xx}=\frac{3x^2}{y^3-x}$ и определяем ее знак в критических точках. Поскольку при $x=0, y=0$ и $F'_y=0$, то в окрестности этой точки уравнение может определять y как неоднозначную функцию от x, поэтому точку (0,0) оставляем в стороне.

При $x=\sqrt[8]{3}$ вторая производная $y''_{xx}=-\frac{3\sqrt[8]{9}}{3\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{3}}=-\frac{3\sqrt[8]{3}}{2}<0$, т. е. при $x=\sqrt[8]{3}$ функция имеет максимум, равный $y_{max}=\sqrt[8]{27}$.

При $x=-\sqrt[8]{3}$ вторая производная $y''_{xx}=-\frac{3\sqrt[8]{9}}{-3\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{3}}=\frac{3\sqrt[8]{3}}{4}>0$, т. е. функция имеет минимум, равный $y_{max}=-\sqrt[8]{27}$.

7.10. Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшим значением функции $y=f(x)$ на некотором отрезке $[a,b]$ называется самое большое, а наименьшим значением — самое меньшее из всех ее значений.

Если функция непрерывна в некотором интервале и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале (конечном или бесконечном).

При определении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a,b]$ приравнивают первую производную к нулю $y'=0$ и находят критические точки, лежащие внутри отрезка $[a,b]$. Далее вычисляют значения функции в этих точках и на концах отрезка $[a,b]$, т. е. находят $f(a)$ и $f(b)$. Из сравнения значений функции в этих точках определяют наибольшее и наименьшее значение функции.

10.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, $[-2;2]$; б) $y=x+\cos 2x$, $[0;\dfrac{\pi}{3}]$; в) $y=x^3+3x^2-9x+20$, $[-6,2]$.

Решение. а) Находим производную функции $y'=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ и приравниваем ее к нулю $x^2-1=0$. Отсюда критические точки будут $x=1$, $x=-1$. Поскольку критические точки лежат внутри интервала, то находим значения функции в этих точках: $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Вычисляем значения функции на концах отрезка $[-2;2]$: $y(-2)=-\dfrac{2}{5}$, $y(2)=\dfrac{2}{5}$. Теперь сравниваем значения функции в критических точках и в точках на концах отрезка. Из сравнения видно, что наиблшее значение функции будет $y(1)=\dfrac{1}{2}$, а наименьшее $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$. График функции на отрезке [–2;2] показан на рис. 7.28.

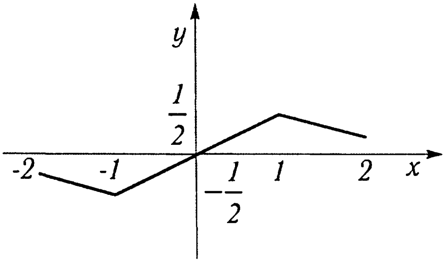


Рис. 7.28

б) Вычислим производную $y'=1-2\sin 2x$, приравняем ее к нулю $1-2\sin 2x=0$ и находим критические точки, принадлежащие отрезку $[0;\dfrac{\pi}{3}]$.

В данном случае имеем только одну критическую точку $x=\dfrac{\pi}{12}$.

Вычисляем значение функции в критической точке и на концах отрезка

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}+\pi}{12},\quad y(0)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi-3}{6}.$$

Сравнение найденных значений функции показывает, что наибольшее значение в точке экстремума $y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$, а наименьшее на конце отрезка $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi-3}{6}$. График функции на отрезке $[0;\frac{\pi}{3}]$ показан на рис. 7.29.

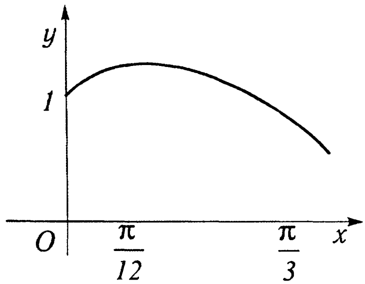


Рис. 7.29

в) Вычисляем производную $y'=3x^2+6x-9$ и, приравнивая ее к нулю, находим критические точки $x^2+2x-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$. Поскольку критические точки лежат внутри отрезка $[-6, 2]$, вычисляем значения функции в критических точках $y(1)=15$, $y(-3)=47$. Находим значение функции на концах отрезка $y(-6)=-34$, $y(2)=22$.

Сравнивая вычисленные значения функции в критических точках и на границе отрезка, заключаем, что наибольшее значение находится в критической точке $x=-3$ и равно $y(-3)=47$, а наименьшее в граничной точке $x=-6$ и равно $y(-6)=-34$ (рис. 7.30).

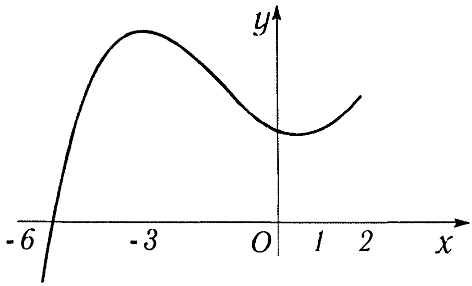


Рис. 7.30

10.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$; б) $\varphi(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

а) Функция определена на всей числовой оси, а изменение аргумента x не ограничено каким-либо отрезком, поэтому следует исследовать значения функции при $x\in]-\infty,\infty[$.

Вычисляем производную $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и, приравнивая ее к нулю, находим критическую точку $x = 0$. При переходе через эту точку производная функции меняет знак с + на –, следовательно, $x = 0$ точка максимума $f(0)=1$. При $x\to\pm\infty$ функция бесконечно убывает, но наименьшего значения не имеет (рис. 7.31).

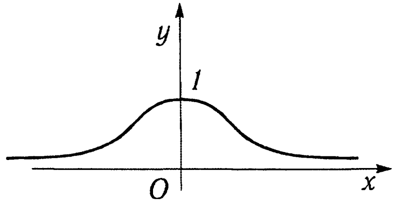


Рис. 7.31

б) Функция определена на всей числовой оси. Изменение аргумента не ограничено отрезком, поэтому рассмотрим значения функции при $x\in]-\infty,\infty[$.

Находим производную $\varphi'(x)=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin\ x$ и приравниваем ее к нулю $2\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$, откуда $\sin 2x\cos 2x=0,\ \sin 2x=0,\ \cos 2x=0,\ x_1=\dfrac{\pi n}{2},\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$. Подставляя найденные критические точки в функцию находим, что при $x=\dfrac{\pi n}{2}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots)$ функция имеет наибольшие значения равные единице, а при $x=\dfrac{\pi}{4}(1+2n)$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots)$ — наименьшие значения равные $\dfrac{1}{2}$.

в) Функция задана и определена на всей числовой оси. Исследуем значения функции при $x\in]-\infty,\infty[$. Найдем производную $f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. В точке $x=0$ производная не существует. Значение функции при $x=0$ равно -1. При $x\to\pm\infty$ функция неограничено возрастает.

Следовательно, наименьшее значение функции будет $f(0)=-1$, а наибольшего значения функция не имеет (рис. 7.32).

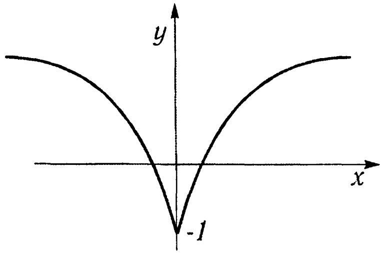


Рис. 7.32

7.11. Решение задач на максимум и минимум

При решении задач на максимум и минимум по условиям задачи следует составить функцию, приняв одну из переменных за основную и выразив все остальные переменные через нее. Далее следует исследовать эту функцию на экстремум по искомой переменной, т. е. найти наибольшее или наименьшее значение полученной функции. Интервал изменения независимой переменной определяется из условий задачи.

11.1. Объем цилиндра V. **Найти** радиус основания, при котором цилиндр имеет наименьшую полную поверхность.

Решение. Полную поверхность цилиндра принимаем за функцию. $S = S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi(R^2 + RH)$, где H — высота цилиндра, R — радиус основания. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, отсюда $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$. Исключая H из выражения полной поверхности цилиндра, получим $S = 2\pi\left(R^2 + \dfrac{V}{\pi R}\right)$. Вычисляя производную по R: $S' = 2\pi\left(2R - \dfrac{V}{\pi R^2}\right)$ и приравнивая ее к нулю $2R - \dfrac{V}{\pi R^2} = 0$, находим, что минимум наименьшей полной поверхности будет при радиусе $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Действительно, вторая производная при $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ равна

$$S' = 2\pi\left(2 + \frac{2V}{\pi R^3}\right) = 12\pi > 0.$$

То есть найденное значение радиуса определяет наименьшую полную поверхность.

11.2. В данный шар **вписать** конус с наибольшим объемом.

Решение. Объем конуса, вписанного в шар (рис. 7.33), равен $V = \dfrac{1}{3}\pi H r^2$, где H — высота конуса, r — радиус основания.

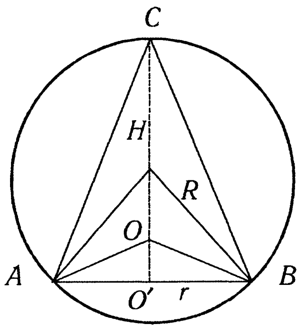


Рис. 7.33

Обозначим за R — радиус шара, тогда из $\triangle OO'B$ имеем: $(OB)^2=(OO')^2+(O'B)^2$, $R^2=(H-R)^2+r^2$, $r^2=2HR-H^2$. Отсюда $V=\frac{1}{3}\pi(2H^2R-H^3)$. Принимая объем конуса за функцию, наибольшую его величину находим, исследуя эту функцию на экстремум: $V'_H=\frac{\pi}{3}(4HR-3H^2)$, $4HR-3H^2=0$, $H=0$, $H=\frac{4}{3}R$. При $H=0$ функция, естественно, не может иметь наибольшего объема. При $H=\frac{4}{3}R$ производная V'_H меняет знак с плюса на минус, т. е. функция имеет максимум. Следовательно, наибольший объем конуса, вписанного в шар, при высоте конуса $H=\frac{4}{3}R$, где радиус шара $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

11.3. На эллипсе $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$ даны две точки $A\left(\sqrt{3},-2\right)$ и $B\left(-2\sqrt{3},1\right)$. **Найти** на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была бы наибольшей.

Решение. Обозначим координаты искомой точки C за x, y, тогда площадь треугольника по формуле

$S=\frac{1}{2}|[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]|$ будет иметь вид

$S=\frac{1}{2}(\sqrt{3}(1-y)-2\sqrt{3}(y+2)+x(-2-1))=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-3\sqrt{3y}-4\sqrt{3}-3x).$

Из уравнения эллипса, как уравнения связи, находим $x=\pm\sqrt{15-3y^2}$.

Рассматривая площадь треугольника как функцию, исследуем ее на экстремум, беря производную по y: $S'_y=\frac{1}{2}(-3\sqrt{3}-3x'_y)$,

$\frac{2xx'_y}{15}+\frac{2y}{5}=0$, $x'_y=-\frac{3y}{x}$, $S'_y=\frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3}+\frac{9y}{\pm\sqrt{15-3y^2}}\right)$,

$\sqrt{3}\sqrt{15-3y^2}-3y=0$, $y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$. При отрицательном значении y производная знака не меняет. При переходе через точку $y=\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x=\sqrt{\frac{15}{2}}$ производная S'_y меняет знак с плюса на минус, следовательно, если координаты точки $C\left(\sqrt{\frac{15}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, то площадь треугольника ABC наибольшая.

11.4. Число 64 **разложить** на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение. Обозначим множители за x и y, тогда $xy = 64$. Сумму квадратов обозначим за $z=x^2+y^2$, $z=x^2+\frac{64^2}{x^2}$. Найдем минимум функции: $z'=2x-2\frac{64^2}{x^3}$, $x^4-64^2=0$, $(x^2-8^2)(x^2+64)=0$.

Производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = 8$ (рис. 7.34), т. е. функция имеет минимум, следовательно, при $x = 8$, $y = 8$ сумма квадратов наименьшая.

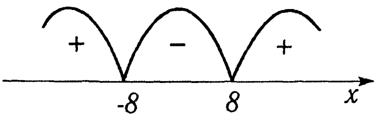


Рис. 7.34

11.5. Из углов квадратного листа железа со стороной a нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 7.35), получить коробку наибольшей вместимости. **Какова должна быть** сторона вырезанного квадрата?

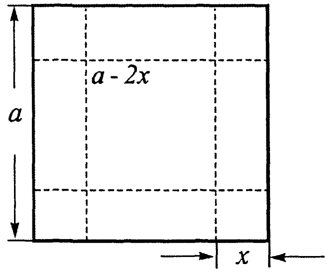


Рис. 7.35

Решение. Если обозначить сторону вырезаемого квадрата через x, то сторона основания коробки будет равна $a - 2x$, а высота — x. Объем коробки выразится функцией $V = (a-2x)^2 x$, причем $x \in [0, \frac{a}{2}]$. Находим максимум этой функции: $V' = (a-2x)(a-6x)$, $(a-2x)(a-6x) = 0$. Производная меняет знак с плюса на минус при переходе через $x = \frac{a}{6}$ (рис. 7.36). Следовательно, наибольшая вместимость коробки будет при стороне вырезаемых квадратов равной $\frac{a}{6}$.

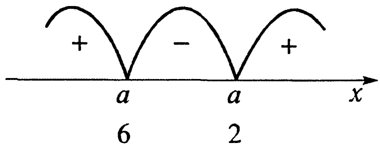


Рис. 7.36

11.6. Кусок угля массы m, лежащий на горизонтальной конвейерной ленте, должен быть сдвинут приложенной к нему силой (рис. 7.37). **Под каким углом** φ к горизонту следует приложить эту силу, чтобы величина ее была бы наименьшей, если коэффициент трения угля по резине $\mu = 0,6$?

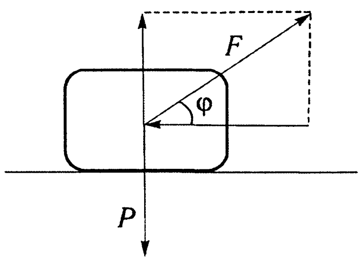


Рис. 7.37

Решение. Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие: $F\cos\varphi$ и $F\sin\varphi$. $F\cos\varphi$ — сдвигающая сила. Прижимающую силу находим, как разность силы веса куска и вертикальной составляющей $mg - F\sin\varphi$, где g — ускорение свободного падения. Согласно закону Кулона сдвигающая сила равна прижимающей, умноженной на коэффициент трения, т. е. $F\cos\varphi = \mu(mg - F\sin\varphi)$. Отсюда $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi}$.

Наименьшее значение силы будет при наибольшем значении знаменателя $y = \cos\varphi + \mu\sin\varphi$. Для отыскания наибольшего значения y приравниваем y' к нулю, получим

$-\sin\varphi+\mu\cos\varphi=0$, откуда $\operatorname{tg}\varphi=\mu$, $\varphi=\operatorname{arctg}\mu$ при $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Поскольку $y''=-\cos\varphi-\mu\sin\varphi<0$ при $\varphi=\operatorname{arctg}\mu$, то знаменатель y принимает наибольшее значение, а соответственно, сила — наименьшее, т. е. прилагать силу под углом φ наиболее выгодно. Угол φ — называется углом трения и в нашем случае равен $\varphi=\operatorname{arctg}0,6$.

11.7. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.

Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

Решение. Обозначим высоту балки через h, ширину через b (рис. 7. 38).

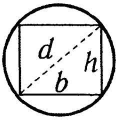


Рис. 7.38

Сопротивление на изгиб определяется функцией $y=bh^2$. Так как $h^2=d^2-b^2$, то $y=b(d^2-b^2)$. Исследуем эту функцию на экстремум: $y'=d^2-3b^2$, $d^2-3b^2=0$, $b=\frac{\sqrt{3}d}{3}$. Найдем вторую производную $y''=-6b$, при $b=\frac{\sqrt{3}}{3}d$, $y''=-2\sqrt{3}d<0$. Поскольку $y''<0$, то сопротивление балки на изгиб при $b=\frac{\sqrt{3}}{3}d$ будет наибольшим, высота балки при этом будет $h=\sqrt{\frac{2}{3}}d$.

11.8. Тело движется по закону $S = 21t + 3t^2 - t^3$. **Найти** его максимальную скорость.

Решение. Обозначим скорость $v = \dfrac{dS}{dt}$ за функцию, которую необходимо исследовать: $v = 21 + 6t - 3t^2$.

Исследуем функцию: $v' = 6 - 6t$, при $t = 1$ производная $v' = 0$. Так как $v'' = -6$ для любого *t*, то при $t = 1$ функция v имеет максимум, т. е. $v_{\max} = 24$ ед.скорости.

11.9. Уравнение движения снаряда, вылетающего из ствола орудия с начальной скоростью v_0 имеют вид

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где t — время, g — ускорение свободного падения, α — угол между горизонтом и направлением вылета.

Определить, под каким углом следует произвести выстрел, чтобы получить наибольшую дальность полета, если орудие стоит у подножья возвышенности, поверхность которой наклонена под углом β к горизонту (рис. 7.39).

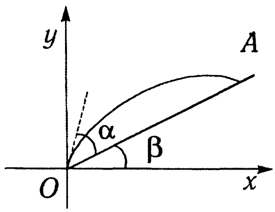


Рис. 7.39

Решение. Поскольку требуется найти наибольшую дальность полета в зависимости от α, то дальность полета x примем за функцию, а α — за независимую переменную. Для этого, исключая из уравнений движения t, запишем уравнение траектории $y = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Из условия равенства ординат в точке A прямой OA (рис. 7.39) $y = x\operatorname{tg}\beta$ и уравнения траектории находим, что

$$x\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad \text{или} \quad x = \frac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

Находим производную от дальности по α

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2\frac{v_0^2}{g}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta)$$

и приравниваем ее к нулю $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$, откуда $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\operatorname{tg}\beta$, $2\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$ или $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$. Находим вторую производную $\dfrac{d^2x}{d\alpha^2} = 4\dfrac{v_0^2}{g}(-\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\operatorname{tg}\beta)$. При $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$ вторая производная $\dfrac{d^2x}{d\alpha^2} < 0$, следовательно, найденный угол α обеспечивает наибольшую дальность полета.

11.10. Два источника света расположены друг от друга на расстоянии 25м. На прямой, соединяющей эти точки, **найти** наименее освещенную точку, если силы света источников относятся, как 27:8.

Решение. Пусть источники находятся в точках A и B, причем в точке A находится наиболее сильный источник. Считаем, что точка C наименее освещена и отстоит от точки A на расстоянии x (рис. 7.40), тогда $CB = 25 - x$. Если силу света более сильного источника принять за I, то сила света другого источника будет $\dfrac{8}{27}I$.

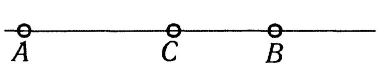


Рис. 7.40

Поскольку освещенность точки прямо пропорциональна силе света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до источника света, то, учитывая, что выбранная точка освещается обоими источниками света, функция освещенности в зависимости от расстояния примет вид

$$E=\frac{I}{x^2}+\frac{8}{27}\frac{I}{(25-x)^2}.$$

Находим производную $E'=-2\frac{I}{x^2}+\frac{16}{27}\frac{I}{(25-x)^3}$ и приравниваем ее к нулю, откуда $(25-x)^3-\frac{8}{27}x^3=0$ или $25-x=\frac{2}{3}x$.

Таким образом, наименее освещенная точка отстоит от источника A на расстоянии x = 15м.

Докажем это. Возьмем вторую производную от освещенности $E''=6\frac{I}{x^4}+\frac{48}{27}\frac{I}{(25-x)^4}$. Нетрудно заметить, что $E''>0$ при x = 15, следовательно, точка C есть точка минимума функции.

11.11. Электрическая лампа висит над центром круглого стола радиуса r. **На какой высоте** над столом должна находится лампа, чтобы книга, лежащая у края стола, была лучше всего освещена?

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 7.41). Зная, что освещенность E прямо пропорциональна косинусу угла падения и обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света, составим функцию: $E=k\frac{\cos\alpha}{R^2}$, где $k=const$. Из треугольника SAO находим: $R=\sqrt{x^2+r^2}$, $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$. Тогда

$$E=k\frac{x}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

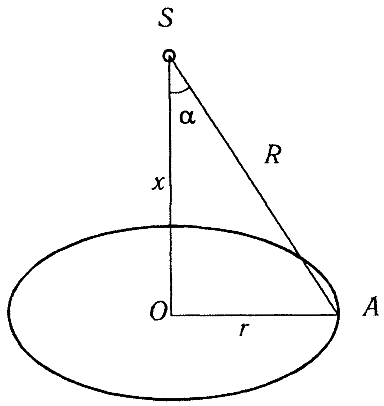


Рис. 7.41

Находим производную $E' = k\dfrac{r^2 - 2x^2}{(x^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$ и приравниваем ее к нулю $r^2 - 2x^2 = 0$, откуда $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Чтобы выяснить, имеет ли функция при данном значении x максимум, находим знак второй производной при $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$: $E'' = k\dfrac{3x(2x^2 - 3r^2)}{(x^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}$, $E''\left(\dfrac{r\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ — следовательно, функция имеет максимум и при высоте лампочки $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ книга лучше всего освещена.

11.12. Завод A отстоит от железной дороги, проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. **Под каким углом** α к железной дороге надо провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже, чем по железной дороге?

Решение. Обозначим стоимость перевоза груза на расстояние 1км по железной дороге за m руб., тогда стоимость перевоза по шоссе будет $2m$ руб. За b км обозначим расстояние от B до C (рис. 7.42). Из треугольника ACD длина шоссе $AD=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ км. Длина железной дороги $DB=b-a\operatorname{ctg}\alpha$, км.

Отсюда стоимость z перевозки груза с завода A в город B равна $z=\dfrac{2ma}{\sin\alpha}+m(b-a\operatorname{ctg}\alpha)$.

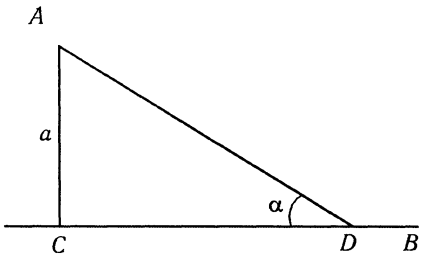


Рис. 7.42

Находим производную $\dfrac{dz}{d\alpha}=\dfrac{ma(1-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$ и приравниваем ее к нулю $1-2\cos\alpha=0$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. Исследуем функцию на экстремум при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ по знаку второй производной:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2}=\frac{2am\left(1-\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha},\quad z''\left(\frac{\pi}{3}\right)>0.$$

Следовательно, функция имеет минимум и, чтобы доставка груза была наиболее дешевой, то шоссе следует проводить под углом $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

11.13. Два самолета летят с одинаковой скоростью v км/ч, в одной плоскости, прямолинейно и под углом 60° друг к другу. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до нее на a км.

Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему оно равно?

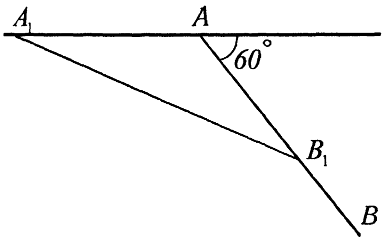


Рис. 7.43

Решение. По условию, когда один самолет был в точке A, другой был в точке B, отсюда $AB = a$ (рис. 7.43). За время t самолеты пройдут путь, соответственно: $AA_1 = vt$, $BB_1 = vt$. Отсюда $AB_1 = AB - BB_1 = a - vt$. Пусть расстояние между самолетами $A_1B_1 = S$, тогда по теореме косинусов получим $S = ((vt)^2 + (a - vt)^2 - 2vt(a - vt)\cos 120°)^{\frac{1}{2}}$ или $S = (v^2t^2 - 2vt + a^2)^{\frac{1}{2}}$.

Найдем производную $\dot{S} = \dfrac{2v^2t - av}{2(v^2t^2 - avt + a^2)^{\frac{1}{2}}}$ и приравняем ее к нулю: $2v^2t - av = 0$, $t = \dfrac{a}{2v}$. Вторая производная

$\ddot{S} = \dfrac{2v^2(v^2t^2 - avt + a^2) - \frac{1}{2}(2v^2t - av)^2}{2(v^2t^2 - avt + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ при $t = \dfrac{a}{2v}$ больше нуля, следовательно, функция имеет минимум.

Наименьшее расстояние между самолетами через $t = \dfrac{a}{2v}$ будет равно

$$S=\left(v^2\frac{a^2}{4v^2}-av\frac{a}{2v}+a^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

11.14. Стоимость топлива для судна пропорциональна кубу его скорости. **При какой скорости** судна общая сумма расходов на 1км пути будет наименьшей, если при скорости 20 км/ч расходы на топливо составляют 40 руб.в час, а остальные расходы 270 руб. в час?

Решение. Обозначим стоимость топлива через q, тогда $q=kv^3$, где k — коэффициент пропорциональности найдем из условия $40=k\cdot 20^3$, $k=0,005$.

Общая стоимость плавания судна в течение часа в рублях находится по формуле $Q=a+q=a+kv^3$, где a = 270руб. остальные расходы. Затраты на 1км пути выразятся в виде функции $u(v)=\frac{Q}{v}=\frac{a}{v}+av^2$.

Для нахождения общей наименьшей суммы расходов на 1км пути вычисляем производную $u'=-\frac{a}{v^2}+2kv$ и приравниваем ее к нулю $2kv^3-a=0$. Подставляя числовые значения, получим $v=30$ км/ч. Вторая производная

$$u''=\frac{2a}{v^3}+2k=\frac{540}{27000}+0{,}01=0{,}03>0,$$

следовательно, при скорости судна $v=30$ км/ч общая стоимость расходов на 1км пути будет наименьшей и составит

$$u=\frac{270}{30}+0{,}005\cdot 30^2=13{,}5 \text{ руб.}$$

7.12. Направление выпуклости кривой. Точки перегиба

Если кривая расположена в некотором интервале ниже любой своей касательной, то она называется *выпуклой вверх*, а если кривая расположена выше любой своей касательной, то она называется *выпуклой вниз*.

Функция $y = f(x)$ выпукла вверх, если $f''(x) < 0$ и выпукла вниз, если $f''(x) > 0$. Если $f''(x_0) = 0$ в некоторой точке x_0, бесконечна или вовсе не существует и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то график функции в точке x_0 имеет перегиб. Если же $f''(x)$ сохраняет знак, то перегиба нет.

Чтобы исследовать кривую $y = f(x)$ на направление выпуклости, надо найти вторую производную и приравнять ее к нулю $f''(x)=0$. Корни этого уравнения, а также возможные точки разрыва функции и второй производной разбивают область определения функции на ряд интервалов. Выпуклость на каждом из интервалов определяется знаком второй производной.

12.1. Исследовать на направление выпуклости и найти точки перегиба кривой: а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9;$; б) $y = x^4 - x + 1$.

Решение. а) Функция определена для любого значения x. Находим производные: $y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x$; $y'' = 36x^2 - 48x + 12$ и приравниваем вторую производную к нулю $(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{3}$ разбивают область определения функции на три интервала. Определяем методом интервалов (рис. 7.44) знак y'' на каждом промежутке.

Поскольку y'' при переходе через эти точки меняет знак, то в точках $x = \frac{1}{3}$ и x=1 функция имеет перегибы. На интервалах

$\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ и $]1, \infty[$ кривая выпукла вниз, а на интервале $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ выпукла вверх.

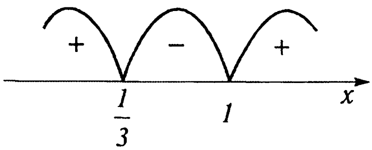


Рис. 7.44

б) Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю: $y' = 4x^3 - 1;\quad y'' = 12x^2;\quad 12x^2 = 0;\quad x = 0.$

При $x = 0$ вторая производная $y'' = 0$. Поскольку вторая производная при переходе через точку $x = 0$ знака не меняет и при любом значении x положительна, то кривая на всей числовой оси направлена выпуклостью вниз.

12.2. Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба кривой: а) $y = 1 + (x-3)^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{2}{3}}$; в) $y = 1 - |x^3 - 1|$.

Решение. а) Находим: $y' = \frac{5}{3}(x-3)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-3}}$. Вторая производная не существует в точке $x = 3$ и не обращается внуль ни при каких значениях x. При переходе через точку $x = 3$ вторая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, точка (3,1) является точкой перегиба. Поскольку при $x \in]-\infty, 3[$ $y'' < 0$, то в этом интервале кривая выпукла вверх. При $x \in]3, \infty[$ $y'' > 0$, следовательно, кривая выпукла вниз.

б) Найдем вторую производную: $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Производная y'' нигде в нуль не обращается. При $x = 0$ вторая производная не существует. При переходе через точку $x = 0$ вторая производная знака не меняет: $y''(0-\varepsilon) > 0$, $y''(0+\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$. При $x \in]-\infty, \infty[$ $y'' < 0$, следовательно, кривая выпукла вверх на всей числовой оси.

в) Находим точки x, в которых $y'' = 0$ или не существует: $y' = \pm 3x^2$, $y'' = \pm 6x$, где знак плюс соответствует значениям $x \in]-\infty, 1[$ (x^3–1<0), а минус — $x \in]1, \infty[$ (x^3–1>0).

Поскольку при $x = 0$ вторая производная $y'' = 0$, а при $x = 1$ не существует, то эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба. Знак y'' слева и справа от точек $x = 0$ и $x = 1$ показан на рис. 7.45. Так как y'' при переходе через точки $x = 0$ и $x = 1$

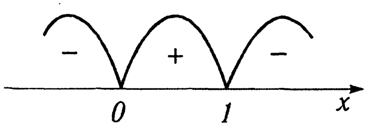


Рис. 7.45

меняет знаки, то $x = 0$ и $x = 1$ — абсциссы точек перегиба. При $x \in]-\infty, 0]$ $y'' < 0$ — кривая выпукла вверх, при $x \in]0, 1]$ $y'' > 0$ — кривая выпукла вниз, при $x \in]1, \infty]$ $y'' < 0$ — кривая выпукла вверх. Определяя ординаты точек перегиба $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, строим кривую (рис. 7.46).

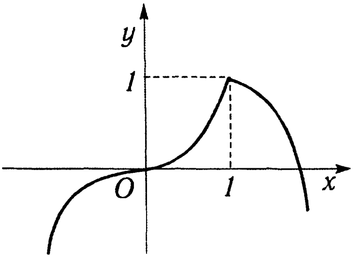


Рис. 7.46

7.13. Асимптоты кривой

1°. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* для кривой $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$, т. е. если расстояние от точки кривой до прямой стремится к нулю. Параметры k и b находятся с помощью пределов $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. Если хотя бы один предел бесконечен, то асимптот нет.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$, то кривая $y=f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=b$.

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то кривая $y=f(x)$ при приближении x к a будет безгранично приближаться, уходя в бесконечность, к вертикальной прямой $x=a$. Прямую $x=a$ называют *вертикальной асимптотой*. Как правило, это точки разрыва.

2°. Если кривая задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то исследуют, нет ли таких значений параметра t, при которых функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ или одна из них обращается в бесконечность.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}$, $b=\lim\limits_{t\to t_0}\big(\psi(t)-k\varphi(t)\big)$, причем $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=\infty$.

Если при $\psi(t_0)=\infty$, $\varphi(t_0)=C$, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x=C$. Если при $\varphi(t_0)=\infty$, $\psi(t_0)=C$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=C$.

3°. Если кривая задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат, то, преобразовав уравнение кривой к параметрическому виду по формулам $x=\rho\cos\varphi=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi=\rho(\varphi)\sin\varphi$, ее асимптоты находят по предыдущему правилу.

4°. Если кривая задана уравнением $F(x,y)=0$ (т. е. неявно), то для отыскания асимптот в ряде случаев удобнее представить ее в полярных координатах или перейти к параметрическому виду.

Для алгебраической кривой $\sum\limits_{k,l} a_{kl}x^k y^l = 0$, где суммирование идет по всем целым k и l; ($0 \le k \le n$; $0 \le l \le n$), наклонная асимптота $y = kx + b$ находится подстановкой ее в уравнение кривой и приравниванием к нулю, в получившемся многочлене относительно x, коэфициентов при двух старших степенях x. Из решения этой системы относительно k и b находим параметры наклонной асимптоты.

Вертикальная асимптота алгебраической кривой находится из приравнивания к нулю коэффициента при старшей степени y.

13.1. Найти асимптоты кривых: а) $y=\dfrac{x^2+3x+6}{x-1}$; б) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; в) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. а) При $x=1$ функция терпит разрыв, причем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+3x+6}{x-1}=-\infty, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+3x+6}{x-1}=\infty.$$

То есть прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Находим параметры k и b наклонной асимптоты

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+6}{x(x-1)}=1;\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x+6}{x-1}-x\right)=4.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=x+4$. График кривой и асимптоты показаны на рис. 7.47.

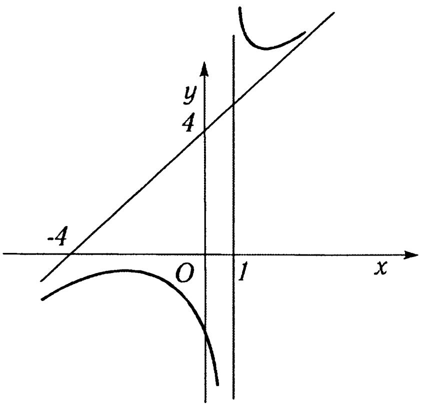


Рис. 7.47

б) Так как $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x}{x^2-1}=\infty$, то прямые $x=1$ и $x=-1$ будут вертикальными асимптотами.

Так как при $x\to\infty$ предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$, то прямая $y=0$ будет горизонтальной асимптотой.

Поскольку $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x(x^2-1)}=0$ и $b=0$, то наклонных асимптот нет. График функции и асимптоты показаны на рис. 7.48.

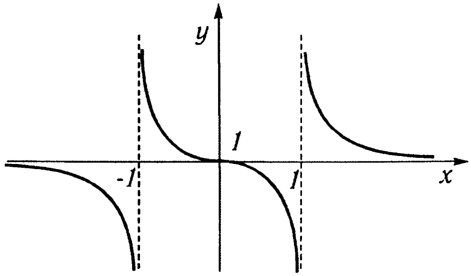


Рис. 7.48

в) Функция определена на всей числовой оси x, бесконечных разрывов не имеет, поэтому не имеет и вертикальных асимптот.

Определяем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin\ x}{x^2} = 0,\quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin\ x}{x} = 0,$$

следовательно, $y = 0$ будет ее горизонтальной асимптотой.

Данная кривая бесчисленное множество раз пересекает свою асимптоту $y = 0$, переходя с одной ее стороны на другую в точках $x = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$ и неограниченно приближаясь к ней (рис. 7.49).

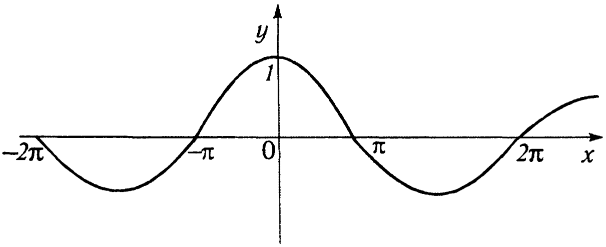


Рис. 7.49

13.2. Найти асимптоты кривых: а) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Решение. а) Найдем горизонтальную асимптоту

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

следовательно, горизонтальная асимптота имеет вид $y = 1$.

Найдем теперь вертикальную асимптоту:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \qquad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

следовательно, $x = 0$ — вертикальная асимптота (рис. 7.50).

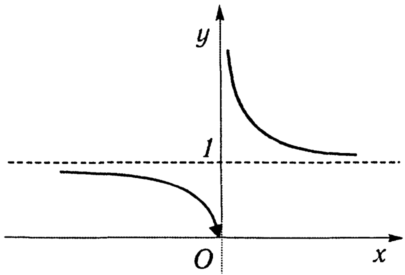


Рис. 7.50

б) Функция определена при $x \in]-\infty, 0]$ и $]1, +\infty[$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой кривой. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \infty$, то горизонтальных асимптот кривая не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$1)\quad k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x-x+1)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2},$$

следовательно, наклонная асимптота имеет вид $y = x + \frac{1}{2}$.

2) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}{x}$; $\qquad b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}+x\right)$.

Сделаем замену: $x=-t,\ x\to-\infty,\quad t\to\infty$, тогда:

$$k=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{t^3}{t+1}}}{-t}=-\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t}{t+1}}=-\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{1}{t}}}=-1,$$

$$b=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{t^3}{t+1}}-t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left(\sqrt{t}-\sqrt{t+1}\right)}{\sqrt{t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left(t-t-1\right)}{\sqrt{t+1}\left(\sqrt{t}+\sqrt{t+1}\right)}=$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\right)}=-\frac{1}{2},$$

следовательно, наклонная асимптота имеет вид $y=-x-\dfrac{1}{2}$. График функции и асимптоты показаны на рис. 7.51.

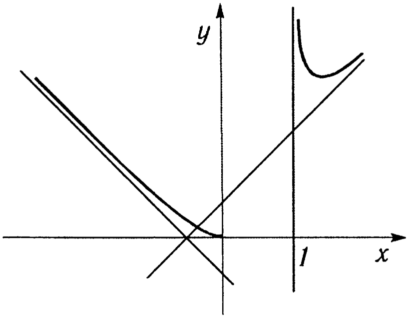


Рис. 7.51

13.3. Найти асимптоты кривых: а) $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t-1}$; б) $x=\frac{e^t}{1-t^2}$, $y=\frac{te^t}{1-t^2}$; в) $\rho=\frac{a}{\varphi}$.

Решение. а) При $t\to 0$ $x\to\infty$; $y=\frac{0}{0-1}=0$, следовательно, кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=0$. При $t\to 1$ $x\to 1$; $y\to\infty$, следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

б) При $t\to\pm 1$ функция обращается в бесконечность. Ищем уравнения наклонных асимптот:

$$k=\lim_{t\to\pm 1}\frac{\dfrac{te^t}{1-t^2}}{\dfrac{e^t}{1-t^2}}=\pm 1,$$

$$b_1=\lim_{t\to 1}\left(\frac{te^t}{1-t^2}-\frac{e^t}{1-t^2}\right)=\lim_{t\to 1}\frac{e^t(t-1)}{(1-t)(1+t)}=-\lim_{t\to 1}\frac{e^t}{1+t}=-\frac{e}{2},$$

$$b_2=\lim_{t\to -1}\left(\frac{te^t}{1-t^2}+\frac{e^t}{1-t^2}\right)=\lim_{t\to -1}\frac{e^t(t+1)}{(1-t)(1+t)}=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e},$$

следовательно, наклонные асимптоты имеют вид $y=x-\frac{e}{2}$, $y=-x+\frac{1}{2e}$.

в) Приведем уравнение заданное в полярных координатах к параметрическому виду: $x=\frac{a\cos\varphi}{\varphi}$, $y=\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$, где φ — параметр. При $\varphi\to 0$ $x\to\infty$, $y=a$, т. к. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{a\sin\varphi}{\varphi}=a$. Следовательно, кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=a$ (рис. 7.52).

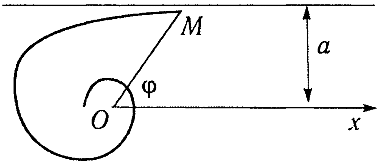


Рис. 7.52

13.4. Найти асимптоты кривых: а) $y^3 = 6x^2 + x^3$; б) $y = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$.

Решение. а) Поскольку коэфициент при старшей степени y (т. е. при y^3) равен 1, то вертикальных асимптот нет. Для нахождения наклонных асимптот подставим в данное уравнение $y = kx + b$, тогда получим

$$k^3x^3 + 3k^2x^2b + 3kxb^2 + b^3 - 6x^2 - x^3 = 0 \cdot$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при старших степенях x (т. е. при x^3 и x^2), получим систему

$$\begin{cases} k^3 - 1 = 0; \\ 3k^2b - 6 = 0. \end{cases}$$

Из решения системы имеем $k = 1$, $b = 2$. Таким образом, кривая имеет одну наклонную асимптоту $y = x + 2$.

б) Так как функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой кривой. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x^2} = 0, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x} - 0 \cdot x \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x} - 0 \cdot x \right).$$

Сделаем замену: $x = -t, \quad x \to -\infty, \quad t \to \infty$, тогда

$$b = \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{|t^2 - 1|}}{-t} = -1 .$$

Если найти вторую производную $f''(x) = -\dfrac{3x^2 - 2}{x^3 \left(x^2 - 1\right)^{3/2}}$ и учесть выпуклость, вогнутость и точки перегиба $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, то можно построить асимптоты и график функции (рис. 7.53).

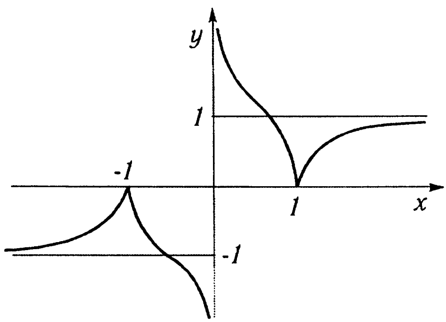


Рис. 7.53

7.14. Исследование функции и построение графиков

При исследовании функции и построении ее графика рекомендуется примерная схема:

1. Определить область существования функции. Найти точки разрыва функции и односторонние пределы в точках разрыва.

2. Выяснить, не является ли функция периодической, четной или нечетной, т. е. не симметричен ли график относительно оси ординат или начала координат.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

4. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции. Определить значения функции в точках экстремума, если такие существуют.

5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Определить значения функции в точках перегиба.

6. Определить асимптоты функции.

7. Построить график функции, используя все полученные данные.

По мере построения графика бывает очевидным, какие вопросы исследования целесообразно опустить, а какие добавить. Если данных для построения недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения. Результаты исследования функции целесообразно заносить сразу же на рисунок, тогда к концу проведения исследования график будет практически построен.

14.1. Исследовать функции и построить их графики: а) $y = x^4 - 8x^2 - 9$; б) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; в) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$; г) $y = x^2 e^{-x}$; д) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

Решение. а) Областью существования функции является вся числовая ось. Функция четная, следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

Полагая $x = 0$, находим точку пресечения графика с осью ординат $y = -9$.

Приведем функцию к виду $y=(x^2+1)(x^2-9)$, тогда, решая уравнение $(x^2+1)(x^2-9)=0$, точки пересечения с осью абсцисс будут $x=\pm3$.

Находим производную $y'=4x^3-16x$ и приравниваем ее к нулю $4x^3-16x=0$. Из решения уравнения $x(x^2-4)=0$ находим критические точки $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$. Находим вторую производную $y''=12x^2-16$. Так как $y''(\pm2)>0$, то точки $x_2=2$ и $x_3=-2$ есть точки минимума функции, а так как $y''(0)<0$, то точка $x=0$ есть точка максимума. Значения функции в экстремальных точках равны: $y(0)=-9$; $y(\pm2)=-25$.

Чтобы отыскать возможные точки перегиба, решаем уравнение: $y''=0$; $12x^2-16=0$, откуда $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Так как y'' меняет свой знак при переходе через эти точки, то при этих значениях x график функции имеет перегиб. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{161}{9}$.

При неограниченном возрастании x по абсолютной величине функция стремится к бесконечности $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^4-8x^2-9)=\infty$. График функции показан на рис. 7.54.

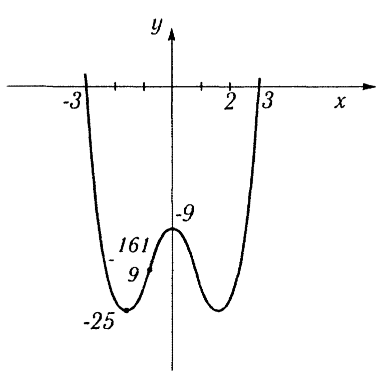


Рис. 7.54

б) Функция существует всюду, кроме точек $x=\pm\sqrt{3}$. Прямые $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами функции. Найдем односторонние пределы в точках разрыва

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\infty;\qquad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\infty;\qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty.$$

Функция нечетна, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. При $x=0$ имеем $y=0$, следовательно, график функции проходит через начало координат.

Находим производную $y'=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$ и приравниваем ее к нулю $x^2(3-x)(3+x)=0$. Корни этого уравнения $x_1=-3,\ \ x_2=0,\ \ x_3=3$.

Рассмотрим методом интервалов изменение знака y' при переходе через эти точки (рис. 7.55). Следовательно, в точке $x=-3$ функция имеет минимум y(-3)=4,5, а в точке $x=3$ имеет максимум $y(3)=-4{,}5$. При переходе через $x=0$ производная знака не меняет, следовательно, в точке $x=0$ экстремума нет.

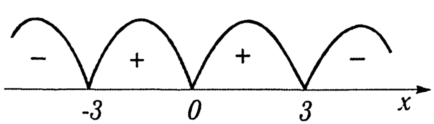


Рис. 7.55

Находим вторую производную $y''=\dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$. Вторая производная $y''=0$ при $x=0$ и меняет знак с минуса на плюс при переходе через эту точку, следовательно, и точка $x=0$ есть точка перегиба.

Находим асимптоты кривой:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)}=-1; \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0,$$

следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту $y=-x$. График функции показан на рис. 7.56.

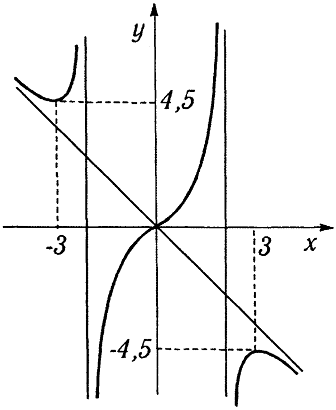


Рис. 7.56

в) Находим область существования функции. Функция существует при $\frac{x-2}{x+1}>0$, т. е. при $x\in]-\infty,-1[$ и $x\in]2,\infty[$ (рис. 7.57).

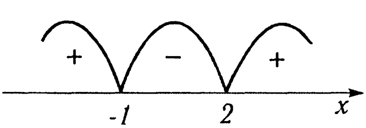


Рис. 7.57

Находим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to-1-0}\ln\frac{x-2}{x+1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0}\ln\frac{x-2}{x+1}=-\infty$. Следовательно, прямые $x=-1$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами.

Находим производную $y' = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$. Производная не обращается в нуль ни при каком значении x, значит экстремумов нет.

Найдем вторую производную $y'' = \dfrac{3(1-2x)}{(x+1)^2(x-2)^2}$ и приравняем ее к нулю $1-2x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, но точка $x=\dfrac{1}{2}$ не входит в область существования функции. При $x<-1$ имеем $y''>0$ — кривая выпукла вниз; при $x>2$ имеем $y''<0$ — кривая выпукла вверх.

Находим при $x \to \pm\infty$ предельное значение функции $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\dfrac{x-2}{x+1} = 0$, следовательно, прямая $y=0$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 7.58.

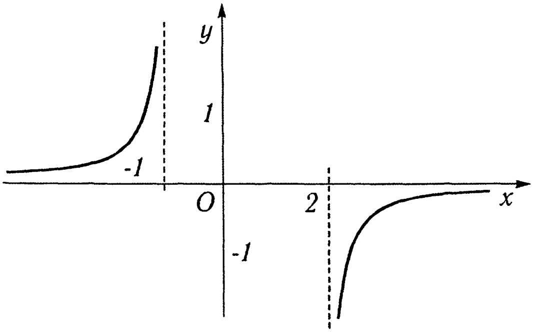


Рис. 7.58

г) Областью существования функции является вся числовая ось. При $x=0$ функция равна нулю. Так как $x^2 \geq 0$ и $e^{-x} > 0$, то $y \geq 0$ при любом x.

Находим производную $y' = xe^{-x}(2-x)$ и приравниваем ее к нулю $xe^{-x}(2-x)=0$.

Решая это уравнение, находим критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Поскольку производная меняет знак согласно схеме (рис. 7.59), то в точке $x=0$ функция имеет максимум, равный нулю, а в точке $x=2$ минимум, равный $y(2)=\frac{4}{e^2}$.

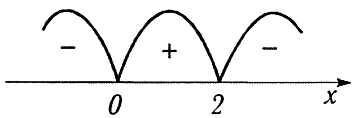


Рис. 7.59

Находим вторую производную $y'' = e^{-x}(2-4x+x^2)$ и приравниваем ее к нулю $e^{-x}(2-4x+x^2)=0$, откуда $x_{1,2} = 2\pm\sqrt{2}$. Поскольку вторая производная меняет знак согласно схеме (рис. 7.60), то в точках $x_{1,2} = 2\pm\sqrt{2}$ функция имеет перегиб и при $x < 2-\sqrt{2}$ кривая выпукла вниз, при $x \in]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$ кривая выпукла вверх, при $x \in]2+\sqrt{2}, \infty[$ кривая выпукла вниз.

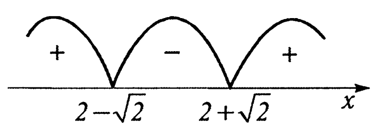


Рис. 7.60

Находим пределы:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0,$$

т. е. прямая $y=0$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 7.61.

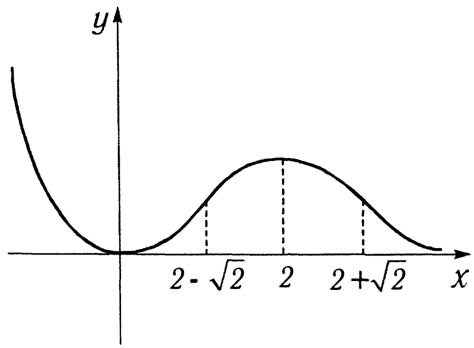


Рис. 7.61

д) Функция существует для всех значений x, кроме $x=1$. При $x=1$ функция терпит разрыв. При $x=0$ функция равна нулю. При $x\neq 0$ имеем $y>0$, т. е. функция не отрицательна.

Находим производную $y'=-\dfrac{2x}{(x-1)^3}$ и приравниваем ее к нулю $x=0$. Находим вторую производную $y''=\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ и определяем ее знак при $x=0$. Поскольку $y''(0)>0$, то при $x=0$ функция имеет минимум, равный $y(0)=0$.

Вторая производня $y''=0$ при $x=-\dfrac{1}{2}$ и меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через эту точку, следовательно, при $x=-\dfrac{1}{2}$ кривая имеет перегиб, ордината которого равна $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{9}$.

Находим предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=\infty$, т. е. прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота. При $x\to\pm\infty$ предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$, т. е.

прямая $y=1$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 7.62.

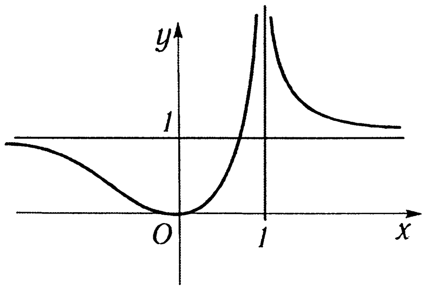


Рис. 7.62

14.2. Исследовать функции и построить их графики: а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi[$; б) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$; в) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

Решение. а) Функции определены для любого значения t. Поскольку функция x четная, а y нечетная, то график функции симметричен относительно оси ординат и начала координат, т. е. относительно координатных осей.

Полагая $x=0$, находим, что $\cos t=0$ и $t=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

При этих значениях t из выражения $y=a\sin^3 t$ находим, что $y=\pm a$.

Полагая $y=0$, находим, что $\sin t=0$ и $t=0;\pi$. При этих значениях t из выражения $y=a\cos^3 t$ находим, что $x=\pm a$. Таким образом, график функции пересекает координатные оси в точках $(a,0)$; $(0,a)$; $(-a,0)$; $(0,-a)$.

Найдем производные $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t=3a\sin^2 t\cos\ t$, $y'_t=\dfrac{y'_y}{x'_t}=-\operatorname{tg} t$, $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$. Из выражения для производной y' определяем критические точки. При $t=0$, $t=\pi$ производная равна нулю, а при $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{3\pi}{2}$ не существует. Таким образом, область изменения параметра t разбивается на четыре интервала $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$; $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

При $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ производная $y'_x<0$, а $y''_{xx}>0$, т. е. функция убывает и график функции направлен выпуклостью вниз. При $t\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ $y'_x>0$ и $y''_{xx}>0$, т. е. функция возрастает и график направлен выпуклостью вниз.

При $t\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ $y'<0$ и $y''_{xx}<0$, т. е. функция убывает и график направлен выпуклостью вверх. При $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ $y'_x>0$, а $y''_{xx}<0$, т. е. функция возрастает и график направлен выпуклостью вверх. Кстати, пользуясь симметрией графика функции, этот анализ можно было ограничить изменением параметра только одним интервалом, например, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

При $t=\{0,\pi\}$ производная $y'_x=0$, $y=0$ и касательные совпадают с осью x, т. е. точки $(a,0)$ и $(-a,0)$ будут точками возврата. При $t=\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}$ проиводная y'_x не существует, а при $x=0$, касательные совпадают с осью y и точки$(0,a)$, $(0,-a)$ будут также точками возврата. Учитывая все это, представим график функции (рис. 7.63). Полученная кривая представляет траекторию движения точки подвижного круга, катящегося изнутри по неподвижному кругу радиуса a, и называется астроидой.

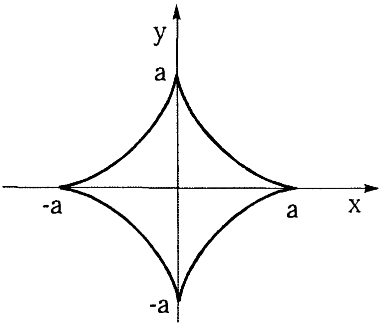


Рис. 7.63

б) Функция определена при любом значении параметра t из интервала $t \in [0, 2\pi]$. Найдем точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0$, $\sin t = t$, $t = 0$. При $y = 0$, $\cos t = 1$, $t = 0$, $t = 2\pi$. Отсюда следует, что кривая при $t = 0$ проходит через начало координат, а при $t = 2\pi$ пересекает ось Ox в точке $x = 2\pi a$.

Найдем производные $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$,

$$y'_x = \frac{\sin t}{1-\cos t}, \quad y''_{xx} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Приравнивая y'_x к нулю, из уравнения $\sin t = 0$ находим значения параметра в критических точках $t = \{0; \pi; 2\pi\}$. Первая производная не существует при $1 - \cos t = 0$, т. е. при значениях параметра $t = \{0; 2\pi\}$. При переходе параметра через критические значения $t = \{0; 2\pi\}$, т. е. в окрестности $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$, $(2\pi - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$, где $|\varepsilon| > 0$, производная y'_x меняет знак с минуса на плюс. Отсюда следует, что касательная к графику функции в точках $x = \{0; 2\pi a\}$ параллельна оси Oy. При $t = \pi$ вторая производная $y''_{xx} < 0$, т. е. точка $x = \pi a$ точка максимума функции $y = 2a$. Более того, поскольку $y''_{xx} < 0$ на всем интервале $t \in [0; 2\pi]$, то кривая на этом интервале выпукла вверх.

При изменении t от 0 до π производная $y'_x > 0$, следовательно, кривая возрастает. При изменении t от π до 2π производная $y'_x < 0$, следовательно, кривая убывает. Все сказанное позволяет представить график в виде (рис. 7.64). Полученная кривая представляет траекторию точки круга радиуса a катящегося без скольжения по прямой Ox за время одного оборота круга и называется циклоидой.

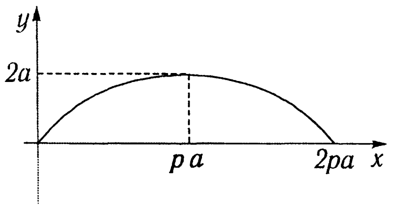


Рис. 7.64

в) Функция определена при всех значениях t, кроме $t = -1$. При $t = 0$ координаты $x = 0$, $y = 0$ и при $t \to \pm\infty$ координаты $x, y \to 0$, т. е. начало координат служит особой точкой и в нем кривая сама себя пересекает.

Найдем наклонную асимптоту. Угловой коэффициент равен

$$k = \lim_{x\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{x\to-1} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} \frac{1+t^3}{3at} \right) = -1.$$

Параметр

$$b = \lim_{x\to-1} \left(y(t) - kx(t) \right) = \lim_{x\to-1} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) =$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Отсюда уравнение асимптоты $x + y + a = 0$.

При изменении t от $-\infty$ до -1, точка (x,y) из начала координат удаляется в бесконечность, причем значения x — положительны, а y — отрицательны, т. е. ограничены асимптотой, расположенной в четвертом квадранте.

При изменении t от -1 до 0 точка (x,y) из бесконечности возвращается к началу координат, причем значения x — отрицательны, а y — положительны, т. е. ограничены асимптотой, расположенной во втором квадранте. При изменении t от 0 до $-\infty$ точка описывает против часовой стрелки петлю, расположенную, судя по значениям x,y, в первом квадранте.

Обозначая $t=\dfrac{y}{x}$, нетрудно перейти к уравнению функции в неявном виде $F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0$. Находим производные $f'_x=3(x^2-ay)$, $F'_y=3(y^2-ax)$, $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{x^2-ay}{y^2-ax}$. Приравнивая $y'_x=0$ и решая это уравнение совместно с уравнением $F(x,y)=0$, находим критические точки $x=0,\ y=0$ и $x=a\sqrt[3]{2},\ \ y=a\sqrt[3]{4}$. Вычислим y''_{xx} при $x=a\sqrt[3]{2}$ по формуле $y''_{xx}=-\dfrac{F''_{xx}}{F'_y}=-\dfrac{6x}{3(y^2-ax)}$. Так как в исследуемой точке $y''_{xx}<0$, то это точка максимума $y_{\max}=a\sqrt[3]{4};\quad x=a\sqrt[3]{2}$.

В точке (0,0) $F'_x=0$ и $F'_y=0$, поэтому можно утверждать, что касательными в этой точке служат оси координат. Учитывая все это, представим график функции (рис. 7.65). Полученная кривая называется декартовым листом.

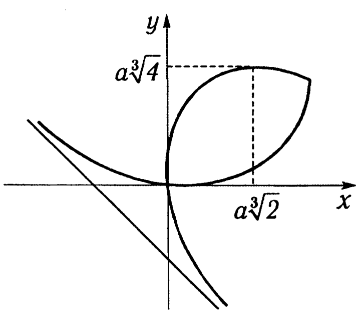


Рис. 7.65

7.15. Формула Тейлора и Маклорена

1°. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x_0 = a$, то она может быть представлена в виде суммы многочлена n-ой степени и остаточного члена R_n (формула Тейлора)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \quad (1)$$

где $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$; $c=a+\theta(x-a)$; $0<\theta<1$ — остаточный член в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (n-го порядка) позволяет представить функцию $f(x)$ в виде многочлена n-ой степени и оценить с помощью остаточного члена R_n возникающую при этом погрешность, которая может быть сделана сколь угодно малой.

2°. При $a = 0$ формула (1) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n, \quad (2)$$

где $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$; $0<\theta<1$, и называется формулой Маклорена. К этому частному случаю формулу Тейлора можно свести с помощью перехода к новой независимой переменной $\xi = x-a$.

Остаточный член в формуле Тейлора иногда записывают в форме Пеано $R_n = O((x-a)^n)$, которая в ряде случаев бывает более удобна (вычисление пределов). Остаточный член в форме Пеано для формулы Маклорена имеет вид $R_n = O(x^n)$.

15.1. Для функций а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $(1+x)^m$; д) $\ln(1+x)$, написать формулу Маклорена n-го порядка и оценить погрешность.

Решение. а) Если $f(x)=e^x$, то и $f^{(n)}(x)=e^x$ при любом $n = 1,2,3,\ ...$

Так как $f(0)=1$, и $f^{(n)}(0)=1$, то по формуле (2)

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ ...\ +\frac{x^n}{n!}+R_n.$$

Точность разложения определяется остаточным членом $R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Оценим погрешность. Так как $|R_n|<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$, то, например, при $x = 1$, $|R_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}$; при $x = 2$, $|R_n(2)|<\frac{10\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$ и т. д. При любом значении x при $n\to\infty$ остаточный член стремится к нулю и чем больше n, тем точнее разложение. При $x = 1$ можно получить формулу для приближенного вычисления числа e

$$e\simeq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ ...\ +\frac{1}{n!}.$$

б) Пусть $f(x)=\sin x$, тогда $f(0)=0$;

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),\quad f'''(0)=-1;$$

....

$$f^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Разложение примет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \ldots \ + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_n.$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}) \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

т. к. $|\sin\alpha| \le 1$ и при $n \to \infty$ стремится к нулю независимо от значения x.

в) Если $f(x) = \cos x$, то $f(0) = 1$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = 0;$$

....

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}.$$

Разложение примет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \ldots \ + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_n.$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\theta x + (2m+2)\frac{\pi}{2}) \le \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

т. к. $|\cos\alpha| \le 1$ и при $n \to \infty$ стремится к нулю независимо от значения x.

г) Рассмотрим степенную функцию $(1+x)^m$, где m — любое вещественное число.

Разложим $(1+x)^m$ по степеням x, т. е. в окрестности точки $x_0 = 0$

$$f(x) = (1+x)^m, \qquad f(1) = 1;$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \qquad f'(1) = m;$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad f''(1) = m(m-1);$$

....

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

$$f^{(k)}(1) = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1).$$

Разложение примет вид

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ \ldots\ + \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}, \qquad (0<\theta<1).$

Здесь $R_n \to 0$ с возрастанием n только при $x \in]-1,1[$, т. е. погрешность может быть сколь угодно малой величиной только для значений из указанного интервала.

д) Находим производные и их значения в точке $x = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 1\cdot 2;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \qquad f^{(4)}(4) = -1\cdot 2\cdot 3;$$

....

Подставляя в формулу Маклорена, получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots \ + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{n}{1+\theta x}\right)^{n+1}$.

Погрешность вычисления логарифма $R_n \to 0$ с возрастанием n только при $x \in]-1,1]$, т. е. в полуоткрытом интервале.

15.2. Разложить многочлен $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5$ по степеням двучлена $x + 2$.

Решение. Введем обозначение $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5$ и найдем производные:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 3$, $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$, $f'''(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(n)} = 0$ для $n \geq 5$. При $x = -2$ имеем: $f(-2) = 25$, $f'(-2) = -57$, $f''(-2) = 74$, $f'''(-2) = 36$, $f^{(4)}(-2) = 24$.

Отсюда $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5 = 25 - 57(x+2) + 37(x+2)^2 - -10(x+2)^3 + (x+2)^4$.

15.3. Пользуясь формулой Тейлора, разложить функцию $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^2$ по степеням x.

Решение. Находим производные и их значения при $x = 0$

$$f'(x) = 2(x^3 + 2x - 1)(3x^2 + 2), \qquad f'(0) = -4;$$

$$f''(x) = 2((3x^2 + 2)^2 + 6x^4 + 12x^2 - 6x), \qquad f''(0) = 8;$$

$$f'''(x) = 12(2(3x^2 + 2)x + 4x^3 + 4x - 1), \qquad f'''(0) = -12;$$

$$f^{(4)}(x) = 12(30x^2 + 8), \qquad f^{(4)}(0) = 96;$$

$$f^{(5)}(x) = 720x, \qquad f^{(5)}(0) = 0;$$

$$f^{(6)}(x) = 720, \qquad f^{(6)}(0) = 720.$$

Подставляя значение $f(0)=1$ и значения производных в формулу Тейлора при $x = 0$, получим

$$(x^3+2x-1)^2=1-4x+4x^2-2x^3+4x^4+x^6.$$

15.4. Представить функцию $\sqrt[4]{x}$ в виде многочлена четвертой степени относительно $x-1$.

Решение. Находим значения функции и ее производных в точке $a = 1$:

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}};\quad f(1)=1;\qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{4}{3}};\quad f'(1)=\frac{1}{4};$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}};\qquad f''(1)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4};$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}};\qquad f'''(1)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4};$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}x^{-\frac{15}{4}};\quad f^{(4)}(1)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}.$$

По формуле (1) имеем

$$\sqrt[4]{x}=1+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{1\cdot3\cdot7}{4^3}\frac{(x-1)^3}{3!}-$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot7\cdot11}{4^4}\frac{(x-1)^4}{4!}+R_n,$$

где $R_n=\dfrac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5;\qquad c=1+\theta(x-1);\qquad 0<\theta<1.$

15.5. Написать разложение функции: а) $e^{\cos x}$ до члена с x^4; б) $\ln\cos x$ до x^6.

Решение. а) Пользуясь уже известным разложением (15.1,а) и принимая $\cos x$ за новую переменную, запишем

$$e^{\cos x} = 1 + \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{6} + \frac{\cos^4 x}{24} + O\left(\cos^4 x\right).$$

Так как по формуле (15.1,в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$, то окончательно имеем

$$e^{\cos x} = 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\frac{x^4}{24} +$$

$$+\frac{1}{6}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{x^4}{24} + \frac{1}{24}\left(\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^4 + 4\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^3 \frac{x^4}{24}\right) + O(x^5) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(65 - 32x^2 + \frac{61}{6}x^4\right) + O\left(x^5\right).$$

б) Представим логарифм в виде $\ln\cos x = \ln\left(1 + (\cos x - 1)\right)$ и воспользуемся разложением (15.1,д), принимая $\cos x - 1$ за новую переменную

$$\ln\cos x = \cos x - 1 - \frac{1}{2}(\cos\ x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos\ x - 1)^3 + O(x^6).$$

Здесь остаточный член $R_n = O(x^6)$, так как бесконечно малые x и $\sin x$ эквивалентны и, следовательно, $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ одного порядка с x^2.

С другой стороны имеем

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^7).$$

Отсюда

$$\ln\cos x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+O\left(x^6\right)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+O\left(x^6\right).$$

15.6. Вычислить с точностью 0,001 приближенные значения следующих чисел: а) $\sin 20^\circ$; б) $\cos 65^\circ$.

Решение. а) Воспользуемся формулой разложения $\sin x$ по степеням x (15.1,б), подставляя в нее радианную меру угла

$$x=\frac{\pi}{180}20=\frac{\pi}{9}$$

$$\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{\pi^3}{3!9^3}+\frac{\pi^5}{5!9^5}-\ \dots\ +(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!9^{2m-1}}+R_n.$$

При определении числа первых членов в данном разложении, необходимых для обеспечения требуемой точности вычислений, оценим величины последовательных остаточных членов

$$|R_1|\le\frac{\pi^3}{3!9^3}<0,006,\qquad |R_2|\le\frac{\pi^5}{5!9^5}<0,00003.$$

Поскольку $|R_2|<10^{-3}$, то для получения требуемой точности достаточно взять первые два члена разложения, предшествующих R_2

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{3!9^3}=0,3491-0,0071=0,342.$$

Здесь значения числа $\pi\simeq 3,14159$ и результатов промежуточных вычислений взяты с одним лишним знаком, т. е. с точностью до 10^{-4}.

б) Представим функцию $\cos x$ по формуле Тейлора в виде

$$\cos x=\cos a+\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\frac{x-a}{1!}+\cos\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^2}{2!}+$$

$$+ \ \dots \ + \cos\left(a + n\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n,$$

$$R_n = \cos\left(a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (0 < \theta < 1).$$

Поскольку $|\cos\alpha| \le 1$, то $|R_n| \le \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ и по мере увеличения числа членов погрешность неограниченно убывает, стремясь к нулю. Причем чем меньше по абсолютной величине разность $x-a$, тем меньше потребуется первых членов разложения для обеспечения требуемой точности вычислений.

Пусть $a = 60°$ или в радианной мере $a = \dfrac{\pi}{180}60$, тогда

$x - a = \dfrac{\pi}{180}(65-60) = \dfrac{\pi}{36}$, отсюда

$$\cos 65° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{1!36} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi^3}{3!36^3} + \ \dots \ + R_n.$$

Поскольку $|R_4| < 10^{-4}$, то для получения требуемой точности достаточно взять первые три члена разложения, тогда $\cos 65° = 0,4221$.

Глава 8
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Понятие о функции нескольких переменных. Область определения

1°. Если в силу некоторого закона каждой совокупности n чисел $(x, y, z, \ \dots \ , t)$ из некоторого множества E ставится в соответствие определенное значение переменной u, то u называется функцией от n переменных $x, y, z, \ \dots \ , t$, определенной на множестве E, и обозначается $u = f(x, y, z, \ \dots \ , t)$.

Переменные $x, y, z, \ \dots \ , t$ называются аргументами функции, множество E — областью определения функции.

Частным значением функции называется значение функции в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0, \ \dots \ , t_0)$ и обозначается $f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0, \ \dots \ , t_0)$.

Областью определения функции называется множество всех значений аргументов, которым соответствуют какие-либо действительные значения функции.

2°. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ в пространстве представляется некоторой поверхностью. То есть, когда точка с координатами x,y пробегает всю область определения функции, расположенную в плоскости xOy, соответствующая пространственная точка, вообще говоря, описывает поверхность.

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ рассматривают как функцию точки некоторого множества точек трехмерного пространства. Аналогично, функцию n переменных $u = f(x, y, z, \ \dots \ , t)$ рассматривают как функцию точки некоторого n-мерного пространства.

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называется совокупность точек плоскости xOy, в которых функция имеет одинаковые значения, и обозначается $f(x, y) = C$. Различным постоянным значениям C соответствуют различные линии уровня.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ назыается совокупность точек пространства, в которых функция имеет одинаковые значения, и обознчается $f(x, y, z) = C$. Различным значениям C соответствуют различные поверхности уровня.

1.1. Пусть $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. **Найти** а) частные значения функции в точках $M(1,1)$; $N(3,-4)$; *б)* $f(x-1, x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. а) Чтобы найти частные значения функции $f(x, y)$ в точках M и N, необходимо подставить координаты этих точек в выражение функции. Тогда частное значение функции в точке M будет $f(1,1) = \dfrac{1 \cdot 1}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2}$, а в точке N будет $f(N) = \dfrac{3(-4)}{3^2 + (-4)^2} = -\dfrac{12}{25}$.

б) Чтобы найти требуемые значения функций, необходимо переменным x,y присвоить значения $x-1$, $x+1$, соответственно, в первом случае и $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ — во втором. Тогда будем иметь

$$f(x-1,x+1)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)},$$

$$f\left(\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{y}\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

1.2. Найти $f(x,y)$, если а) $f\left(\frac{y}{x},x-y\right)=x^2-y^2$; б) $f(2x+y,2x-y)=xy$.

Решение. а) Обозначим $u=\frac{y}{x}$, $v=x-y$. Разрешая эти уравнения относительно x,y, будем иметь $x=\frac{v}{1-u}$, $y=\frac{uv}{1-u}$. Представим заданную функцию через новые переменные

$$f(u,v)=\frac{v^2}{(1-u)^2}-\frac{u^2v^2}{(1-u)^2}=\frac{v^2(1-u^2)}{(1-u)^2}=\frac{v^2(1+u)}{1-u}.$$

Если переименовать переменные u,v в x,y, то получим $f(x,y)=\frac{1+x}{1-x}y^2$.

б) Обозначим $u=2x+y$, $v=2x-y$. Откуда $x=\frac{1}{4}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$.

Запишем заданную функцию через новые переменные $f(u,v)=\frac{1}{8}(u^2-v^2)$.

Если переименовать переменные u,v в x,y, будем иметь $f(x,y)=\frac{1}{8}(x^2-y^2)$.

1.3. Найти область определения функций: а) $z=\ln(x^2+y^2-1)$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}}}$; в) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

г) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; д) $z=\ln xy$; е) $f(\rho,\varphi)=\rho\sqrt{\sin\varphi}$.

Решение. а) Функция определена, если $x^2+y^2-1>0$ или $x^2+y^2>1$, т. е. областью существования данной функции является часть плоскости вне единичного круга с центром в начале координат.

б) Функция z принимает вещественные значения при условии $1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}>0$ или $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}<1$, т. е. областью существования функции является открытый эллипс. Граница эллипса не входит в область существования функции.

в) Функция определена, если $x\neq 0$ и $-1\le\dfrac{y}{x}\le 1$ или $-x\le y\le x$. Областью существования функции является часть плоскости, заключенная между двумя биссектрисами $y=x$ и $y=-x$ и содержащая ось Ox, за исключением начала координат $O(0,0)$.

г) Функция определена, если $x+y\ge 0$ и $x-y\ge 0$, т. е. областью существования функции является внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами, включая сами биссектрисы.

д) Функция определена, если $xy>0$, т. е. областью существования функции является часть плоскости, лежащая внутри первого и третьего координатных углов, исключая границы.

е) Функция принимает вещественные значения при условии $\sin\varphi\ge 0$, т. е. $0\le\varphi\le\pi$, ρ — любое. Областью определения будет верхняя полуплоскость.

1.4. Найти область определения функций: а) $u = \ln\left(z - x^2 - y^2\right)$; б) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$;

в) $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

Решение. а) Функция зависит от трех переменных и принимает вещественные значения при $z - x^2 - y^2 > 0$, или $z > x^2 + y^2$, т. е. областью существования функции u является часть пространства, заключенная внутри параболоида, исключая сам параболоид.

б) Функция зависит от трех переменных и принимает вещественные значения при $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0$, или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, т. е. областью существования функции u является часть пространства, заключенная внутри трехосного эллипсоида, включая границу.

в) Функция зависит от трех переменных и определена, если $z \neq 0$ и $-1 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \leq 1$, или $0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2$.

1.5. Найти линии и поверхности уровня функций: а) $z = x^2 - y^2$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. а) Уравнение линий уровня имеет вид $x^2 - y^2 = C$, т. е. линии уровня равносторонние гиперболы. При $C > 0$ вершины гиперболы расположены на оси Ox, при $C < 0$ — на оси Oy.

б) Уравнение поверхностей уровня имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = C$, т. е. поверхности уровня — это семейство сферических поверхностей с центром в начале координат.

8.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

1°. Число A называется пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое число $\delta > 0$, что для любых точек M, отличных от M_0 и удовлетворяющих условию $|MM_0| < \delta$, будет иметь место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Предел обозначают $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$. В случае функции двух переменных $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

2°. *Теоремы о пределах*. Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ при $M \to M_0$ стремятся каждая к конечному пределу, то

а) $\lim\limits_{M \to M_0} (f_1(M) + f_2(M)) = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) + \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

б) $\lim\limits_{M \to M_0} (f_1(M) f_2(M)) = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f_1(M)}{f_2(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)}$; $\quad \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M) \neq 0$.

3°. Функция $f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

а) функция $f(M)$ определена в точке M_0;

б) существует предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если в точке M_0 нарушено хотя бы одно из этих условий, то функция в этой точке терпит разрыв. Точки разрыва могут образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т. д. Функция $f(M)$ называется *непрерывной* в области G, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Из определения непрерывности функции в точке следует, что бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

2.1. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Решение. а) Преобразуем предел следующим образом

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}.$$

Пусть $y = kx$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x(1+k)(\sqrt{kx^2+1}+1)} = 0$.

б) Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x\dfrac{\sin xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2$.

в) Пусть $y = kx$, т. е. рассмотрим изменение x и y вдоль прямой. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\left(1-k^2\right)}{x^2\left(1+k^2\right)} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Таким образом, предел имеет различные значения в зависимости от выбранного k, т. е. функция не имеет предела.

г) Воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{\beta\to 0} (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

2.2. Найти точки разрыва функций: а) $z=\ln(x^2+y^2)$;

б) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

Решение. а) Функция $z=\ln(x^2+y^2)$ терпит разрыв в точке $x=0,\ y=0$.

Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой разрыва.

б) Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. $x^2+y^2-z^2=0$. Следовательно, поверхность конуса $x^2+y^2=z^2$ является поверхностью разрыва.

8.3. Частные производные первого порядка

1°. Пусть (x_0,y_0) — некоторая произвольная фиксированная точка из области определения функции $z=z(x,y)$. Придавая переменной x приращение Δx, находим приращение функции $z=z(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по переменной x: $\Delta z=z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)$. Предел отношения $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ называется *частной производной* 1-го порядка от функции z по переменной x в точке (x_0,y_0) и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $z'_x(x,y)$. Аналогично определяется и обозначается частная производная от z по y: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_y(x,y)$. Производная от функции $z=z(x,y)$ по x находится, в предположении, что y остается постоянной, по обычным правилам и формулам дифференцирования. Если функция зависит от нескольких переменных $z=z(x_1,x_2,\dots,x_n)$, то частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ находится в предположении, что все переменные (кроме x_i) постоянные величины.

2°. Функция $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется однородной функцией степени m, если для некоторого действительного числа $\lambda \neq 0$ справедливо выражение

$$z(\lambda x_1, \lambda x_2, \ \dots \ , \lambda x_n) = \lambda^m z(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n).$$

Теорема Эйлера. Если однородная степени m функция $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет частные производные по каждой из переменных x_i, то справедливо равенство

$$mz(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) = x_1 z'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$
$$+ x_2 z'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + x_n z'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3.1. Найти частные производные: а) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

б) $z = xy\sin(2x + 3y)$; в) $z = \sqrt[3]{\cos(2x - y)}$; г) $z = 2^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$;

д) $z = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4}\right)$; е) $z = xye^{10y - x}$; ж) $z = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}}$.

Решение. а) Полагая y постоянной величиной, находим производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Полагая x постоянной величиной, находим производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

б) Полагая y постоянной величиной, находим

$\frac{\partial z}{\partial x} = y(\sin(2x+3y) + 2x\cos(2x+3y))$. Полагая x постоянной величиной, находим $\frac{\partial z}{\partial y} = x(\sin(2x+3y) + 3y\cos(2x+3y))$.

в) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}(2x-y)\cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x-y)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}(2x-y)(-1) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x-y)}}.$$

г) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\ln 2\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2 y}\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\ln 2\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}.$$

д) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)}.$$

е) $$\frac{\partial z}{\partial x} = y(e^{10y-x} + xe^{10y-x}(-1)) = ye^{10y-x}(1-x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(e^{10y-x} + ye^{10y-x})\cdot 10 = xe^{10y-x}(1+10y).$$

ж) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{(x^2+y^2)\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}.$$

3.2. Найти частные производные: а) $u = x3y^2 + \frac{y}{z}$; б) $u = \sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}$.

Решение. а) Полагая y, z постоянными величинами, находим производную по x: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2$.

Полагая x, z постоянными величинами, находим $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y + \frac{1}{z}$.

Полагая x, y постоянными, имеем $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$.

б) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2z) = -\frac{z}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

3.3. Найти: а) $f'_x(1;2), f'_y(1;2)$, если $f(x,y) = x^3y - xy^3 + 1$; б) $u'_x(1;0;2)$, $u'_y(1;0;2)$, $u'_z(1;0;2)$, если $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Решение. а) Находим частные производные и вычисляем их значения в точке (1;2)

$$f'_x = 3x^2y - y^3,\ f'_y = x^3 - 3xy^2,\ f'_x(1;2) = -2,\ f'(1;2) = -11.$$

б) Находим частные производные и вычисляем их значения в точке (1;0;2)

$$u'_x=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\quad u'_y=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\quad u'_z=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2},$$

$$u'_x(1;0;2)=\frac{2}{5},\quad u'_y=0,\quad u'_z=\frac{4}{5}.$$

3.4. Показать, что: а) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$, если $z=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; б) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=x\ln\frac{y}{x}$.

Решение. а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{3x^3}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{3x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Подставляя их в уравнение, получим

$$-\frac{y^2x^2}{3x^2}+\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{2xy^2}{3x}-\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y^2=-y^2+y^2=0.$$

б) Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln\frac{y}{x}-1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}$.

Подставляя производные в уравнение, будем иметь

$$x\ln\frac{y}{x}-x+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}=z.$$

3.5. Проверить теорему Эйлера для функций: а) $z=x^3-xy^2+y^3$; б) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Решение. а) Для функции двух переменных теорема Эйлера имеет вид $xz'_x+yz'_y=mz$. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy+3y^2$. Таким образом,

$$x(3x^2-y^2)+y(-2xy+3y^2)=3(x^3-xy^2+y^3)=3z.$$

б) Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$. Таким образом, $\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2}=0$, поскольку заданная функция однородная степени $m = 0$.

8.4. Дифференциал функции и его применение к приближенным вычислениям

1°. Пусть изменение функции $z=f(x,y)$ вызвано изменением только одной переменной, например, x. Тогда приращение $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ называется частным приращением функции по x. *Частным диференциалом* функции z по x называется главная часть частного приращения, линейная относительно приращения Δx. Частный дифференциал от функции z по x равен произведению частной производной по x на дифференциал независимой переменной, т. е.

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx. \qquad (1)$$

Аналогично,

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (2)$$

Если функция многих переменных $u=f\left(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n\right)$, то частные дифференциалы будут

$$d_{x_1}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1,\quad d_{x_2}u=\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2,\ \dots,\ d_{x_n}u=\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n \qquad (3)$$

2°. Если независимые переменные получают приращения $\Delta x,\Delta y$, то полное приращение функции $z=f(x,y)$ определяется выражением

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Полным дифференциалом функции называется главная часть полного приращения, линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y$.

Полный дифференциал от функции z равен сумме ее частных дифференциалов,т. е.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4}$$

В случае функции многих переменных $u = f\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\right)$ полный дифференциал определяется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ \dots \ + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{5}$$

3°. При достаточно малых приращениях независимых переменных, полное приращение функции приблизительно равно ее полному дифференциалу $\Delta u \simeq du$. Это равенство используется для приближенного вычисления значения функции в точке $M(x, y, \dots, z)$, если проще найти значения функции и ее частных производных в достаточно близкой точке $M_0(x_0, y_0, \ \dots \ , z_0)$

$$u(M) \simeq \ u(M_0) + u_x'(M_0)dx + u_y'(M_0)dy + \dots + u_z'(M_0)dz, \tag{6}$$

где $x - x_0 = dx, \quad y - y_0 = dy, \ \dots \ , \quad z - z_0 = dz$.

4.1. Найти частные дифференциалы: а) $z = \sqrt[3]{x^2 + y}$; б) $u = \ln(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

Решение. а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}.$$

Умножая на соответствующие дифференциалы аргументов, получим

$$d_x z = \frac{2xdx}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}; \quad d_y z = \frac{dy}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}.$$

б) Функция трех переменных. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2-2z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2-2z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4z}{x^2+y^2-2z^2}.$$

Отсюда, частные дифференциалы

$$d_x u = \frac{2xdx}{x^2+y^2-2z^2}, \quad d_y u = \frac{2ydy}{x^2+y^2-2z^2}, \quad d_z u = -\frac{4zdz}{x^2+y^2-2z^2}.$$

4.2. Найти полный дифференциал функции:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$; б) $u = x^{y^z}$.

Решение. а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)^2}\frac{1+xy-(x-y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1+y^2}{1+x^2-xy+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)^2}\frac{-1-xy-(x-y)y}{(1+xy)^2} = -\frac{1+y^2}{1+x^2-xy+y^2}.$$

Полный дифференциал находим по формуле (4)

$$dz = \frac{(1+y^2)dx-(1+x^2)dy}{1+x^2-xy+y^2}.$$

б) Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z}\ln x \cdot zy^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}\ln xy^z \ln y.$$

Отсюда, полный дифференциал

$$du = y^z x^{y^z-1}dx + x^{y^z} y^{z-1} z\ln x dy + x^{y^z} y^z \ln x \ln y dz =$$

$$= y^z x^{y^z}\left(\frac{dx}{x} + \frac{z\ln x}{y}dy + \ln x \ln y dz\right).$$

4.3. При помощи полного дифференциала **вычислить** приближенно: а) $\ln(\sqrt[4]{0,97} + \sqrt[3]{1,04} - 1)$; б) $(1,02)^4 \cdot (0,98)^3 \cdot (2,03)^2$.

Решение. а) Рассмотрим функцию $z = \ln\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1\right)$. Требуется найти значение функции в точке $M(0,97;1,04)$. Однако проще найти значение функции в вспомогательной точке $M_0(1;1)$.

Найдем сначала дифференциалы аргументов $dx = x - x_0 = 0,97 - 1 = -0,03$, $dy = y - y_0 = 1,04 - 1 = 0,04$ и воспользуемся формулой (6)

$$z(M) \approx z(M_0) + \left.\frac{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1}\right|_{M_0} dy,$$

$$\ln(\sqrt[4]{0,97} + \sqrt[3]{1,04} - 1) \approx \ln(\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1) + \frac{\frac{1}{4\sqrt[4]{1}}}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1}(-0,03) +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1}0,04 = -\frac{0,03}{4} + \frac{1}{3} = 0,326.$$

б) Требуется найти значение функции $u = x^4 y^3 z^2$ в точке $M(1,02; 0,98; 2,03)$. Пусть $M_0(1;1;2)$ будет вспомогательной точкой. Найдем дифференциалы аргументов $dx = x - x_0 = 0,02$; $dy = y - y_0 = -0,02$; $dz = z - z_0 = 0,03$ и воспользуемся формулой (6)

$$u(M) \approx u(M_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} dy + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} dz =$$

$$= 1^4 1^3 2^2 + 4 \cdot 1^3 1^3 2^2 \cdot 0,02 + 3 \cdot 1^4 1^2 2^2 (-0,02) + 2 \cdot 1^4 1^3 2 \cdot 0,03 =$$

$$= 4 + 0,16 - 0,24 + 0,12 = 4,04 .$$

4.4. Стороны прямоугольного параллелепипда равны: $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 6$ см. **Найти** приближенно величину изменения длины диагонали паралллепипеда, если a увеличивается на 3 мм, b — на 1мм, а c уменьшается на 2 мм.

Решение. Диагональ параллелепипеда равна $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$. Изменение длины заменим приближенно дифференциалом

$$\Delta l \approx d\,l = \frac{2ada}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{2bdb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{2cdc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ada + bdb + cdc) = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\big(2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 6(-2)\big) =$$

$$= \frac{2}{7}(-0,3) = -0,0857 ,$$

т. е. длина уменьшилась на 0,857мм.

4.5. Дана функция $z = 4xy + 5x - 2y$ и две точки $A(1;3)$, $B(1,04;2,97)$. Требуется:

а) **вычислить** приближенное значение функции в точке B;

б) **вычислить** точное значение функции в точке B и оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции дифференциалом.

Решение. а) Формула (6) для нашего случая примет вид $z(B) \approx z(A) + z'_x(A)dx + z'_y(A)dy$.

Найдем: $z(1;3) = 4 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 11$; $z'_x = 4y + 5$, $z'_x(1;3) = 17$,

$z'_y = 4x - 2$, $z'_y(1;3) = 2$, $dx = x - x_0 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $dy = y - y_0 =$ $= 2{,}97 - 3 = -0{,}03$.

Отсюда приближенное значение функции в точке B

$z(B) \approx 11 + 17 \cdot 0{,}04 + 2(-0{,}03) = 11{,}62$.

б) Найдем точное значение функции в точке B

$z(B) = 4 \cdot 1{,}04 \cdot 2{,}97 + 5 \cdot 1{,}04 - 2 \cdot 2{,}97 = 11{,}6152$.

Если a есть приближенное значение числа $a°$, то относительная погрешность δ определяется по формуле $\delta = \left|\dfrac{a^o - a}{a}\right|$.

Таким образом, $\delta = \left|\dfrac{11{,}61 - 11{,}62}{11{,}62}\right| = 0{,}00086$.

Принимая приближенное число 11,62 за 100 %, находим, что относительная погрешность в процентах равна 0,007%.

8.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1°. Частные производные первого порядка от функции многих переменных $u = f(x, y, ..., t)$ обычно зависят от тех же переменных и их можно еще раз дифференцировать.

Частными производными второго порядка называются частные производные от частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx}, \ldots$$

Смешанные частные производные, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Частными производными третьего порядка называются частные производные от частных производных второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=u'''_{xxx};\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=u'''_{xxy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=u'''_{xxy};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}=u'''_{xyy};\ldots$$

Частные производные других высших порядков определяются аналогично.

2°. Дифференциалом второго порядка от функции двух независимых переменных $u=f(x,y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала

$$d(du)=d^2u;$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \tag{1}$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка

$$d(d^2u)=d^3u;$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3. \tag{2}$$

В общем слчае для дифференциалов высших порядков справедлива символическая формула

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u. \tag{3}$$

где сначала выражение в скобках формально возводится в степень n, а затем при символе ∂^n подписывается u.

В многомерном случае $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет место аналогичная символическая формула

$$d^n u = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^n u . \qquad (4)$$

5.1. Найти частные производные второго порядка а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $u = xy + yz + zx$.

Решение. а) Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2\left(x^2 - y^2\right)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Последние два выражения наглядно доказывают, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

б) Находим сначала частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = y + x.$$

Отсюда частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 1.$$

5.2. Найти: а) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z=\cos(xy)$; б) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u=(xyz)^3$.

Решение. а) Поскольку смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, то последовательно дифференцируя, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin(xy); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -(2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)) = x^2 y\sin(xy) - 2x\cos(xy).$$

б) Функция от трех независимых переменных. Смешанная производная по переменым будет

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3(xyz)^2 xy = 3x^3y^3z^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 9x^3y^2z^2, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 27x^2y^2z^2.$$

5.3. Найти: а) $z'''_{xxy}(0;1)$; б) $z'''_{xyy}(0;1)$, если $z=e^{x^2y}$.

Решение. а) Требуется найти значение частной производной третьего порядка в точке $(0,1)$. Находим сначала частную производную $z'_y = x^2 e^{x^2 y}$,

$$z''_{xy} = 2xe^{x^2y} + x^2e^{x^2y}2xy = 2x(1+x^2y)e^{x^2y},$$

$$z'''_{xxy} = 4x^2y(1+x^2y)e^{x^2y} + (2+6x^2y)e^{x^2y}.$$

Отсюда $z'''_{xxy}(0,1)=2$.

б) Используя результат предыдущего примера z''_{xy}, находим $z'''_{xyy} = 2x^3e^{x^2y} + 2x(1+x^2y)x^2e^{x^2y}$. Отсюда значение производной в точке $z'''_{xyy}(0;1)=0$.

5.4. Показать, что функции удовлетворяют уравнениям:

а) $u = A\sin\lambda x\cos a\lambda t$, $u = e^{-\cos(at+x)}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; б) $z = e^{xy}$, $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. а) Найдем частные производные второго порядка от первой функции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Aa\lambda\sin\lambda x\sin a\lambda t,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A(a\lambda)^2\sin\lambda x\cos a\lambda t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\lambda\cos\lambda x\cos a\lambda t,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda^2\sin\lambda x\cos a\lambda t.$$

Подставляя вторые производные в уравнение, получим

$$-Aa^2\lambda^2\sin\lambda x\cos a\lambda t = -Aa^2\lambda^2\sin\lambda x\cos a\lambda t,$$

что и требовалось доказать.

Найдем теперь частные производные от второй функции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\sin(at+x)e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2\cos(at+x) + a^2\sin^2(at+x))e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(at+x)e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\cos(at+x) + \sin^2(at+x))e^{-\cos(at+x)}.$$

Подставляя вторые производные в уравнение, получим

$$a^2(\cos(at+x) + \sin^2(at+x))e^{-\cos(at+x)} =$$

$$= a^2(\cos(at+x) + \sin^2(at+x))e^{-\cos(at+x)}.$$

что и требовалось доказать.

б) Находим вторые частные производные от функции

$$z=e^{xy}, \frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

Подставляя вторые частные производные в уравнение, получим $x^2y^2e^{xy}-y^2x^2e^{xy}=0$, что и требовалось проверить.

Найдем вторые частные производные для $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}y\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{3}{4}\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}.$$

Подставляя вторые частные производные в уравнение, получим

$$x^2\frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2}-y^2\frac{3}{4}\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}=0, \quad \frac{3}{4}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{4}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=0,$$

что и требовалось проверить.

5.5. Найти: а) d^2z, если $z=x\ln\frac{y}{x}$; б) d^2u, если $u=e^{xyz}$; в) d^3z, если $z=e^x\sin y$.

Решение. а) При нахождении дифференциала второго порядка воспользуемся формулой (1). Для этого найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln\frac{y}{x}-1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}.$$

Таким образом, $d^2z=-\frac{dx^2}{x}+\frac{2dxdy}{y}-\frac{xdy^2}{y^2}$.

б) В данном случае функция трех переменных. Пользуясь формулой (4), запишем дифференциал второго порядка

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}d^2z+$$

$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}dydz.$$

Найдем частные производные второго порядка

$\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz}$,

$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=(yz)^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(xz)^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(xy)^2e^{xyz}$,

$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(z+xyz^2)e^{xyz}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}=(y+xy^2z)e^{xyz}$,

$\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}(x+x^2yz)e^{xyz}$.

Отсюда имеем

$$d^2u=e^{xyz}((yzdx)^2+(xzdy)^2+(xydz)^2+$$

$$+(z+xyz^2)dxdy+(y+xy^2z)dxdz+(x+x^2yz)dydz).$$

в) Воспользуемся формулой (2). Найдем частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2z}{\partial x^2}=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^3z}{\partial x^3}=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -e^x \cos y\,.$$

Окончательно получим

$$d^3 z = e^x \sin y dx^3 + 3e^x \cos y dx^2 dy - 3e^x \sin y dx dy^2 -$$

$$-e^x \cos y dy^3 = e^x (\sin y dx^3 + 3\cos y dx^2 dy - 3\sin y dx dy^2 - \cos y dy^3)\,.$$

8.6. Дифференцирование сложных функций

1°. Функция вида $z = f(u, v, ..., w)$ называется *сложной функцией* от независимх переменных x,y, ... , t, если она задана посредством промежуточных аргументов: $u = u(x, y, ..., t)$, $v = v(x, y, ..., t)$, ... , $w = w(x, y, ..., t)$.

Частная производная сложной функции по независимой переменной равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные от этих аргументов по независимой переменной

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + ... + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + ... + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + ... + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (1)$$

Если все промежуточные аргументы будут функциями только одной независимой переменной $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, то z будет функцией только x и производная такой сложной функции называется *полной производной*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ \dots\ +\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (2)$$

Если функция z вида $z=f(x,u,v,\dots,w)$, где $u,v,\ \dots,w$ — функции только x, то полная производная определяется по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ \dots\ +\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (3)$$

2°. Если функция $z=f(u,v,\dots,w)$ сложная, то дифференциал первого порядка сохраняет свой вид (свойство инвариантности формы первого дифференциала) и находится по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv+\ \dots\ +\frac{\partial z}{\partial w}dw\ . \qquad (4)$$

Дифференциал 2-го порядка от сложной функции находится по формуле

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial w}dw\right)^2 z+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v+\ \dots\ +\frac{\partial z}{\partial w}d^2w. \qquad (5)$$

6.1. Найти производные сложных функций: а) $z=\sqrt{u^2+v^2}$, $u=\cos x$, $v=\sin x$; б) $z=x^3\ln y$, $x=2u+3v$, $y=\dfrac{u}{v}$; в) $u=xyz$, $x=\ln t$, $y=1+t^2$, $z=\sin t$; г) $z=x\ln u\sin v$, $u=\cos x$, $v=x^2-1$.

Решение. а) Поскольку промежуточные аргументы u,v являются функциями только одной независимой переменной x, то производную находим по формуле (2)

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\sin x+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\cos x=-\cos x\sin x+\sin x\cos x=0.$$

б) Промежуточные аргументы x,y являются функциями двух независимых аргументов u,v. В этом случае формулы (1) примут вид

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3x^2\ln y\cdot 2+\frac{x^3}{y}\frac{1}{v}=6(2u+3v)^2\ln\frac{u}{v}+\frac{(2u+3v)^3}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3x^2\ln y\cdot 3+\frac{x^3}{y}\left(-\frac{u}{v^2}\right)=9(2u+3v)^2\ln\frac{u}{v}-\frac{(2u+3v)^3}{v}.$$

в) Функция u зависит от трех промежуточных аргументов, которые в свою очередь зависят только от одной независимой переменной, поэтому по формуле (2)

$$\frac{du}{dt}=yz\frac{1}{t}+xz2t+xy\cos t=\frac{1+t^2}{t}\sin t+2t\ln t\sin t+(1+t^2)\ln t\cos t.$$

г) Здесь независимая переменная x явно входит в выражение функции, поэтому воспользуемся формулой (3)

$$\frac{dz}{dx}=\ln u\sin v+\frac{x}{u}\sin v(-\sin x)+x\ln u\cos v\cdot 2x=$$

$$=\ln\cos x\cdot\sin(x^2-1)-\sin(x^2-1)+2x^2\ln\cos x\cdot\cos(x^2-1).$$

6.2. Найти dz и d^2z, если $z=f(u,v)$, $u=\sin(xy)$, $v=\ln\frac{x}{y}$.

Решение. При нахождении дифференциала 1-го порядка воспользуемся формулой (4), где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

Тогда

$$dz = f_u'(y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy) + f_v'\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

При вычислении дифференциала 2-го порядка по формуле (5) найдем сначала d^2u и d^2v:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= -y^2\sin(xy)dx^2 - 2xy\sin(xy)dxdy - x^2\sin(xy)dy^2$$

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2 = -\frac{dx^2}{x^2} + \frac{dy^2}{y^2}.$$

Таким образом,

$$d^2z = f_{uu}''(y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy)^2 + 2f_{uv}''(y\cos(xy)dx +$$

$$+x\cos(xy)dy)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) + f_{vv}''\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)^2 -$$

$$-f_u'\sin(xy)(ydx + xdy)^2 + f_v'\left(\frac{dy^2}{y^2} - \frac{dx^2}{x^2}\right) =$$

$$= f_{uu}''\cos^2(xy)(ydx + xdy)^2 + 2f_{uv}''\cos(xy)(ydx + xdy)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) +$$

$$+ f_{vv}''\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)^2 - f_u'\sin(xy)(ydx + xdy)^2 + f_v'\left(\frac{dy^2}{y^2} - \frac{dx^2}{x}\right).$$

8.7. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций

1°. *Неявной функцией* от нескольких независимых переменных $x, y, \ldots, t$ называется переменная z, если она задана уравнением $F(x, y, \ldots, t, z) = 0$, которое не разрешено относительно z.

Первый способ. Частные производные неявной функции z, заданной уравнением $F(x, y, \ldots, t, z) = 0$, где F — дифференцируемая функция переменных $(x, y, \ldots, t, z)$, определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \ldots \quad ; \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{1}$$

при условии, что $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Второй способ. Дифференцируя уравнение $F(x, y, \ldots, t, z) = 0$ будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

Находя отсюда dz и сравнивая с формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

находим соответствующие частные производные.

2°. Если неявная функция y задана уравнением $F(x, y) = 0$, где F — дифференцируемая функция переменных x и y, то производная неявной функции будет

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right). \tag{2}$$

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием формулы (2).

3°. Пусть неявные функции $u=u(x,y,z)$ и $v=v(x,y,z)$ заданы системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(u,v,x,y,z)=0; \\ F_2(u,v,x,y,z)=0. \end{cases}$$

Первый способ. Если якобиан

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ находятся из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial v}{\partial z}$ определяются аналогично.

Второй способ. Дифференцируя заданные уравнения, находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных. Решая полученную систему относительно du, dv и сравнивая эти выражения с полными дифференциалами

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,$$

находим искомые частные производные.

4°. Пусть функция z от переменных x,y задана параметрически уравнениями

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v).$$

Первый способ. Для нахождения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ составим дифференцированием систему

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv; \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv; \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv. \end{cases}$$

Если якобиан

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то решая первые два уравнения относительно du,dv и подставляя их в третье, из сравнения полученного выражения с полным дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Второй способ. Дифференцируем сначала первые два уравнения по x и, из получившейся системы, находим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Далее, дифференцируем первые два уравнения по y и, из получившейся системы, находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$. Затем, дифференцируя третье уравнение по x и y и подставляя туда ранее найденные частные производные от u, v по x, y, находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7.1. Найти частные производные: а) $x^2+y^2+z^2-t^2=0$; б) $z^3-xyz=2a^2$.

Решение. а) Функция z задана неявно. Полагая $F(x,y,z,t)\equiv x^2+y^2+z^2-t^2$, по формулам (1) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z;\quad \frac{\partial F}{\partial t}=-2t;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{t}{z}.$$

С другой стороны, дифференцируя данное уравнение, будем иметь $2xdx+2ydy+2zdz-2tdt=0$.

Находим отсюда dz, т. е. полный дифференциал неявной функции

$$dz=\frac{tdt-xdx-ydy}{z}=\frac{t}{z}dt-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy.$$

Сравнивая с формулой полного дифференциала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

окончательно получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{t}{z}.$$

б) Полагая $F(x,y,z)=z^3-xyz-2a^3=0$, находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-yz,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-xz,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-xy.$$

Отсюда по формулам (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{3z^2-xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{3z^2-xy}.$$

Второй метод. Дифференцируем

$3z^2dz-yzdx-xzdy-xydz=0$.

Находим дифференциал

$$dz=\frac{-yzdx-xzdy}{3z^2-xy}=-\frac{yz}{3z^2-xy}dx-\frac{xz}{3z^2-xy}dy.$$

Сравнивая с полным дифференциалом функции от двух переменных, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{3z^2-xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{3z^2-xy}.$$

7.2. $y=x+\ln y$, **найти** $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$ и дифференциал dy.

Решение. Пусть $F(x,y)\equiv y-x-\ln y=0$. Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial F}{\partial y}=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$. Отсюда по формуле (2) получим

$$y'=-\frac{-1}{\frac{y-1}{y}}=\frac{y}{y-1}.$$

Вторую производную находим дифференцированием первой производной по x, учитывая, что y есть функция x

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y-1}\right)=\frac{y'(y-1)-yy'}{(y-1)^2}=-\frac{y}{(y-1)^3}.$$

Аналогично, третья производная

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\frac{y'(y-1)-3yy'}{(y-1)^4}=\frac{y(1+2y)}{(y-1)^5}.$$

Дифференциал функции будет $dy = y'_x dx = \dfrac{y}{y-1}dx$.

7.3. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. Функция z от двух независимых переменных задана неявно. Полагая $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$, находим сначала по формулам (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Вторую производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ находим дифференцированием первой производной по x, учитывая, что z есть функция x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{z}\right)=-\frac{z-xz'_x}{z^2}=-\frac{z+\dfrac{x^2}{z}}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}=\frac{y^2-a^2}{z^3}.$$

Смешанную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ находим дифференцированием первой производной по y, учитывая, что z есть функция y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{x}{z}\right)=\frac{xz'_y}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{y}{z}\right)=-\frac{z-yz'_y}{z^2}=-\frac{z+\dfrac{y^2}{z}}{z^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}=\frac{x^2-a^2}{z^3}.$$

7.4. Найти dz и d^2z, если $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Дифференциал от функции z находится по формуле $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Поскольку функция задана неявно, то частные производные находим по формулам (1), где

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0:$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{c^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

Таким образом, $dz=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}dx-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}dy$.

Дифференциал второго порядка находится по формуле

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\frac{z-xz'_x}{z^2}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2z^2+c^2x^2}{a^2z^3}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{b^2-y^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)=\frac{c^2xz'_y}{a^2z^2}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)=-\frac{c^2}{b^2}\frac{z-yz'_y}{z^2}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{b^2z^2+c^2y^2}{b^2z^3}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{a^2-x^2}{z^3}.$$

Отсюда,

$$d^2z=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left(\left(b^2-y^2\right)dx^2+2xydxdy+\left(a^2-x^2\right)dy^2\right).$$

7.5. Неявные функции u и v заданы системой

$$\begin{cases} u+v+x+y+z=0, \\ u^2+v^2+x^2+y^2+z^2=R^2. \end{cases}$$

Найти частныепроизводные $\dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$.

Решение. Полагая $F_1(u,v,x,y,z)=u+v+x+y+z$ и $F_2(u,v,x,y,z)=u^2+v^2+x^2+y^2+z^2-R^2$, система для определения $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial z}$, аналогичная системе (3), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z}+\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z}+\dfrac{\partial F_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial F_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial z}+1=0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial z}+2v\dfrac{\partial v}{\partial z}+2z=0. \end{cases}$$

Решая данную систему относительно производных, получим

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{v-z}{u-v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{z-u}{u-v}.$$

Решим этот пример вторым способом. Найдем дифференциалы от заданных функций

$$\begin{cases} du+dv+dx+dy+dz=0, \\ udu+vdv+xdx+ydy+zdz=0. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно du, dv

$$du=\frac{v-x}{u-v}dx+\frac{v-y}{u-v}dy+\frac{v-z}{u-v}dz,$$

$$dv=\frac{x-u}{u-v}dx+\frac{y-u}{u-v}dy+\frac{z-u}{u-v}dz.$$

Сравнивая эти выражения с полными дифференциалами, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{v-z}{u-v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{z-u}{u-v}.$$

Замечание. Из формул для du, dv следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v-x}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x-u}{u-v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v-y}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y-u}{u-v}.$$

7.6. Функции u и v независимой переменной x заданы системой уравнений: $u^2+v^2=x^2$, $u^2+2v^2+3x^2=1$. **Найти** $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ и $\dfrac{d^2v}{dx^2}$.

Решение. Функции заданы неявно. Полагая $F_1(u,v,x)=u^2+v^2-x^2$, $F_2(u,v,x)=u^2+2v^2+3x^2-1$, находим сначала систему (3)

$$\begin{cases} 2u\dfrac{du}{dx}+2v\dfrac{dv}{dx}-2x=0, \\ 2u\dfrac{du}{dx}+4v\dfrac{dv}{dx}+6x=0. \end{cases}$$

Отсюда первые производные: $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{5x}{u}$, $\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{4x}{v}$.

Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{u}\right)=5\frac{u-x\dfrac{du}{dx}}{u^2}=5\frac{u^2-5x^2}{u^3},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{4x}{u}\right)=-4\frac{v-x\dfrac{dv}{dx}}{v^2}=-4\frac{v^2+4x^2}{v^3}.$$

7.7. Функции u, v независимой переменной x заданы системой уравнений $u+v+x=0$, $uvx=1$. **Найти:** d^2u, d^2v.

Решение. Дифференцируя, находим уравнения, связывающие дифференциалы всех трех переменных

$$\begin{cases} du+dv+dx=0, \\ xvdu+uxdv+uvdx=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно дифференциалов du,dv, будем иметь

$$du=\frac{u(v-x)}{x(u-v)}dx, \qquad dv=\frac{v(x-u)}{x(u-v)}dx .$$

Дифференцируем повторно

$$d^2u=\frac{(du(v-x)+u(dv-dx))dx(u-v)x-u(v-x)dx(dx(u-v)}{x^2(u-v)^2}+$$

$$+\frac{x(du-dv))}{x^2(u-v)^2}=\frac{(u(v-x)^2+u(v(x-u)-x(u-v)))x(u-v)}{x^3(u-v)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-u(v-x)(x(u-v)^2+x(u(v-x)-v(x-u)))}{x^3(u-v)^3}dx^2=$$

$$=\frac{ux((v^2+x^2-uv-xu)(u-v)-(v-x)(u^2+v^2-ux-xv))}{x^3(u-v)^3}dx^2=$$

$$=-\frac{3(u^2+x^2+v^2)}{x^3(u-v)^3}dx^2 .$$

$$d^2v=\frac{(dv(x-u)+v(1-du))x(u-v)dx-v(x-u)dx((u-v)dx+x(du-dv))}{x^2(u-v)^2}=$$

$$=\frac{(v(x-u)^2+v(x(u-v)-u(v-x)))x(u-v)}{x^3(u-v)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-v(x-u)(x(u-v)^2+x(u(v-x)-v(x-u)))}{x^3(u-v)^3}dx^2=$$

$$=\frac{vx(((x-u)^2+(xu-xv-vu+ux))x(u-v)}{x^3(u-v)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-(x-u)((u-v)^2+(uv-ux-vx+uv)))}{x^3(u-v)^3}dx^2=$$

$$=\frac{vx((x^2+u^2+v^2)(u-v)-(x-u)(u^2+v^2+x^2))}{x^3(u-v)^3}dx^2=$$

$$=\frac{3(u^2+v^2+x^2)}{x^3(u-v)^3}dx^2=-d^2u\,.$$

7.8. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений: $xu+yv=0, \quad u+v+x+y=1$.

Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Решение. Найдем сначала первые частные производные. Полагая $F_1(u,v,x,y)=xu+yv$ и $F_2(u,v,x,y)=u+v+x+y-1$, находим систему (3) для определения $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}+u=0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+1=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно производных, получим: $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u-x}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y-u}{x-y}$.

Аналогично

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial v}{\partial y}+v=0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}+1=0, \end{cases}$$

откуда: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y-v}{x-y}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{v-x}{x-y}.$

Повторно дифференцируя и учитывая, что функции u,v зависят от переменных x,y, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-u}{x-y}\right)=\frac{-\dfrac{\partial u}{\partial x}(x-y)-(y-u)}{(x-y)^2}=\frac{2(u-y)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-u}{x-y}\right)=\frac{\left(1-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(x-y)+(y-u)}{(x-y)^2}=\frac{x-y+v-u}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-v}{x-y}\right)=\frac{\left(1-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)(x-y)+(y-v)}{(x-y)^2}=\frac{2(x-v)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u-x}{x-y}\right)=\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)(x-y)-(u-x)}{(x-y)^2}=\frac{2(y-u)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v-x}{x-y}\right)=\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-1\right)(x-y)-(v-x)}{(x-y)^2}=\frac{y-x+u-v}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v-x}{x-y}\right)=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}(x-y)+(v-x)}{(x-y)^2}=\frac{2(v-x)}{(x-y)^2}.$$

7.9. Функции u,v независимых переменных x,y заданы неявно системой уравнений: $u+v=x$, $uv=y$. Найти d^2u, d^2v.

Решение. Найдем сначала du и dv. Для этого продифференцируем заданные уравнения

$$\begin{cases} du + dv = dx, \\ vdu + udv = dy. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно du и dv, получим

$$du = \frac{udx - dy}{u - v}, \qquad dv = \frac{dy - vdx}{u - v}.$$

Дифференцируем повторно

$$d^2u = \frac{dudx(u-v) - (udx - dy)(du - dv)}{(u-v)^2} =$$

$$= \frac{(udx - dy)dx(u - v) - (udx - dy - dy + vdx)(udx - dy)}{(u - v)^3} =$$

$$= \frac{(udx - vdx - udx + 2dy - vdx)(udx - dy)}{(u-v)^3} = \frac{2(dy - vdx)(udx - dy)}{(u-v)^3} =$$

$$= \frac{2(udxdy - (dy)^2 - uv(dx)^2 + vdxdy}{(u-v)^3} = -\frac{2(uv(dx)^2 - (u+v)dxdy + (dy)^2)}{(u-v)^3}.$$

$$d^2v = \frac{-dvdx(u-v) - (dy - vdx)(du - dv)}{(u-v)^2} =$$

$$= \frac{-(dy - vdx)(u - v)dx - (dy - vdx)(udx - 2dy + vdx)}{(u-v)^3} =$$

$$= \frac{(-udx + vdx - udx + 2dy - vdx)(dy - vdx)}{(u-v)^3} = \frac{2(dy - udx)(dy - vdx)}{(u-v)^3} =$$

$$= \frac{2\left((dy)^2 - udxdy - vdxdy + uv(dx)^2\right)}{(u-v)^3} =$$

$$= \frac{2(uv(dx)^2 - (u+v)dxdy + (dy)^2)}{(u-v)^3} = -d^2u.$$

7.10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$.

Решение. Функция задана параметрически. Дифференцируя, находим систему из трех уравнений, связывающую дифференциалы всех переменных

$$\begin{cases} dx = vdu + udv; \\ dy = du + dv; \\ dz = du - dv. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим дифференциалы du и dv

$$du = \frac{dx - udy}{v - u}; \; dv = \frac{dx - vdy}{u - v}.$$

Подставляя найденные выражения в третье уравнение и сравнивая с полным дифференциалом dz, будем иметь

$$dz = \frac{dx - udy}{v - u} - \frac{dx - vdy}{u - v} = -\frac{2}{u - v}dx + \frac{u + v}{u - v}dy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{u - v}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u + v}{u - v}.$$

7.11. Найти dz, если $x = e^u \sin v$, $y = e^u \cos v$, $z = uv$.

Решение. Функция задана параметрически. Дифференцируя все три выражения, находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных

$$\begin{cases} dx = e^u \sin v du + e^u \cos v dv, \\ dy = e^u \cos v du - e^u \sin v dv, \\ dz = vdu + udv. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим du и dv:

$$du = \frac{\sin v dx + \cos v dy}{e^u}, \qquad dv = \frac{\cos v dx - \sin v dy}{e^u}.$$

Подставляя du, dv в третье уравнение, получим

$$dz = \frac{v}{e^u}(\sin v dx + \cos v dy) + \frac{u}{e^u}(\cos v dx - \sin v dy) =$$

$$= e^{-u}((v\sin v + u\cos v)dx + (v\cos v - u\sin v)dy).$$

8.8. Замена переменных в дифференциальных выражениях

В некоторых дифференциальных выражениях производные по одним переменным целесообразно выразить через производные по другим переменным. Для этого используются правила дифференцирования сложных функций.

8.1. Преобразовать дифференциальное уравнение $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$, полагая $x = \sin t$.

Решение. Выразим производные от y по x через производные от y по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\cos t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cos t + \frac{dy}{dt}\sin t}{\cos^2 t\cos t} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя полученные производные в данное уравнение и заменяя x на $\sin t$, будем иметь

$$(1-\sin^2 t)\left(\frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}\right)-\frac{\sin t}{\cos t}\frac{dy}{dt}+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

8.2. Преобразавать уравнение $\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}=3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, приняв y за аргумент, а x за функцию.

Решение. Выразим производные от y по x через производные от x по y

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\frac{d}{dy}\left[\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right]\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^4}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Подставляя эти производные в данное уравнение, будем иметь

$$-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^6}=3\frac{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^6},\qquad \frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}=0.$$

Так как обратная производная существует и $\frac{dx}{dy} \neq 0$, то уравнение окончательно примет вид $\frac{d^3x}{dy^3} = 0$.

8.3. Преобразовать к полярным координатам уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

Решение. Полярные координаты связаны с декартовыми формулами: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Рассматривая ρ как функцию φ, дифференциалы dx, dy примут вид: $dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi$, $dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi} = \frac{\sin\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi}{\cos\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi}.$$

Подставляя в данное уравнение x, y, $\frac{dy}{dx}$, выраженные через новые переменные ρ, φ, получим

$$\frac{\sin\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi}{\cos\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi} = \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi},$$

$$-\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = -\rho\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Таким образом, $\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho$.

8.4. Преобразовать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, перейдя к новым независимым переменным u, v, если $u = x,\ \ v = \frac{y}{x}$.

Решение. Выразим частные производные от z по x,y через частные производные от z по u,v. Воспользуемся формулами дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя найденные производные в данное уравнение и выражая x,y через u,v, будем иметь

$$u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}+v\frac{\partial z}{\partial v}-z=0 \quad \text{или} \quad u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0.$$

8.5. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, приняв за новые независимые переменные $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, а за новую функцию $w=\frac{z}{x}$.

Решение. Выразим частные производные от z по x,y через частные производные от w по u,v. Для этого найдем дифференциалы данных выражений:

$$du=dx+dy, \quad dv=\frac{xdy-ydx}{x^2}, \quad dw=\frac{xdz-zdx}{x^2}.$$

С другой стороны дифференциал dw как от функции двух переменных u,v равен $dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$.

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv=\frac{dz}{x}-\frac{z}{x^2}dx$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial u}(dx+dy)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dy}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx=\frac{dz}{x}-\frac{z^2}{x}dx.$$

Разрешим это выражение относительно dz

$$dz=x\left(\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dy\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial w}{\partial u}-v\frac{\partial w}{\partial v}+w,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

8.6. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, перейдя к сферическим координатам.

Решение. Сферические координаты связаны с декартовыми формулами $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$.

Преобразование можно провести в два приема, полагая сначала $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (считая z неизменным), затем $z=\rho\cos\theta$, $r=\rho\sin\theta$ (считая φ неизменной).

Преобразуем сначала выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Воспользуемся формулами дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Решая эту систему относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \qquad (*)$$

Вторые частные производные равны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) -$$

$$-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} +$$

$$+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \sin^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} +$$

$$+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

Учитывая, что $z = \rho\cos\theta$ и $r = \rho\sin\theta$, первые два члена в правой части последнего выражения могут быть записаны аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, аналогично (*), примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

8.9. Экстремум функции

1°. *Экстремумом функции* называется максимум или минимум функции. Функция двух независимых переменных $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет максимум (минимум), если значение функции в этой точке больше (меньше) ее значений в любой точке $M(x,y)$, расположенной в окрестности точки M_0, т. е. $f(M_0)>f(M)$ $(f(M_0)<f(M))$, для всех точек M, удовлетворяющих условию $|M_0M|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке ее частные производные первого порядка равны нулю

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0;\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Точки, в которых выполняются условия (1), называются стационарными точками функции, однако не в каждой стационарной точке функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — стационарная точка функции $z=f(x,y)$, причем функция дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные в точке M_0. Обозначим

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2};\quad B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y};\quad C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}; \tag{2}$$

и $D=AC-B^2$. Тогда:

1) если $D > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум при $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при $A > 0$ ($C > 0$);

2) если $D < 0$, то экстремума а точке M_0 нет;

3) если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

2°. Функция нескольких независимых переменных $z = z(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ в точке $M_0(x_i^\circ)$ имеет максимум (минимум), если значение функции в этой точке больше (меньше) ее значений в любой точке $M(x_i)$, расположенной в окрестности точки M_0, т. е. $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$, для всех M, удовлетворяющих условию $M_0M < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $z = z(x_i)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_i^\circ)$, то в этой точке ее частные производные равны нулю

$$\frac{\partial f(x_i^\circ)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3}$$

Точки, в которых первые частные производные равны нулю, называюся стационарными, однако не в каждой стационарной точке функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_i^\circ)$ — стационарная точка функции $z = z(x_i)$, причем эта функция дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные в точке M_0. Тогда:

1) если второй дифференциал $d^2z(M_0, \Delta x_i) < 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то функция имеет в точке M_0 максимум, а если $d^2z(M_0, \Delta x_i) > 0$ — минимум, причем $\Delta x_i = x_i - x_i^\circ \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ одновременно;

2) если $d^2z(M_0, \Delta x_i)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения при различных значениях Δx_i, т. е. яв-

ляется знакопеременной функцией Δx_i, то точка M_0 не является точкой экстремума функции;

3) если $d^2 z(M_0, \Delta x_i) = 0$ при $\Delta x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ одновременно, то для выяснения существования экстремума функции требуются дополнительные исследования.

Если ввести обозначения $z''_{x_i x_k}(x_1^{\text{o}}, x_2^{\text{o}}, \dots x_n^{\text{o}}) = a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, то достаточные условия экстремума могут быть определены знаком квадратичной формы от переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Если квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$ является положительной, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \tag{4}$$

то в стационарной точке $(x_1^{\text{o}}, x_2^{\text{o}}, \dots, x_n^{\text{o}})$ будет минимум; если отрицательной, то максимум. Если квадратичная форма может принимать значения противоположных знаков, то в стационарной точке $(x_1^{\text{o}}, x_2^{\text{o}}, \dots, x_n^{\text{o}})$ экстремума нет. При равенстве квадратичной формы нулю требуются дополнительные исследования на экстремум.

9.1. Найти экстремум функции: а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; б) $z = 3xy - 4x - 8y$; в) $z = x^3 + y^3 - 6x + 2\sqrt{y^3}$; г) $z = 1 + (x-1)^2 (y+1)^4$; д) $z = 1 - x^{2/3} - y^{2/3}$.

Решение. а) Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 6$. Приравниваем производные нулю и находим стационарную точку

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Из решения системы это будет точка $x_0 = -4,\ y_0 = 1$. Вопрос о характере экстремума решается с помощью достаточного признака. Находим: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $D = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Так как $A > 0$, то точка $(-4,1)$ будет точкой минимума функции z. Значение функции в этой точке будет $z_{\min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$.

б) Находим частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 8$. Приравнивая производные нулю, находим критические точки, которые лежат внутри области определения функции: $3y - 4 = 0$, $3x - 8 = 0$, следовательно, $x_0 = \frac{8}{3},\quad y_0 = \frac{4}{3}$.

Воспользуемся теперь достаточным признаком. Для этого найдем вторые производные: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Поскольку $D = AC - B^2 = -9 < 0$, то экстремума в точке $x_0 = \frac{8}{3},\quad y_0 = \frac{4}{3}$ нет.

в) Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 3\sqrt{y}$, приравниваем их к нулю и находим критические точки: $M_1(\sqrt{2}, 0)$ и $M_2(-\sqrt{2}, 0)$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty,\quad 0 \le y < +\infty$ представляет половину плоскости, лежащую выше оси Ox и включающую ось Ox.

Поскольку точки M_1 и M_2 расположены не внутри области определения функции, а на ее границе $y = 0$, то они не являются критическими.

Следовательно, исследуемая функция, как не имеющая критических точек, экстремума не имеет, т. к. граничные точки не могут быть точками экстремума.

г) Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)(y+1)^4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x-1)^2(y+1)^3$. Из решения системы $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ находим единственную точку $M_0(1,-1)$.

Вычисляем вторые производные $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(y+1)^4$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8(x-1)(y+1)^3$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12(x-1)^2(y+1)^2$ и значение $D = AC - B^2$ в критической точке $M_0(1;-1)$. Поскольку $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Рассмотрим знак приращения функции $\Delta z = z(M) - z(M_0)$ в окрестности точки M_0. Если $y_M < -1$, то $\Delta z = (x-1)^2(y+1)^4 > 0$, а если $y_M > -1$, то $\Delta z > 0$. Если $x_M < 1$, то $\Delta z > 0$; если $x_M > 1$, то $\Delta z > 0$. Следовательно, вблизи M_0 приращение $\Delta z > 0$ и точка $M_0(1;-1)$ является точкой минимума $z_{\min} = 1$.

д) Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Частные производные не равны нулю ни при каких значениях x,y и обращаются в бесконечность в точке M_0 (0;0). Следовательно, в точке M_0 производные не существуют и точка M_0 является критической, поскольку принадлежит области определения функции.

Исследуем знак приращения функции в точках достаточно близких к точке M_0.

Приращение $\Delta z = z(M) - z(M_0) = -x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ имеет отрицательный знак при любых отличных от нуля значениях x,y. Таким образом, точка M_0 есть точка максимума $z_{\max} = 1$.

9.2. Найти экстремальные значения: а) $u = xyz(4 - x - y - z)$; б) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

Решение. а) Функция трех переменных. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz(4 - x - y - z) - xyz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz(4 - x - y - z) - xyz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy(4 - x - y - z) - xyz.$$

Приравнивая их к нулю, находим стационарные точки $M_1(0;0;0)$ и $M_2(1;1;1)$.

Вычисляем вторые частные производные: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2yz$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2xz$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z(4 - 2x - 2y - z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x(4 - x - 2y - 2z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y(4 - 2x - y - 2z)$. Нетрудно заметить, что второй дифференциал в точке M_1 равен нулю. Поэтому для выяснения существования экстремума рассмотрим приращение функции в точке $M_1(0;0;0)$, т. е. $\Delta u = u(M) - u(M_1) = xyz(4 - x - y - z)$

Так как знак приращения функции в точках M, достаточно близких к точке $M_1(0;0;0)$, может быть как положительным, так и отрицательным, то экстремума функции в точке M_1 нет.

Исследуем функцию на экстремум в стационарной точке $M_2(1,1,1)$. Для этого выясним знак определителя (4) в точке M_2

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Поскольку квадратичная форма отрицательна, то в точке $M_2(1;1;1)$ функция имеет максимум $u_{vfx} = 1$.

б) Функция z двух независимых переменных x,y задана неявно. Найдем частные производные. Полагая $F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{10y - 2x - 2z}{10z - 2x - 2y}$$

Приравнивая производные к нулю: $10x - 2y - 2z = 0$ и $10y - 2x - 2z = 0$, будем иметь $x = y,\ z = 5x - y = 4x$. Исключая y и z из исходного выражения $10x^2 + 5\cdot 16\,x^2 - 2x^2 - 8x^2 - 8x^2 - 72 = 0$, получим две стационарные точки $x = y = \pm 1$.

Вычислим вторые производные

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(10 - 2z'_x)(10z - 2x - 2y) - (10x - 2y - 2z)(10z'_x - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2},$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(-2 - 2z'_y)(10z - 2x - 2y) - (10x - 2y - 2z)(10z'_y - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(10 - 2z'_y)(10z - 2x - 2y) - (10y - 2x - 2z)(10z'_y - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2}.$$

Найдем значение $D = AC - B^2$ в точке $x = y = 1$. Вычисляя производные: $A = -\frac{5}{18}$, $B = \frac{1}{18}$, $C = -\frac{5}{18}$, будем иметь

$D = \frac{25}{18^2} - \frac{1}{18^2} = \frac{2}{27} > 0$. Так как $A < 0$, то в точке $x = y = 1$ функция имеет максимум.

Найдем теперь значение D в точке $x = y = -1$. Вычисляя производные: $a = \frac{5}{18}$, $B = -\frac{1}{18}$, $C = \frac{5}{18}$, получим $D = \frac{2}{27} > 0$.

Поскольку $A > 0$, то в точке $x = y = -1$ функция имеет минимум.

9.3. Найти размеры прямоугольного бассейна данного объема V так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество плитки.

Решение. Пусть x — длина, y — ширина, z — высота бассейна. Тогда его объем равен $V = xyz$. Полная поверхность бассейна $S = xy + 2(x + y)z$. Исключая отсюда z, будем иметь $S = xy + 2\left(\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right)$.

Исследуем функцию $S(x, y)$ на экстремум. Найдем частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - 2\frac{V}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - 2\frac{V}{y^2}$$

и приравняем их к нулю

$$\begin{cases} x^2 y = 2V, \\ y^2 x = 2V. \end{cases}$$

Из решения системы имеем $x_0 = y_0 = 0$ и $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Поскольку нулевой вариант нас не устраивает, то подставляя x и y в уравнение связи $V = xyz$, находим высоту $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

8.10. Наибольшие и наименьшие значения функций

Пусть функция $z = f(M)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной и замкнутой области D. Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции следует найти все экстремумы функции, лежащие внутри D, и экстремумы на границе. Наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет искомым решением.

Если установлено, что наибольшее или наименьшее значение функции имеет место во внутренних точках области D, то, сравнив их между собой и в тех граничных точках, которые принадлежат D, найдем искомое наибольшее (наименьшее) значение функции.

Если область D не является ограниченной и замкнутой, то среди значений функции $z = f(M)$ в ней может и не быть ни наибольшего, ни наименьшого значения. Наличие или отсутствие наибольшего (наименьшего) значения функции в этом случае определяется из рассмотрения конкретных условий задачи.

10.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $z = x^2 - y^2 - x + y;\quad x = 0,\quad x = 2,\quad y = 0,\quad y = 1;$

б) $z = x^2 + 3y^2 + x - y;\ x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1;$

в) $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y);\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2\pi$.

Решение. а) Заданная область представляет прямоугольник. Найдем стационарные точки функции z, лежащие внутри прямоугольника. Частные производные приравниваем к нулю: $z'_x = 2x - 1 = 0,\ \ z'_y = -2y + 1 = 0$. Отсюда $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, имеется одна критическая точка $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Значение функции в этой точке $z(M)=0$. Исследование функции на экстремум в этой точке не обязательно.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области.

При $x=0$ имеем $z=-y^2+y$, т. е. задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения этой функции на отрезке $0 \le y \le 1$. Находим стационарную точку $z'_y=-2y+1$; $y=\frac{1}{2}$. Поскольку $z''_{yy}=-2<0$, то точка $y=\frac{1}{2}$ является точкой максимума $z_{\max}\left(0;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

В граничных точках функция равна $z(0,0)=0$; $z(0,1)=0$.

При $y = 0$ имеем $z=x^2-x$. Исследуем эту функцию на отрезке $0 \le y \le 2$.

Находим $z'_x=2x-1$; $x=\frac{1}{2}$; $z''_{xx}=2>0$. Точка $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума; $z_{\min}\left(\frac{1}{2};0\right)=-\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(0,0)=0$ и $z(2,0)=2$.

При $y = 1$ имеем $z=x^2-x$. Отсюда $z_{\min}\left(\frac{1}{2};1\right)=-\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(0,1)=0$ и $z(2,1)=2$.

При $x=2$ имеем $z=2-y^2+y$. Исследуем эту функцию на отрезке $0 \le y \le 1$.

Находим $z'_y=-2y+1$, $y=\frac{1}{2}$, $z''_{yy}=-2<0$. Точка $y=\frac{1}{2}$ — точка максимума, $z_{\max}\left(2;\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(2,0)=2$, $z(2,1)=2$.

Сравнивая вычисленные значения z во внутренней стационарной точке и на границе заданной области, находим, что наибольшее значение функция имеет в точке $z_{\max}\left(2;\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$. Наименьшее значение функции равно $z_{\min}=-\frac{1}{4}$. Наименьшее значение функция принимает в двух точках $\left(\frac{1}{2};0\right)$ и $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

б) Заданная область представляет треугольник (рис. 8.1). Найдем стационарные точки: $z'_x=2x+1$, $z'_y=6y-1$, $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{6}$. Поскольку имеется одна стационарная точка и она лежит вне треугольника, то функция может иметь наименьшее и наибольшее значения только на границе области. Исследуем функцию на наибольшее и наименьшее значения на границе.

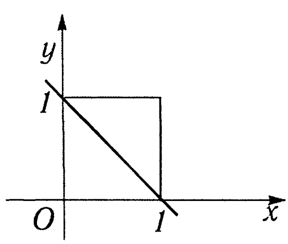


Рис. 8.1

При $x=1$ имеем $z=2+3y^2-y$. Исследуем эту функцию на отрезке $0\le y\le 1$.

Находим $z_y=6y-1$, $y=\frac{1}{6}$, $z''_{yy}=6>0$. Точка $y=\frac{1}{6}$ —

точка минимума; $z_{\min}\left(1;\frac{1}{6}\right)=\frac{23}{12}$. На границе отрезка $z(1,0)=2$, $z(1,1)=4$.

При $y=1$ имеем $z=x^2+x+2$. Исследуем эту функцию на отрезке $0\le x\le 1$.

Находим $z'_x=2x+1$, $x=-\frac{1}{2}$. Так как точка $x=-\frac{1}{2}$ лежит вне отрезка, то вычисляем значения функции на границе отрезка: $z(0,1)=2$ и $z(1,1)=4$.

При $x+y=1$ имеем $z=4y^2-4y+2$. Исследуем эту функцию на отрезке $0\le y\le 1$. Находим $z'_y=8y-4$, $y=\frac{1}{2}$; $z''_{yy}=8>0$. Точка $y=\frac{1}{2}$ — точка минимума $z_{\min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=1$. В граничных точках функция равна $z(0,1)=2$, $z(1,0)=2$.

Сравнивая значения функции на границе заданной области, находим наименьшее значение $z_{\min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=1$ и наибольшее $z_{\max}(1,1)=4$.

в) Заданная область представляет треугольник (рис. 8.2).

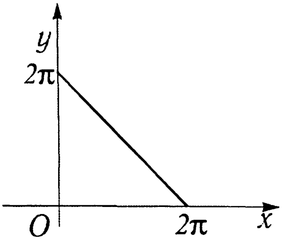


Рис. 8.2

Ищем стационарные точки, лежащие внутри области. Находим производные и приравниваем их к нулю

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\ x-\cos(x+y)=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos\ y-\cos(x+y)=0\,.$$

Из решения системы имеем: $\cos x-\cos y=0$, $\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0,\quad y=\pm x+2k\pi$. Поскольку x изменяется в промежутке $0<x<2\pi$, то достаточно рассмотреть случай $y = x$. Функция при $y = x$ примет вид $z=2\sin x-\sin 2x$. Откуда $z'_x=2\cos x-2\cos 2x,\quad \cos x-\cos 2x=0,\quad 2x=\pm x+2k\pi$.

Значение $x=2k\pi$ не лежит внутри области и его не следует рассматривать.

Следовательно, $y=x=\frac{2}{3}k\pi$ и при $k = 1$ это будет точка $x_0=\frac{2\pi}{3},\quad y_0=\frac{2\pi}{3}$. Так как точка (x_0,y_0) — единственная стационарная точка в области и функция в ней равна $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, то на границе, т. е. при $x=0,\ y=0,\ x+y=2\pi$ функция равна нулю $z = 0$. В точке (x_0,y_0) функция принимает наибольшее значение, а на границе наименьшее.

10.2. На плоскости Oxy **найти** точку $M(x,y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых: $x=0,\ \ y=0,\ \ x-y+1=0$ была бы наименьшей.

Решение. Заданные прямые в прямоугольной системе координат образуют треугольник. Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ внутри треугольника и определим квадраты расстояний до соответствующих прямых. Поскольку квадраты расстояний до прямых $x = 0$, $y = 0$ соответственно равны x^2 и y^2, а квадрат расстояния от точки до прямой $x-y+1=0$ по формуле $d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ равен $\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\right)^2$, то сумма квадратов расстояний будет $u = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x - y + 1)^2$.

Исследуем эту функцию двух переменных на экстремум: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x - y + 1 = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 3y - 1 = 0$. Отсюда единственная стационарная точка $M(x, y)$ имеет координаты $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$. Так как $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3$, $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1$, $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3$ и $D = AC - B^2 = 8 > 0$ при $A > 0$ $(C > 0)$, то в точке $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ функция u суммы квадратов расстояний минимальна.

10.3. Из всех треугольников данного периметра $2p$ **найти тот**, который имеет наибольшую площадь.

Решение. Обозначим стороны треугольника через x, y, z; тогда по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ или, учитывая, что $x + y + z = 2p$, будем иметь $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.

Чтобы найти наибольшее значение площади, достаточно найти наибольшее значение подкоренной функции $u = (p-x)(p-y)(x+y-p)$.

Вычисляем производные и приравниваем их нулю

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(p-y)(x+y-p) + (p-y)(p-x) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(p-x)(x+y-p) + (p-x)(p-y) = 0.$$

Из решения системы уравнений находим единственную стационарную точку $x = y = z = \frac{2p}{3}$. Находим вторые производные в этой точке: $A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{2p}{3}$, $B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{p}{3}$, $C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{2p}{3}$.

Поскольку $D=AC-B^2=\dfrac{p^2}{3}>0$ и $A<0$ $(C<0)$, то исследуемая функция имеет в этой точке максимум.

Вопрос о максимуме функции в точке $x=y=z=\dfrac{2p}{3}$ можно было бы решить и чисто геометрически. В данном случае мы имеем равносторонний треугольник и площадь треугольника максимальна, поскольку, чем больше отличается размер одной стороны от двух других, тем площадь треугольника меньше.

10.4. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

Решение. По условию задачи требуется найти наименьшее значение суммы $S=x+y+z+t$ при условии, что $xyzt=a$. Представляя t в виде $t=\dfrac{a}{xyz}$ и подставляя это выражение в сумму, будем иметь $S=x+y+z+\dfrac{a}{xyz}$, т. е. функцию трех переменных, причем $x>0,\ y>0,\ z>0$. Найдем стационарную точку.

Для этого вычислим производные и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial S}{\partial x}=1-\frac{ayz}{(xyz)^2}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial y}=1-\frac{axz}{(xyz)^2}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial y}=1-\frac{axy}{(xyz)^2}=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $x=y=z=t=\sqrt[4]{a}$, т. е. все множители равны. Докажем, что в этой точке сумма принимает максимальное значение. Действительно, при приближении какой-либо переменной к пограничным значениям $x=0,\ y=0,\ z=0$ равно как и при удалении в бесконечность, функция суммы S бесконечно возрастает. Следовательно, найденная стационарная точка будет той точкой, в которой сумма S будет наименьшей.

8.11. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

1°. *Условным экстремумом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x, y в окрестности этой точки удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$, т. е. $f(M_0) > f(M)$ или $f(M_0) < f(M)$ при $\varphi(x, y) = 0$ и $M \neq M_0$.

Для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа

$$u(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{1}$$

где λ — неопределенный постоянный множитель (множитель Лагранжа).

Необходимые условия условного экстремума определяются системой

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\varphi(x, y) = 0$$

Пусть x_0, y_0, λ_0 — решение этой системы. Составим определитель

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & u''_{xx}(M_0, \lambda_0) & u''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & u''_{xy}(M_0, \lambda_0) & u''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Если $D<0$, то функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ условный максимум, а если $D>0$ — условный минимум.

2°. Функция нескольких независимых переменных $z=z(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ в точке $M_0(x_i^\circ)$ имеет условный экстремум, если в некоторой окрестности точки M_0 для всех ее точек x_i, удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(x_i)=0,\quad (k=1,2,\ \ldots,m;\ m<n)$, выполняется неравенство $f(M_0)>f(M)\vee f(M_0)<f(M)$; $(M_0\neq M)$.

Функция Лагранжа имеет вид

$$u(x_i,\lambda_k)=z(x_i)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_i),$$

где $\lambda_k(k=1,2,\ldots,m)$ — множители Лагранжа, причем их число соответствует числу уравнений связи.

Необходимые условия условного экстремума определяются системой $n+m$ уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0 & (i=1,2,\ldots,n);\\ \varphi_k(M)=0 & (k=1,2,\ldots,m).\end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных, находим λ_k° и координаты точки x_i°, в которой возможен условный экстремум.

Достаточные условия условного экстремума:

1) если второй дифференциал $d^2u(x_i^\circ,\lambda_k^\circ,dx_i)<0$, при условии, что dx_i удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(x_i^\circ)}{\partial x_i}dx_i=0\quad(k=1,2,\ldots,m) \tag{5}$$

при $\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq0$, то функция $z=z(x_i)$ в точке $M_0(x_i^\circ)$ имеет условный максимум;

2) если $d^2u(x_i^o, \lambda_k^o, dx_i) > 0$, при условии (5), то функция в точке $M_0(x_i^o)$ имеет условный минимум.

11.1. Найти условные экстремумы функций: а) $z = x + 3y$ при $x^2 + y^2 = 10$; б) $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; в) $u = xyz$ при $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

Решение. а) Геометрически задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения аппликаты z плоскости $z = x + 3y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 10$.

Составим функцию Лагранжа $u(x, y, \lambda) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$ и найдем частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3 + 2\lambda y$. Необходимые условия существования экстремума определяются системой (2)

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases}$$

которая имеет решения: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, $y_2 = -3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Поскольку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2u = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. При $\lambda = -\frac{1}{2}$; $d^2u < 0$, следовательно, функция имеет в точке $M_1(1,3)$ условный максимум $z_{\max} = 10$. При $\lambda = \frac{1}{2}$; $d^2u > 0$, следовательно, функция имеет в точке $M_2(-1,-3)$ условный минимум $z_{\min} = -10$.

Условный максимум, минимум функции может быть найден также с помощью определителя (3). Для этого находим в точке M_1: $\varphi(x,y)=x^2+y^2-10$, $\varphi'_x(M_1)=2$, $\varphi'_y(M_1)=6$, $u''_{xx}(M_1,\lambda_1)=-1$, $u''_{xy}(M_1,\lambda_1)=0$, $u''_{yy}(M_1,\lambda_1)=-1$

$$D=-\begin{vmatrix}0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 0 & -1\end{vmatrix}=-40<0,$$

т. е. функция в точке M_1 имеет условный максимум.

Аналогично, в точке M_2

$$D=-\begin{vmatrix}0 & -2 & -6\\ -2 & 1 & 0\\ -6 & 0 & 1\end{vmatrix}=40>0,$$

т. е. функция имеет в точке M_2 условный минимум.

б) Функция трех независимых переменных. Составим функцию Лагранжа

$$w=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$$

и найдем частные производные

$$\frac{\partial w}{\partial x}=1+2\lambda x,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=-2+2\lambda x,\qquad \frac{\partial w}{\partial z}=2+2\lambda z.$$

Запишем необходимые условия существования условного экстремума

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0, & 1-\lambda y=0,\\ 1+\lambda z=0, & x^2+y^2+z^2-9=0.\end{cases}$$

Из решения этой системы имеем

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\qquad x_1=-1,\qquad y_1=2,\qquad z_1=-2,$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2},\qquad x_2=1,\qquad y_2=-2,\qquad z_2=2.$$

Вычислим вторые производные

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0$$

и найдем второй дифференциал в первой критической точке $d^2 w\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0$. Поскольку знак второго дифференциала функции Лагранжа положительный, то исследуемая функция в этой точке имеет условный минимум $u_{\min} = -9$.

Знак второго дифференциала во второй критической точке $d^2 w(1, -2,\ 2, -\frac{1}{2}) = -1 < 0$ отрицательный, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум $u_{\max} = 9$.

в) В данном случае уравнений связи два. Составляем функцию Лагранжа

$$w = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + xz - 8).$$

Необходимые условия существования условного экстремума определяются системой уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 z = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_2 x = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 x = 0,$$

$$x + y + z = 5, \qquad xy + yz + xz = 8.$$

Из решения этой системы уравнений находим критические точки: $M_1(2,2,1)$, $M_2\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $M_3(2,1,2)$, $M_4\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, $M_5(1,2,2)$, $M_6\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Вычисляем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=z+\lambda_2,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=x+\lambda_2,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=y+\lambda_2$$

и определяем знак второго дифференциала в стационарных точках. В точке M_1 $d^2w(2,2,1,\lambda_2=-1)=4>0$ функция имеет условный минимум $u_{\min}=4$. В точке M_2 $d^2w\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\ \lambda_2=-\frac{7}{3}\right)=-4<0$ функция имеет условный максимум $u_{\max}=4\frac{4}{27}$. Аналогично вычисляется знак второго дифференциала и в четырех остальных точках. Так в точках M_3, M_5 функция имеет условный минимум равный $u_{\min}=4$, а в точках M_4, M_6 — максимум $u_{\max}=4\frac{4}{27}$.

11.2. В эллипсоид **вписать** прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Решение. В силу симметрии заданных геометрических фигур достаточно исследовать на условный экстремум функцию объема $V=xyz$, т. е. объема параллелепипеда расположенного в первом октанте. Учитывая, что уравнение связи есть уравнение эллипсоида, составим функцию Лагранжа

$$u=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = yz + \lambda \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz + \lambda \frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy + \lambda \frac{2z}{c^2}$, тогда необходимое условие экстремума будет

$$yz + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0, \quad xz + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$xy + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решая эту систему, будем иметь $x = \pm a \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \pm b \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \pm c \frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку рассматривается только первый октант, то условный экстремум будет в точке с координатами $x = a \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = b \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = c \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда следует, что прямоугольный параллелепипед наибольшего объема имеет измерения $x = a \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = b \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $z = c \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Глава 9
ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ

9.1. Касательная и нормаль к плоской кривой

1°. Понятие касательной и нормали в прямоугольных координатах давалось в гл. 7. п.5.

В случае неявного задания кривой $F(x, y) = 0$ уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$F_x'(x,y)(x-x_0)+F_y'(x,y)(y-y_0)=0. \tag{1}$$

Уравнение нормали

$$F_y'(x,y)(x-x_0)-F_x'(x,y)(y-y_0)=0$$

или

$$\frac{x-x_0}{F_x'}=\frac{y-y_0}{F_y'} \tag{2}$$

2°. Если кривая задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и имеет угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y_t'}{x_t'}$, то уравнение касательной

$$y-y_0=\frac{y_0'}{x_0'}(x-x_0) \quad \text{или} \quad \frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}. \tag{3}$$

Уравнение (3) справедливо и для случая, когда $x_t'=0$, а $y_t'\neq 0$, т. к. это означает, что равен нулю и соответствующий предыдущий член. Только в особой точке, где $x_t'=0$ и $y_t'=0$, уравнение (3) теряет смысл.

3°. Если кривая задана полярным уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, то, переходя к прямоугольным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, угол наклона касательной определяется выражением

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_\varphi'}{x_\varphi'}=\frac{\rho_\varphi'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho_\varphi'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}. \tag{4}$$

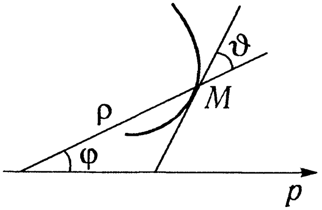


Рис. 9.1

Положение касательной в полярных координатах обычно определяют углом θ с продолжением радиус-вектора (рис. 9.1), а не углом α с полярной осью

$$tg\theta=\frac{\rho}{\rho_\varphi'}. \tag{5}$$

1.1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $2x^3-x^2y^2-3x+y+7=0$ в точке $M(1,-2)$.

Решение. Функция задана неявно. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением (1). Находим значения частных производных в заданной точке

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 - 2xy^2 - 3; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = -5;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2 y + 1; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = 5.$$

Таким образом, $-5(x-1)+5(y+2)=0$ или $x-y-3=0$.

Уравнение нормали находим по формуле (2): $5(x-1)+5(y+2)=0$ или $x+y+1=0$.

1.2. Написать уравнение касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$ в точке M, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Находим координаты точки M:

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y_0 = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Вычислим производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ и найдём угловой коэффициент касательной в точке M:

$$y'(x_0) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Таким образом, уравнение касательной примет вид $y - 1 = 1\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)$ или $x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0$. Уравнение нормали, соответственно, будет $y - 1 = -\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)$ или $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

1.3. Определить положение касательной и нормали к лемнискате $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (5). Продифференцируем уравнение лемнискаты, считая ρ функцией φ $\rho\rho'_\varphi = -2a^2 \sin 2\varphi$.

Разделив это уравнение на уравнение лемнискаты, получим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho}{\rho'_\varphi} = -\operatorname{ctg}2\varphi, \text{ откуда } \theta = \frac{\pi}{2} + 2\varphi.$$

Если обозначить через α и β углы наклона касательной и нормали к полярной оси, то получим

$$\alpha = \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 3\varphi; \qquad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

откуда, $\beta = 3\varphi$, т. е. угол наклона нормали к лемнискате равен утроенному значению полярного угла.

9.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1°. *Касательной плоскостью* к поверхности в заданной на ней точке M называется такая плоскость, которая содержит касательные ко всем кривым, проведённым по поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке касания.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_0}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F_0}{\partial z}(z - z_0) = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial F_0}{\partial x}$, $\frac{\partial F_0}{\partial y}$, $\frac{\partial F_0}{\partial z}$ — значения частных производных в точке M_0; x, y, z — текущие координаты касательной плоскости.

Уравнение нормали к поверхности будет

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F_0}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F_0}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F_0}{\partial z}}. \tag{2}$$

Вектор $\vec{n}\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$ называется *нормальным вектором* к поверхности. Если на поверхности есть точка, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$, то она называется *особой* и в ней нет ни касательной плоскости, ни нормали к поверхности.

Если уравнение поверхности задано в явном виде $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости

$$z-z_0=\frac{\partial f_0}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f_0}{\partial y}(y-y_0), \tag{3}$$

где $\dfrac{\partial f_0}{\partial x},\dfrac{\partial f_0}{\partial y}$ — значения частных производных в точке M_0.

Уравнение нормали в этом случае

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial f_0}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial f_0}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{4}$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности определяются выражениями

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};\ \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};\ \cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{5}$$

где $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$. Двойной знак перед корнем соответствует двум противоположным направлениям нормали.

2°. Если поверхность задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v),$$

то уравнение касательной плоскости в некоторой точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Направляющие косинусы нормали

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\qquad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\nu=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (7)$$

где

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix};\quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix};\quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

3°. Углом между двумя поверхностями в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведёнными к рассматриваемым поверхностям, в данной точке.

Поверхности назыаются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом $\alpha=\frac{\pi}{2}$ в каждой точке линии их пересечения.

2.1. Для данных поверхностей **найти** уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках: а) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке $M_0\left(-1;1;-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $x^3+y^3+z^3-xyz-10=0$ в точке $M_0(-1;2;1)$; в) $x=\rho\sin\varphi$, $y=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\operatorname{tg}\alpha$ в точке $M_0(\rho_0,\varphi_0)$; г) $\vec{r}\left\{u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{a^2-u^2}\right\}$ в точке $\vec{r}_0\left\{x_0,y_0,z_0\right\}$.

Решение. а) Уравнение поверхности задано в явном виде. Воспользуемся формулами (3),(4). Для этого найдём частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2};\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2};\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=\frac{1}{2}.$$

Отсюда уравнение касательной плоскости $z+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(y-1)$ или $x+y-2z=\frac{\pi}{2}$.

Уравнение нормали $\frac{x+1}{1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}$ или $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\pi/4}{-2}$.

б) Уравнение поверхности задано неявно. Обозначив $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-xyz-10$, найдём частные производные в точке M

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-yz,\qquad \frac{\partial F_0}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-xz,\qquad \frac{\partial F_0}{\partial y}=13,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-xy,\qquad \frac{\partial F_0}{\partial z}=5.$$

Используя формулы (1),(2), получим уравнение касательной плоскости $x+1+13(y-2)+5(z-1)=0$ или $x+13y+5z-30=0$ и уравнение нормали $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-1}{5}$.

в) Поверхность задана параметрически. При нахождении касательной плоскости в точке (ρ_0, φ_0) воспользуемся уравнением (6). Вычисляя производные в точке M_0, будем иметь

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & \operatorname{tg}\alpha \\ \rho_0\cos\varphi_0 & -\rho_0\sin\varphi_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда при $x_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$, $y_0 = \rho_0\cos\varphi_0$, $z_0 = \rho_0 \operatorname{tg}\alpha$ получим

$$x\rho_0\sin\varphi_0\operatorname{tg}\alpha - \rho_0^2\sin^2\varphi_0\operatorname{tg}\alpha + y\rho_0\cos\varphi_0\operatorname{tg}\alpha -$$

$$-\rho_0^2\cos^2\varphi_0\operatorname{tg}\alpha - z\rho_0 + \rho_0^2\operatorname{tg}\alpha = 0$$

или

$$x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0 - z\operatorname{ctg}\alpha = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности (2) в точке M_0 будет и уравнением нормали к касательной плоскости. Таким образом,

$$\frac{x-\rho_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{y-\rho_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{z-\rho_0\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha_0}.$$

г) По условию задачи поверхность задана параметрическими уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \sqrt{a^2-u^2}$. Для нахождения касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) воспользуемся формулой (6). Находя частные производные по u,v в точке (x_0, y_0, z_0), будем иметь

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos v_0 & \sin v_0 & -\dfrac{u_0}{\sqrt{a^2-u_0}} \\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$(z-z_0)u_0\cos^2 v_0+(y-y_0)\frac{u_0^2\sin v_0}{\sqrt{a^2-u^2}}+$$

$$+(z-z_0)u_0\sin^2 v_0+(x-x_0)\frac{u_0^2\cos v_0}{\sqrt{a^2-u^2}}=0$$

или, переходя к координатам x,y,z

$$z-z_0+(y-y_0)\frac{y_0}{z_0}+(x-x_0)\frac{x_0}{z_0}=0.$$

Преобразуя последнее выражение к виду $xx_0+yy_0+zz_0=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ и подставляя вместо квадратов в правую часть их значения через криволинейные координаты, окончательно получим $xx_0+yy_0+zz_0=a^2$.

2.2. Написать уравнения нормали к поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ в точке (4;3;5). В какой точке конуса нормаль не определена?

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Обозначая $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-2z,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}=8,\quad \frac{\partial F_0}{\partial y}=6,\quad \frac{\partial F_0}{\partial z}=-10.$$

Уравнение нормали к поверхности конуса примет вид

$$\frac{x-4}{8}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-5}{-10}\quad\text{или}\quad\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-5}{-5}.$$

Вектор $\vec{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ — есть нормальный вектор к поверхности конуса. Поскольку в точке (0;0;0) производные

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$, то эта точка является особой и в ней нормаль к поверхности конуса не определена.

2.3. Найти углы с осями координат нормали к поверхности $x^2+y^2-xz-yz=0$ в точке (0,2,2).

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Воспользуемся формулами (5). Найдём сначала частные производные в точке

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F'_x}{\partial F'_z}=\frac{2x-z}{x+y}, \quad p=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F'_y}{\partial F'_z}=\frac{2y-z}{x+y}, \quad q=1.$$

Таким образом, $\cos\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\mu=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.4. Определить плоскость, касательную к поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$ и а) параллельную плоскости $x-2y+z=0$; б) перпендикулярную к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Решение. а) Уравнение поверхности задано неявно. Обозначаем $F(x,y,z)\ =x^2+2y^2+z^2-4$ и находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z$.

Воспользуемся условием параллельности касательной плоскости и данной плоскости

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{A}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{B}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{C} \quad \text{или} \quad \frac{2x}{1}=\frac{4y}{-2}=\frac{2z}{1}.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$, находим координаты точек касания $M_1(1,-1,1)$ и $M_2(-1,1,-1)$.

Таким образом, касательные плоскости имеют уравнения:
$2(x-1)-4(y+1)+2(z-1)=0$ или $x-2y+z-4=0$;
$-2(x+1)+4(y-1)-2(z+1)=0$ или $x-2y+z+4=0$.

б) Из условия перпендикулярности касательной плоскости и прямой имеем

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{l}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{m}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{n} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1}=\frac{2y}{1}=\frac{2z}{-1}.$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$, находим координаты точек касания $M_1\left(-\frac{4}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ и $M_2\left(\frac{4}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Следовательно, касательные плоскости будут:

$$-\frac{2\cdot 4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{4}{\sqrt{7}}\right)-\frac{4\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(y+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{2\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(z-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)=0,$$

$$\frac{2\cdot 4}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)+\frac{4\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(y-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)-\frac{2\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(z+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)=0$$

или $2x+2y-z+\frac{14}{\sqrt{7}}=0, \quad 2x+2y-z-\frac{14}{\sqrt{7}}=0$.

2.5. К поверхности $x^2-y^2-3z=0$ **провести** касательную плоскость, проходящую через точку $M_1(0,0,-1)$, параллельно прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

Решение. Обозначим $F(x,y,z)=x^2-y^2-3z$ и найдём частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-3$. Воспользуемся условием параллельности данной прямой и касательной плоскости $\frac{\partial F}{\partial x}l+\frac{\partial F}{\partial y}m+\frac{\partial F}{\partial z}n=0$ или $2x-y-3=0$. Присоединяя к этому уравнению уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_1

$$2x(x_1 - x) - 2y(y_1 - y) - 3(z_1 - z) = 0$$

или $2x\sqrt{2} - 2y^2 - 3z - 3 = 0$,

и уравнение поверхности, получим систему

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x^2 - y^2 - 3z = 0, \\ 2x^2 - 2y^2 - 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

Из решения этой системы находим, что координаты точки касания раны $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Таким образом, искомое уравнение касательной плоскости примет вид

$$4(x-2) - 2(y-1) - 3(z-1) = 0 \text{ или } 4x - 2y - 3z = 3.$$

2.6. Доказать, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, равна постоянной величине a^2.

Решение. Обозначим $F(x,y,z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - a^{2/3}$ и найдём частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$

Уравнение касательной плоскости (1) в произвольной точке (x_0, y_0, z_0) примет вид

$$x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0$$

или, если воспользоваться уравнением поверхности

$$\frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = a_0^{2/3}.$$

Координаты точек пересечения этой плоскости с осями координат соответственно равны

$$x=a^{2/3}x_0^{1/3},\quad y=a^{2/3}y_0^{1/3},\quad z=a^{2/3}z_0^{1/3}$$

Отсюда сумма квадратов отрезков равна

$$x^2+y^2+z^2=a^{4/3}(x_0^{2/3}+y_0^{2/3}+z_0^{2/3})=a^{4/3}a^{2/3}=a^2,$$

что и требовалось доказать.

2.7. Показать, что поверхности $x^2+y^2+z^2=ax$ и $x^2+y^2+z^2=4by$ ортогональны друг другу.

Решение. Угол между двумя поверхностями по линии их пересечения определяется углом между соответствующими касательными плоскостями в каждой точке линии пересечения. Будем определять положение касательных плоскостей их нормалями, тогда угол между поверхностями равен углу между нормалями к касательным плоскостям по линии пересечения поверхностей.

Введём обозначения $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-ax$ и $F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4by$ и найдём частные производные

$$l_1=\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x-a,\quad l_2=\frac{\partial F_2}{\partial x}=2x,\ m_1=\frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\ m_2=\frac{\partial F_2}{\partial y}=2y-4b,$$

$$n_1=\frac{\partial F_1}{\partial z}=2z,\quad n_2=\frac{\partial F_2}{\partial z}=2z.$$

Воспользуемся условием ортогональности $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ нормалей по линии пересечения поверхностей $ax=4by$,

$$2x(2x-a)+2y(2y-4b)+2z\cdot 2z=0,$$

$$4x^2-2ax+4y^2-8by+4z^2=0,\ 4ax-2ax-2ax=0,$$

т. е. условие ортогональности выполняется, что и требовалось доказать.

9.3. Кривизна плоской кривой

Кривизной кривой в точке M (рис. 9.2) называется предел отношения угла поворота θ касательной к длине s дуги MN, когда $N \to M$, т. е. $k = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\theta}{s}$.

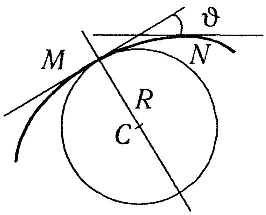


Рис. 9.2

Кривизна кривой $y = f(x)$ в некоторой точке характеризуется отклонением кривой от своей касательной в этой точке и определяется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}. \tag{1}$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то её кривизна определяется выражением

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Если кривая задана уравнением в неявном виде $F(x,y) = 0$, то её кривизна

$$k = \left|\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F_x'^2+F_y'^2\right)^{3/2}}\right|. \tag{3}$$

Если кривая задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, то её кривизна

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}}. \tag{4}$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* и определяется по формуле $R = \frac{1}{k}$. *Вершиной кривой* называется такая точка кривой, в которой кривизна имеет максимум или минимум. Для определения вершин кривой выражение кривизны k исследуют на экстремум. В некоторых случаях при нахождении вершин кривой целесообразнее исследовать на экстремум радиус кривизны.

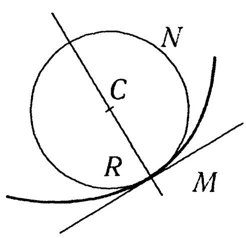


Рис. 9.3

Кругом кривизны кривой в некоторой её точке M называется окружность с радиусом R, равным радиусу кривизны кривой в этой точке, и центром C, расположенным на нормали к кривой в точке M со стороны её вогнутости (рис. 9.3). Координаты (ξ, η) центра кривизны кривой в её точке $M(x, y)$ определяются по формулам

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y' = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{y};$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{x}. \tag{5}$$

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется её *эволютой*. Обратно, данная кривая по отношению к своей эволюте называется её *эвольвентой*. Уравнения (5) являются параметрическими уравнениями эволюты. Если исключить из них параметр t, то получим уравнение эволюты в неявном виде $F(\xi,\eta)=0$.

3.1. Найти кривизну кривых: а) $y=x^2-4x$ в точке $(2,-4)$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в вершинах; в) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ в произвольной точке; г) $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$ при $t=\pi$.

Решение. а) Находим производные: $y'=2x-4; \quad y''=2$ и вычисляем их значения в заданной точке $y'(2)=0, \quad y''=2$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получим $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=2$.

б) Функция задана неявно. Находим производные: $F'_x=\dfrac{2x}{a^2}$, $F''_{xx}=\dfrac{2}{a^2}$, $F'_y=\dfrac{2y}{b^2}$, $F''_{yy}=\dfrac{2}{b^2}$, $F''_{xy}=0$ и их значения в вершине эллипса $(a,0)$: $F'_x=\dfrac{2}{a}$, $F''_{xx}=\dfrac{2}{a^2}$, $F'_y=0$, $F''_{yy}=\dfrac{2}{b^2}$, $F''_{xy}=0$. Подставляя найденные значения в формулу (3),

получим $k=\left|\dfrac{\begin{vmatrix}\dfrac{2}{a^2} & 0 & \dfrac{2}{a}\\ 0 & \dfrac{2}{b^2} & 0\\ \dfrac{2}{a} & 0 & 0\end{vmatrix}}{\dfrac{8}{a^3}}\right|=\dfrac{a}{b^2}.$

Значения производных в вершине эллипса $(0,b)$ будут: $F'_x = 0$, $F''_{xx} = \frac{2}{a^2}$, $F'_y = \frac{2}{b}$, $F''_{yy} = \frac{2}{b^2}$, $F''_{xy} = 0$. Отсюда кривизна

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & \frac{2}{a} \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{8}{a^3}} = \frac{b}{a^2}.$$

В силу симметрии, кривая в точке $(-a,0)$ равна $k = \frac{a}{b^2}$, а в точке $(0,-b)$ равна $k = \frac{b}{a^2}$.

в) Находим производные $2\rho\rho' = -2a^2 \sin 2\varphi$, $\rho' = -\frac{a^2}{\rho}\sin 2\varphi$, $\rho'' = \frac{a^2\rho'}{\rho^2}\sin 2\varphi - \frac{2a^2}{\rho}\cos 2\varphi = -\frac{a^4}{\rho^3}\sin^2 2\varphi - \frac{2a^2}{\rho}\cos 2\varphi$ и подставляем их в формулу (4), тогда

$$k = \frac{\rho^2 + 2\frac{a^4}{\rho^2}\sin^2 2\varphi + \rho\left(\frac{a^4}{\rho^3}\sin^2 2\varphi + 2\frac{a^2}{\rho}\cos 2\varphi\right)}{\left(a^2\cos 2\varphi + 2\frac{a^4}{\rho^2}\sin^2 2\varphi\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\rho^4 + 2a^4\sin^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi + 2a^2\rho^2\cos 2\varphi}{\rho^2((a^4\cos^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi)/\rho^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^4\cos^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi + 2a^4\sin^2 2\varphi + 2a^4\cos^2 2\varphi}{\rho^2 a^6/\rho^3} = \frac{3a^4\rho}{a^6} = \frac{3\rho}{a^2}.$$

г) Находим производные:

$\dot{x} = a(1-\cos t)$, $\dot{y} = \sin t$, $\ddot{x} = a\sin t$, $\ddot{y} = \cos t$ и их значения при $t = \pi$: $\dot{x} = 2a$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -1$. Подставляя производные в формулу (2), получим $k = \dfrac{|-2a|}{(2a)^3} = \dfrac{1}{4a^2}$.

3.2. Найти радиусы кривизны в любой точке данных кривых: а) $y = x^3$; б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; в) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$; г) $\rho = a\varphi$.

Решение. а) Находим производные $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$ и по формуле $R = \dfrac{1}{k}$ определяем радиус кривизны

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+9x^4)^{3/2}}{|6x|}.$$

б) Функция задана неявно $F(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0$.

Находим производные: $F'_x = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$, $F'_y = \dfrac{2}{3}y^{-1/3}$,

$F''_{xx} = -\dfrac{2}{9}x^{-4/3}$, $F''_{yy} = -\dfrac{2}{9}y^{-4/3}$, $F''_{xy} = 0$.

Радиус кривизны находим по формуле

$$R = \left|\frac{\left(F_x'^2 + F_y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{Vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{Vmatrix}}\right| = \left|\frac{\left(\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{Vmatrix} -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} & 0 & \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ 0 & -\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}} & \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} & 0 \end{Vmatrix}}\right| =$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3}\left|\frac{\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\right)}\right|=3a\left|\frac{(xy)^{\frac{4}{3}}}{xy\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}\right|=3a\sqrt[3]{|xy|}.$$

в) Находим производные: $\dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t$, $\dot{y}=3a\sin^2 t\cos t$, $\ddot{x}=-3a(-2\cos t\sin^2 t+\cos^3 t)=3a\cos t(2\sin^2 t-\cos^2 t)$, $\ddot{y}=3a(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)=3a\sin t(2\cos^2 t-\sin^2 t)$. Радиус кривизны находим по формуле

$$R=\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=$$

$$=\frac{\left(9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(2\cos^2 t-\sin^2 t\right)-9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(2\sin^2 t-\cos^2 t\right)\right|}=$$

$$=\frac{3a\sin^3 t\cos^3 t}{\left|\sin^2 t\cos^2 t\,(-2+1)\right|}=\frac{3a|\sin 2t|}{2}.$$

г) Находим производные: $\rho'=a,\quad \rho''=0$ и по формуле $R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$ находим радиус кривизны $R=\frac{(\rho^2+a^2)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$.

3.3. Найти наибольшую кривизну параболы $y=\frac{x^2}{2}$.

Решение. Находим производные $y'=x,\quad y''=1$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получим $k=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. Кривизна будет наибольшей, когда знаменатель будет наименьшим, т. е. при $x=0$. Таким образом, наибольшая кривизна равна $k=1$.

3.4. Найти вершины кривых: а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; б) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $R_{\min}$ – ?

Решение. а) Функция задана неявно $F(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}=0$. Находим производные: $F'_x=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $F'_y=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, $F''_{xx}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $F''_{yy}=-\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}$, $F''_{xy}=0$, отсюда кривизна

$$k=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{4}\left(x^{-1}+\frac{1}{4}y^{-1}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y^{3/2}}+\frac{1}{y}\frac{1}{x^{3/2}}\right)}{\left(\frac{x+y}{xy}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{a}}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Из уравнения кривой находим, что $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$, тогда

$$k(x)=\frac{\sqrt{a}}{2(x+(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$k'_x=-\frac{\sqrt{a}\,\frac{3}{2}\left(x+(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2)^{\frac{1}{2}}(1-2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\cdot(x+(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2)^3}.$$

Отсюда $x+(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2=0$, $x+a-2\sqrt{ax}+x=0$, $a^2+4x^2=0$ — корней нет; $1-2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$, $\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x}=0$, $2\sqrt{x}=\sqrt{\dfrac{a}{x}}$, $x=\dfrac{a}{4}$, $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$, $\sqrt{y}=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$, $y=\dfrac{a}{4}$.

Поскольку функция кривизны в точке $\left(\dfrac{a}{4},\dfrac{a}{4}\right)$ имеет экстремум, т. к. при переходе через точку $x=\dfrac{a}{4}$ производная меняет знак, то это вершина кривой.

б) Находим производные: $\rho'=a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$, $\rho''=\dfrac{a}{3}\sin\dfrac{\varphi}{3}\left(2\cos^2\dfrac{\varphi}{3}-\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\right)$ и по формуле (4) кривизну

$$k=\frac{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+2a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}-\frac{a^2}{3}\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{3}-\sin^2\frac{\varphi}{3}\right)}{\left(a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{a^2\left(3\sin^4\frac{\varphi}{3}+2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}-\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\right)}{3a^2\sin^3\frac{\varphi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3a}\sin\frac{\varphi}{3}\left(4+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right).$$

Рассматривая кривизну как функцию угла φ, исследуем её на экстремум:

$$k'_\varphi=\frac{1}{3a}\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\left(4+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{2}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{9a}\cos\frac{\varphi}{3}\left(5-3\sin^2\frac{\varphi}{3}\right), \quad 5-\sin^2\frac{\varphi}{3}\neq 0,$$

т. к. $\sin\frac{\varphi}{3}<\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\cos\frac{\varphi}{3}=0$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

При переходе φ через значение $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ производная меняет знак с плюса на минус, т. е. кривизна максимальна. Следовательно, при этом значении φ радиус кривизны $R=\frac{1}{k}=\frac{3}{4}a$ минимален.

3.5. Найти окружность кривизны гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Находим производные: $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$ и их значения в точке M: $y'=-1$, $y''=2$ и радиус кривизны $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. Построим гиперболу и окружность (рис. 9.4). Очевидно, что точка M и центр окружности O' лежат на биссектрисе первого координатного угла. Спроектируем центр окружности на ось Ox, а точку M на перпендикуляр $O'N$. Это возможно, если $MN=NO'=1$.

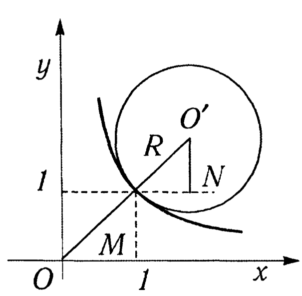


Рис. 9.4

Таким образом, координаты центра окружности будут (2;2). Отсюда, уравнение окружности примет вид $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

3.6. Найти координаты центров кривизны и написать уравнения окружностей кривизны кривых: а) $y=e^{-x}$ в точке (0;1); б) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ в точке $M(\pi a, 2a)$.

Решение. а) Находим производные: $y'=-e^{-x}$, $y''=e^{-x}$, их значения в точке: $y'=-1$, $y''=1$ и радиус кривизны $R=\frac{(1+1)^{3/2}}{1}=2\sqrt{2}$.

Координаты центра кривизны кривой находим по формулам (5) $\xi=x-\frac{1+y'^2}{y''}y'=2$, $\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=3$.

Отсюда, уравнение окружности будет $(x-2)^2+(y-3)^2=8$.

б) Находим производные: $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $y=a\sin t$, $\ddot{x}=a\sin t$, $\ddot{y}=a\cos t$. Определяем параметр t в точке M: $2a=a(1\cos t)$, $\cos t=-1$, $t=\pi$. Вычисляем при $t=-1$ значения производных: $\dot{x}=2a$, $\dot{y}=0$, $\ddot{x}=0$, $\ddot{y}=-a$. По формулам (5) находим координаты центра кривизны кривой $\xi=\pi a$, $\eta=-2a$. Радиус кривизны вычисляем по формуле

$$R=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=\frac{(2a)^3}{|2a(-a)|}=4a.$$

Зная координаты центра кривизны и радиус кривизны, запишем уравнение окружности кривизны кривой в точке M: $(x-\pi a)^2+(y+6a)^2=16a^2$.

3.7. Написать уравнение эволюты кривой и построить кривую и её эволюту: а) $y=\frac{3}{2}x^2$; б) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; в) $x=\cos t$, $y=2\sin t$; г) $\rho=ae^{k\varphi}$.

Решение. а) По формулам (5) находим координаты центра кривизны кривой $\xi = x - \dfrac{3x(1+9x^2)}{3} = -9x^3$, $\eta = y + \dfrac{1+9x^2}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{2}x^2$.

Исключаем из этих выражений x. Из первого равенства имеем $x = -\sqrt[3]{\dfrac{\xi}{9}}$. Подставляя найденное значение x во второе выражение, получим уравнение эволюты в явном виде $\eta = \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{\xi}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$. Таким образом, эволютой параболы является полукубическая парабола (рис. 9.5).

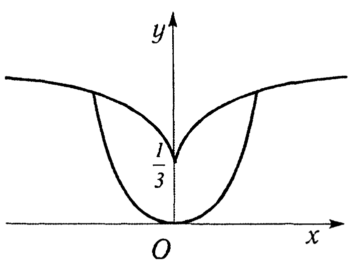


Рис. 9.5

б) Уравнение астроиды. Функция задана неявно. Находим производные: $y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2}{x^4 y}\right)^{\frac{1}{3}}$. Подставляя производные в формулы (5), получим

$$\xi = x + \frac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2}{x^4 y}\right)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

Пользуясь уравнением самой астроиды, исключаем из этих выражений x и y:

$$\xi+\eta=\left(x^{1/3}+y^{1/3}\right)^3,\quad \xi-\eta=\left(x^{1/3}-y^{1/3}\right)^3,\ (\xi+\eta)^{1/3}=x^{1/3}+y^{1/3},$$

$$(\xi-\eta)^{1/3}=x^{1/3}-y^{1/3},\ (\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3}=2(x^{2/3}+y^{2/3})=2a^{2/3}.$$

Если повернуть оси координат на 45° и по формулам $\xi_1=\dfrac{\xi+\eta}{\sqrt{2}},\quad \eta_1=-\dfrac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$ выразить новые координаты через старые, то уравнение эволюты в новой координатной системе примет вид $\xi_1^{2/3}+\eta_1^{2/3}=(2a)^{2/3}$. Таким образом, эволютой астроиды будет астроида вдвое больших размеров (рис. 9.6) и с осями, повёрнутыми на 45° относительно старых координат.

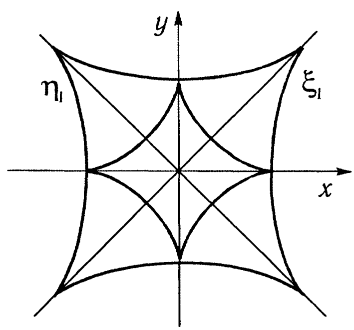


Рис. 9.6

в) Параметрические уравнения эллипса. Находим производные: $\dot{x}=-\sin t,\ \dot{y}=2\cos t,\ \ddot{x}=-\cos t,\ \ddot{y}=-2\sin t$. Подставляя в формулы (5), получим

$$\xi=\cos t-\frac{\sin^2 t+4\cos^2 t}{2\sin^2 t+2\cos^2 t}2\cos t=$$

$$=\cos t-(1-\cos^2 t+4\cos^2 t)\cos t=-3\cos^3 t,$$

$$\eta = 2\sin t - \frac{\sin^2 t + 4\cos^2 t}{2\sin^2 t + 2\cos^2 t}\sin\ t =$$

$$= 2\sin t - \left(\frac{1}{2}\sin^2 t + 2 - 2\sin^2 t\right)\sin t = \frac{3}{2}\sin^3 t.$$

Исключая параметр t, получим уравнение эволюты эллипса в неявном виде $\xi^{2/3} + (2\eta)^{2/3} = 3^{2/3}$. Кривая напоминает астроиду и получается из неё путём вытягивания по горизонтальному направлению (рис. 9.7)

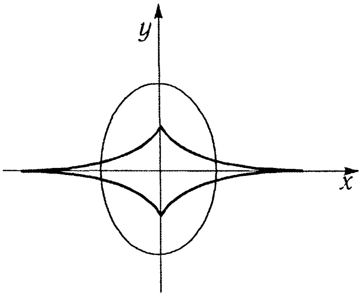


Рис. 9.7

г) Кривая, заданная данным уравнением, представляет логарифмическую спираль. Находим производные $\rho' = k\rho$, $\rho'' = k^2\rho$. Подставляя их в формулу $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$, определяем радиус кривизны $R = \rho\sqrt{1+k^2}$. Поскольку кривая задана в полярных координатах, то положение касательной определяется углом θ с продолженным радиус-вектором (рис. 9.8). Имеем $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1}{k}$ $-const$, то есть угол между радиус-вектором и касательной сохраняет постоянную величину в каждой точке M кривой. Поскольку $k=\operatorname{ctg}\theta$, то радиус кривизны $R=\dfrac{\rho}{\sin\theta}$ и, как следует из ΔONM, совпадает с полярным отрезком нормали NM. Поскольку точка N является центром кривизны, то координаты центра кривизны ρ_1,φ_1 в полярной системе координат (см.рис. 9.8) примут вид $\rho_1=\rho\operatorname{ctg}\theta=k\rho$, $\varphi_1=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$.

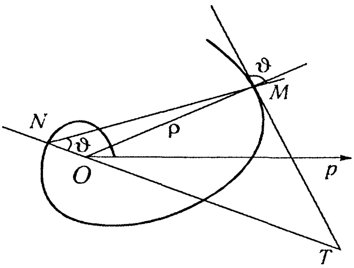


Рис. 9.8

Пользуясь уравнением логарифмической спирали, исключаем ρ и φ из этих уравнений, тогда уравнение эволюты примет вид $\rho_1=kae^{k\left(\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right)}$. Нетрудно заметить, что уравнение эволюты также представляет уравнение логарифмической спирали, которая получается из исходной поворотом полярной оси вокруг полюса на $\dfrac{\pi}{2}$.

9.4. Особые точки плоских кривых

1°. *Особой точкой* $M(x_0,y_0)$ плоской кривой $F(x,y)=0$ называется такая точка, координаты которой удовлетворяют трём уравнениям

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

При исследовании основных типов особых точек вводят обозначения $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$, не все равные нулю и $D = AC - B^2$.

Если $D > 0$, то M_0 — *изолированная точка* (рис. 9.9).

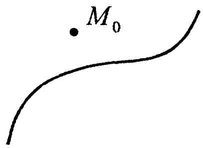


Рис. 9.9

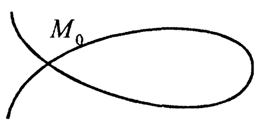


Рис. 9.10

Если $D < 0$, то M_0 — *узел*, т. е. *двойная точка* (рис. 9.10).

Если $D = 0$, то M_0 — *точка возврата первого рода* (рис. 9.11) или второго рода (рис. 9.12) или точка *самоприкосновения* (рис. 9.13), или *изолированная точка*.

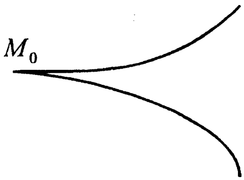


Рис. 9.11

Рис. 9.12

Для решения вопроса о виде особой точки необходимо рассмотреть расположение точек кривой в окрестности особой точки. Угловой коэффициент касательной к кривой в особой точке может быть найден из выражения $Ck^2 + 2Bk + A = 0$. В случае изолированной точки касательных нет; в узловой точке — две различные касательные; в точке возврата или самоприкосновения — одна общая касательная к обеим ветвям кривой.

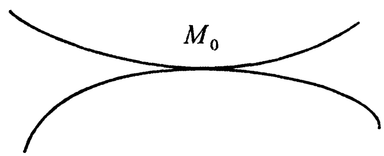


Рис. 9.13

2°. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и при $t=t_0$ $x_0'=\varphi'(t_0)=0$ и $y_0'=\psi'(y_0)=0$, то имеет место особая точка.

Пусть хотя бы одна из производных второго порядка x_0'', y_0'' отлична от нуля, например $x_0''>0$, тогда налицо точка возврата. Если $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''+0\neq 0$, то M_0 — точка возврата первого рода; если $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''=0$, то M_0 — точка возврата второго рода.

В случае трансцендентной кривой могут встретиться и другие виды точек: угловые точки, точки прекращения и т. д.

4.1. Выяснить характер особых точек кривой $x^2=ay^2+y^3$.

Решение. Обозначим $F(x,y)=ax^2+y^3-x^2$ и найдём частные производные $F_x'=-2x$, $F_y'=2ay+3y^2$. Из решения системы уравнений

$$\begin{cases} ay^2+y^3-x^2=0, \\ -2x=0, \\ 2ay+3y^2=0, \end{cases}$$

находим координаты особой точки $O(0,0)$.

Для выяснения типа особой точки находим вторые частные производные в ней

$F_{xx}''=-2;\quad A=-2,$

$F_{xy}''=0;\quad B=0,$

$F_{yy}''=2a+6y;\quad C=2a.$

Отсюда $D = AC - B^2 = -4a$. Если $a > 0$, то $D < 0$ и точка O — узел (рис. 9.14).

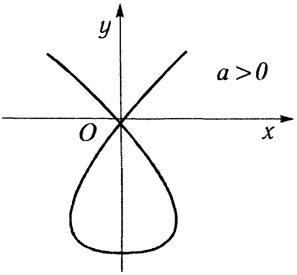


Рис. 9.14

Составим уравнение касательной в особой точке $2ak^2 - 2 = 0$ или $k^2 = \frac{1}{a}$, т. е. касательные имеют углы наклона $y' = k = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$. Если $a < 0$, то $D > 0$ и точка O — изолированная точка (рис. 9.15) и касательной нет. Если $a = 0$, то $D = 0$. Уравнение кривой в этом случае будет $x^2 = y^3$ или $x = \pm\sqrt{y^3}$, где $y \geq 0$, т. е. кривая симметрична относительно оси Oy, которая будет касательной. Следовательно, точка O — точка возврата первого рода (рис. 9.16).

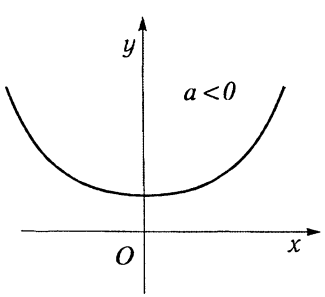


Рис. 9.15

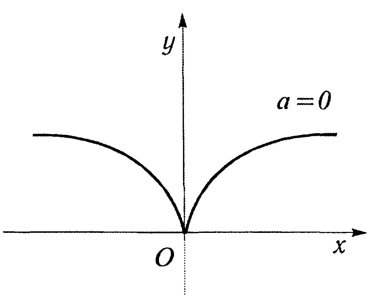


Рис. 9.16

4.2. Показать, что особые точки кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ есть точки возврата первого рода.

Решение. Найдём первые производные $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$. Приравнивая их нулю, получим четыре особые точки $t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{\pi}{2},\ t_3 = \pi,\ t_4 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Вычислим вторые производные $x'' = 3a(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t)$, $y'' = 3a(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)$.

Поскольку в особых точках вторая производная x''_i или y''_i отлична от нуля, то налицо точки возврата. Найдём третьи производные $x''' = 3a(7\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t),\ y''' = 3a(2\cos^4 t - 7\sin^2 t\cos t)$.

Так как в особых точках $M_i (i = 1,2,3,4)$

$$x'''_i y''_i - x''_i y'''_i = 9a^2\,(7\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t)(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)\Big|_{M_i} -$$

$$-9a^2\,(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t)(2\cos^3 t - 7\sin^2 t\cos t)\Big|_{M_i} \neq 0,$$

то это точки возврата первого рода. Нетрудно заметить, что заданная кривая есть астроида (рис. 9.17), декартовые координаты точек возврата которой, соответственно $(a,0),(0,a),(-a,0),(0,-a)$.

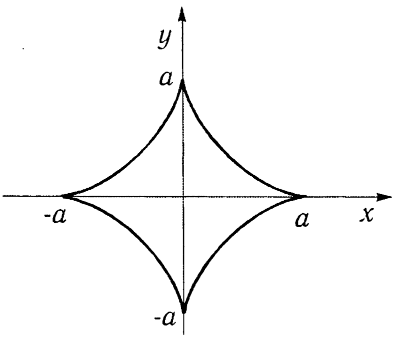


Рис. 9.17

9.5. Касание кривых между собой

1°. Если кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют общую точку $M_0(x_0, y_0)$ и касательные к обеим кривым в этой точке совпадают, то кривые в точке M_0 касаются друг друга. Условие касания двух кривых в точке M_0 имеет вид

$$f(x_0) = g(x_0), \qquad f'(x_0) = g'(x_0).$$

Если в точке M_0 для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные всех порядков до $(n + 1)$ -го включительно и выполняются условия $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, то говорят, что в точке M_0 кривые имеют порядок касания n. При $n \geq 2$ кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке M_0 имеют не только общую касательную, но и одинаковую кривизну.

Если кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют общую точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. $f(x_0) = g(x_0)$, а касательные к кривым в этой точке не совпадают $f(x_0) \neq g(x_0)$, то говорят, что кривые в точке M_0 пересекаются.

2°. *Огибающей семейства* плоских кривых называется кривая, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и причём вся состоит из этих точек касания.

Если уравнение семейства кривых, зависящих от одного переменного параметра α, имеет вид $F(x, y, \alpha) = 0$, то параметрические уравнения огибающей определяются системой уравнений

$$F(x, y, \alpha) = 0; \quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \qquad (1)$$

Исключая из уравнений (1) параметр α, получим уравнение

$$D(x, y) = 0, \qquad (2)$$

которое называется уравнением *дискриминантной кривой*. Дискриминантная кривая может содержать геометрическое место особых точек данного семейства, не входящее в состав огибающей данного семейства.

3°. *Соприкасающаяся кривая.* Пусть дано уравнение кривой $y = f(x)$ и семейство кривых с n параметрами $G(x, y, a, b, \dots, l) = 0$. Требуется, изменяя знчения параметров, выбрать из этого семейства такую кривую, которая с данной кривой в некоторой её точке $M_0(x_0, y_0)$ имела бы наивысший возможный порядок касания, т. е. найти к данной кривой $y = f(x)$ соприкасающуюся в точке M_0 кривую.

Введём обозначение $\Phi(x, a, b, \dots, l) = G(x, f(x), a, b, \dots, l)$ и запишем условия касания

$$\Phi(x_0, a, b, \dots, l) = 0, \quad \Phi'_x(x_0, a, b, \dots, l) = 0, \dots,$$

$$\Phi^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x_0, a, b, \dots, l) = 0. \tag{3}$$

Из системы n уравнений (3) с n неизвестными находим систему значений параметров $a, b, \dots, l$. Таким образом определяется соприкасающаяся кривая, имеющая порядок касания не ниже $n-1$.

5.1. Найти порядок касания цепной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ с параболой $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Обозначим $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ и найдём последовательные производные от этих функций

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad g'(x) = x,$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad g''(x) = 1,$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad g'''(x) = 0, \dots$$

Вычислим в точке $x_0 = 0$ значения данных функций и их производных

$$f(0) = 1,\quad g(0) = 1,\quad f'(0) = 0,\quad g'(0) = 0,$$
$$f''(0) = 1,\quad g''(0) = 1,\quad f'''(0) = 0,\quad g'''(0) = 0.$$

Поскольку $f^{(4)}(0) = 1$, а $g^{(4)}(0) = 0$, т. е. $f^{(4)}(0) \neq g^{(4)}(0)$, то $n = 3$ и кривые имеют третий порядок касания.

5.2. При каких значениях параметров a,b прямая $y = 2x + b$ будет иметь с кривой $y = e^{ax}$ в точке $x_0 = 0$ касание первого порядка?

Решение. Пусть $f(x) = 2x + b$ и $g(x) = e^{ax}$. Условия касания этих линий в точке $x_0 = 0$ имеют вид: $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$. Таким образом, $2 \cdot 0 + b = e^{a} \cdot 0$; $2 = ae^{a\cdot 0}$. Отсюда $a = 2$, $b = 1$.

5.3. Найти огибающую семейства окружностей $(x-a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Решение. Данное семейство окружностей зависит от параметра a. Дифференцируя по a, составим систему уравнений (1)

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}, \\ 2x = a. \end{cases}$$

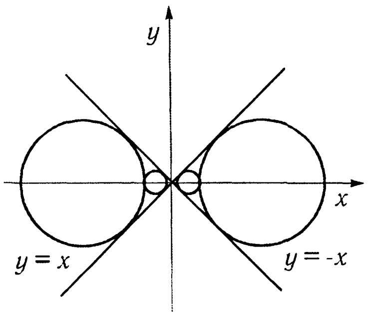


Рис. 9.18

Исключая a, получим $y = \pm x$ — две прямые, биссектрисы координатных углов, которые и являются огибающими данного семейства окружностей (рис. 9.18).

5.4. Найти кривую, которую огибает отрезок длины l, когда его концы скользят по осям координат.

Решение. За параметр возьмём угол α, который составляет перпендикуляр к движущейся прямой с осью x, тогда уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha} = l.$$

Дифференцируя по α, получим

$$-\frac{x\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{y\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sin^3\alpha} = \frac{y}{\cos^3\alpha}.$$

Определяя из этих уравнений x,y, будем иметь

$$\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}x = l, \qquad x = l\sin^3\alpha;$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}y + \frac{y}{\cos\alpha} = l, \qquad y = l\cos^3\alpha,$$

т. е. огибающей будет астроида (рис. 9.17).

5.5. Исследовать характер дискриминантной кривой кубической параболы $y = (x-a)^3$.

Решение. Дифференцируем данную кривую по параметру a и составляем систему

$$\begin{cases} y = (x-a)^3, \\ 0 = -3(x-a)^2. \end{cases}$$

Исключая отсюда параметр a, находим дискриминантную кривую $y = 0$, которая является геометрическим местом точек перегиба и огибающей данного семейства (рис. 9.19).

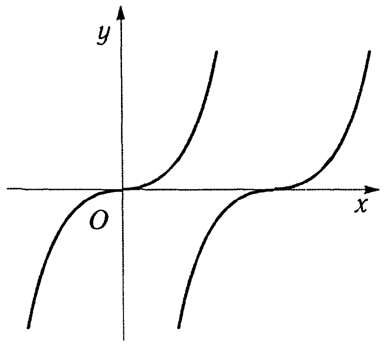


Рис. 9.19

5.6. Найти соприкасающуюся кривую для семейства окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Решение. Поскольку семейство окружностей содержит три параметра a,b,R, то наивысший порядок касания будет второй. Полагая $y=f(x)$, будем иметь

$$\Phi(x,a,b,R)=(x-a)^2+(y-b)^2-R^2,$$

$$\Phi'_x(x,a,b,R)=2(x-a)+2(y-b)y',$$

$$\Phi''_{xx}(x,a,b,R)=2+2y'^2+2(y-b)y''.$$

Обозначим значения y, y', y'', отвечающие выбранному значению $x=x_0$, через y_0, y'_0, y''_0. Тогда для определения параметров a,b,R получим систему (3)

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2,$$
$$x_0-a+(y_0-b)y'_0=0,$$
$$1+y_0'^2+(y_0-b)y''_0=0.$$

Из двух последних уравнений этой системы находим координаты центра

$$a=x_0-y'_0\frac{1+y_0'^2}{y_0^2}; \quad b=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y''_0}.$$

Из первого уравнения находим радиус $R=\dfrac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|}$.

Найденные параметры a, b, R и устанавливают характер соприкасающейся кривой.

9.6. Производная вектор-функции

1°. Пусть $\vec{a}(t)$ — непрерывная вектор-функция, где t — скалярный аргумент. Если откладывать значения вектора $\vec{a}(t)$ при различных значениях t, от общего начала O, то конец вектора опишет некоторую непрерывную кривую, которую называют *годографом вектора* $\vec{a}(t)$.

Предел отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется производной вектор-функции при взятом значении t_0 и обозначается

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t_0+\Delta t)-\vec{a}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}.$$

Если вектор $\vec{a}$ задан проекциями на оси координат $\vec{a}(t)=a_x(t)\vec{i}+a_y(t)\vec{j}+a_z(t)\vec{k}$, то производная вектор-функции имеет вид

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k}. \tag{1}$$

Вектор $\dot{\vec{a}}$ направлен по касательной к годографу вектора $\vec{a}$ в сторону возрастания аргумента t. Если вектор $\vec{a}(t)$ изменяется только по направлению, то его годограф определяет линию, расположенную на сфере радиуса $R=|\vec{a}|$ с центром в начале координат. Если вектор $\vec{a}(t)$ изменяется только по модулю, то его годограф определяет луч, исходящий из начала координат. Вектор $\dot{\vec{a}}$ в этом случае направлен по лучу.

2°. Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\pm\vec{b})=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\pm\dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

2) $\dfrac{d\vec{c}}{dt}=0$, где $\vec{c}$ — постоянный вектор;

3) $\dfrac{d}{dt}(m\vec{a})=m\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, где m — постоянный скаляр;

4) $\dfrac{d}{dt}(\mu\vec{a})=\mu\dfrac{d\vec{a}}{dt}+\vec{a}\dfrac{d\mu}{dt}$, где $\mu=\mu(t)$ — скалярная функция от t;

5) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{b}\cdot\dfrac{d\vec{a}}{dt}+\vec{a}\dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

6) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

7) $\dfrac{d}{dt}\vec{a}(\varphi(t))=\dfrac{d\vec{a}}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi=\varphi(t)$ — скалярная функция от t.

3°. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ или векторным уравнением $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, то производная вектор-функции определяется по формуле

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{2}$$

Дифференциал дуги пространственной кривой вычисляется по формуле

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt. \tag{3}$$

4°. Если взять за $\vec{a}(t)$ радиус-вектор $\vec{r}$ некоторой движущейся точки M, а за t — время, то скорость движущейся точки есть производная её радиус-вектора по времени $\dot{\vec{r}}(t)$, а годограф вектора $\vec{r}$ есть траектория движения точки M. При этом направление вектора $\dot{\vec{r}}(t)$ указывает направление скорости (вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ направлен по касательной к траектории), а модуль $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$ — величину скорости и равен производной от пути по времени $|\dot{\vec{r}}|=\dfrac{ds}{dt}$. Вектор $\ddot{\vec{r}}=\vec{w}$ — есть вектор ускорения, равный

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Если точка движется в пространстве, то её уравнение движения имеет вид $\vec{r}(t)=r_x(t)\vec{i}+r_y(t)\vec{j}+r_z(t)\vec{k}$. Проекции скорости суть: $v_x=\dot{r}_x(t)$, $v_y=\dot{r}_y(t)$, $v_z=\dot{r}_z(t)$.

Величина скорости находится по формуле $v=\sqrt{v_x^{\,2}+v_y^{\,2}+v_z^{\,2}}$.

Чтобы найти траекторию движения, надо исключить параметр t из параметрических уравнений траектории

$$\begin{cases} x=r_x(t), \\ y=r_y(t), \\ z=r_z(t). \end{cases}$$

6.1. **Найти** годограф вектор-функции $\vec{r}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}+\vec{k}$, $\quad t\in R$.

Решение. Запишем параметрические уравнения годографа $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$. Исключая параметр t, будем иметь $x^2+y^2=1$; $z=1$. Следовательно, годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$ является окружность.

6.2. Определить годограф вектор-функции $\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{b}t$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы, перпендикулярные друг другу.

Решение. Совмещая направление вектора $\vec{a}$ с осью x, а вектора $\vec{b}$ с осью y, будем иметь $x = t^2$, $y = t$. Исключая параметр t, получим $x = y^2$.

Таким образом, годографом вектор-функции $\vec{r}$ является парабола.

6.3. Найти производную вектор-функции $\vec{r} = \sin^2 t\vec{i} + \sin t\cos t\vec{j} + \cos t\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. По формуле (1) будем иметь

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\sin t\cos t\vec{i} + (\cos^2 t - \sin^2 t)\vec{j} - \cos t\vec{k} =$$
$$= \sin^2 t\vec{i} + \cos^2 t\vec{j} - \cos t\vec{k}\,.$$

6.4. Найти производные вектор-функций: а) $\vec{r} = \cos t\vec{i} + e^t\vec{j} + (t^2+1)\vec{k}$ в точке $M(1;1;1)$; б) $\vec{r} = t^4\vec{i} + (t^2+1)\vec{j} + \sqrt{t^3 - 4}\vec{k}$ при $t = 2$.

Решение. а) Подставляя координаты точки M в параметрические уравнения годографа $x = \cos t$, $y = e^t$, $z = t^3 + 1$, находим, что в точке M параметр $t_0 = 0$. Производная вектор-функции $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\vec{i} + e^t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ в точке M равна $\frac{d\vec{r}(0)}{dt} = \vec{j}$.

б) Находим производную $\frac{d\vec{r}}{dt} = 4t^3\vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3-4}}\vec{k}$, отсюда $\frac{d\vec{r}(2)}{dt} = 32\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

6.5. Показать, что векторы $\vec{r} = \vec{i} + \sin t\vec{j} + \cos t\vec{k}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt}$ перпендикулярны.

Решение. Находим вектор $\frac{d\vec{r}}{dt} = \cos t\vec{j} - \sin t\vec{k}$. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения. Из выражения $1 \cdot 0 + \sin t\cos t - \cos t\sin t = 0$ следует перпендикулярность данных векторов.

6.6. Даны две вектор-функции: $\vec{a}=\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k}$ и $\vec{b}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$. Найти: а) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})$: б) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})$.

Решение. а) По формуле (5) пункта 2° имеем, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=(t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k})(\vec{j}+2t\vec{k})+(\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k})(\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k})=$$

$$=t^2+2t^4+1+2t^2+3t^4=1+3t^2+5t^4.$$

б) По формуле (6) пункта 2° имеем, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{j}+2t\vec{k})\times(t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k})+(\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k})\times(\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k})=$$

$$=t^3\vec{i}+2t^2\vec{j}-t\vec{k}-2t^3\vec{i}+3t^3\vec{i}+2t\vec{k}+t^2\vec{j}-t\vec{k}-2t^3\vec{i}-3t^2\vec{j}=0.$$

6.7. Найти $\frac{d\vec{a}}{dt}$, если $\vec{a}=u^3\vec{i}+u^2\vec{j}+u\vec{k}$, где u=const.

Решение. По формуле (7) пункта 2° имеем:

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=3u^2(-\sin t)\vec{i}+2u(-\sin t)\vec{j}-\sin t\vec{k}=\sin t(3u^2\vec{i}+2u\vec{j}+\vec{k}).$$

6.8. Найти вторые производные вектор-функций: а) $\vec{r}(t)=\cos 3t\vec{i}+\sin t\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}$; б) $\vec{r}(t)=(t^4-3)\vec{i}+(t^3+4)\vec{j}+\ln t\vec{k}$; $t_0=1$.

Решение. а) Находим первую производную $\frac{d\vec{r}}{dt}=-3\sin 3t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Вторая производная равна производной от первой производной $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-9\cos 3t\vec{i}-\sin t\vec{j}$.

б) Находим сначала первую, а затем вторую производную $\frac{d\vec{r}}{dt}=4t^3\vec{i}+3t^2\vec{j}+\frac{1}{t}\vec{k}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=12t^2\vec{i}+6t\vec{j}-\frac{1}{t^2}\vec{k}$. При $t_0=1$ производная равна $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=12\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$.

6.9. Дано уравнение движения $\vec{r}(t) = 3\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$. **Определить** траекторию движения, скорость и ускорение движения. **Найти** величины скорости и ускорения движения и их направления для моментов $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Траектория точки определяется параметрическими уравнениями $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2t$ и представляет винтовую линию.

Скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{w}$ движения найдём как первую и вторую производные $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -3\cos t\vec{i} - 3\sin t\vec{j}$. Величина скорости $v = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, ускорения $w = \sqrt{(-3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = 3$ при любом t. При $t = 0$ скорость равна $\vec{v}_1 = 3\vec{j} + 2\vec{k}$, ускорение $\vec{w}_1 = -3\vec{i}$; при $t = \frac{\pi}{2}$ скорость $\vec{v}_2 = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, ускорение $\vec{w}_2 = -3\vec{j}$.

Траектория точки и найденные векторы её скорости и ускорения в моменты $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$ показаны на рис. 9.20.

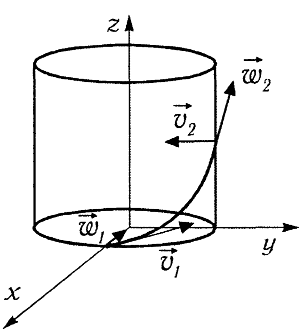


Рис. 9.20.

6.10. Дано уравнение движения $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$. Определить ускорение $\vec{w}$ движения и его тангенциальную w_τ и нормальную w_n составляющие в любой момент t и при $t = 0$.

Решение. Находим вектор скорости и ускорения $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + t\vec{k}$; $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + \vec{k}$.

Величина скорости определяется модулем вектора скорости $v = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$. Тангециальня составляющая ускорения определяется по формуле $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ и равна $w_\tau = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, а нормальная по формуле $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$, где $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$, и равна $w_n = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1 - \frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2+t^2}{1+t^2}}$.

Отсюда, при $t = 0$ получим $w_\tau = 0$, $w_n = \sqrt{2}$.

6.11. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то уравнение движения снаряда, выпущенного под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0, имеет вид $\vec{r}(t) = (v_0 t\cos\alpha)\vec{i} + \left(v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}$. **Определить** скорость и траекторию движения.

Решение. Находим вектор скорости $v = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_0\cos\alpha\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j}$. Величина скорости равна $|\vec{v}| = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0{}^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}$.

Параметрическое уравнение траектории будет

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая отсюда время t, находим уравнение траектории движения $y = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ — т. е. движение снаряда происходит по параболической траектории.

6.12. Найти дифференциал дуги кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = a\ln\cos t$.

Решение. Находим производные $\dot{x} = -a\sin t$, $\dot{y} = a\cos t$, $\dot{z} = -a\dfrac{\sin t}{\cos t}$. Отсюда по формуле (3) дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + \left(-a\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}\,dt = \frac{adt}{\cos t}.$$

9.7. Естественный трёхгранник пространственной кривой. Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой

1°. Естественный трёхгранник, составленный из трёх взаимно перпендикулярных плоскостей, можно построить в любой неособой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространственной кривой. Пусть пространственная кривая задана вектор-функцией скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тогда естественный трёхгранник (рис. 9.21) состоит из:

а) соприкасающейся плоскости $M_0M_1M_2$ — содержащей векторы $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; б) нормальной плоскости $M_0M_2M_3$ — перпендикулярной к вектору $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$; в) спрямляющей плоскости $M_0M_1M_3$ — перпендикулярной первым двум плоскостям.

При пересечении этих плоскостей образуются три прямые:

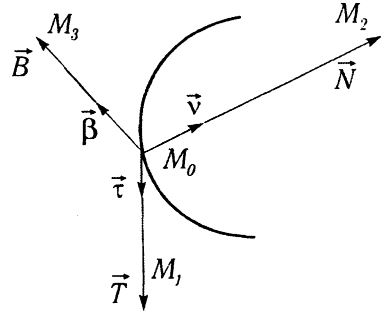


Рис. 9.21.

а) M_0M_1 — касательная, направляющий вектор касательной $\vec{T}=\dfrac{\vec{r}}{dt}$;

б) M_0M_3 — бинормаль, направляющий вектор бинормали $\vec{B}=\left[\dfrac{d\vec{r}}{dt},\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$;

в) M_0M_2 — главная нормаль, вектор главной нормали $\vec{N}=[\vec{B},\vec{T}]$. Соответствующие им единичные векторы: $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$, $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$, $\vec{\nu}=\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ вычисляются по формулам

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds},\quad \vec{\nu}=\frac{\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right|},\quad \vec{\beta}=[\vec{\tau},\vec{\nu}], \tag{1}$$

где s — длина дуги кривой.

2°. Уравнение касательной к пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}} \tag{2}$$

или

$$\frac{x-x_0}{T_x}=\frac{y-y_0}{T_y}=\frac{z-z_0}{T_z}, \tag{3}$$

где x, y, z — текущие координаты точки касательной; координаты x_0, y_0, z_0 соответствуют значению параметра t_0; $T_x=\dfrac{dx}{dt}$, $T_y=\dfrac{dy}{dt}$, $T_z=\dfrac{dz}{dt}$.

Уравнение нормальной плоскости в точке M_0 вытекает из условия перпендикулярности прямой и плоскости

$$(x-x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}+(y-y_0)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}+(z-z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=0 \tag{4}$$

или

$$(x-x_0)T_x+(y-y_0)T_y+(z-z_0)T_z=0. \tag{5}$$

Аналогично определяются: уравнение главной нормали

$$\frac{x-x_0}{N_x}=\frac{y-y_0}{N_y}=\frac{z-z_0}{N_z}, \tag{6}$$

уравнение спрямляющей (касательной) плоскости

$$(x-x_0)N_x+(y-y_0)N_y+(z-z_0)N_z=0, \tag{7}$$

уравнение бинормали

$$\frac{x-x_0}{B_x}=\frac{y-y_0}{B_y}=\frac{z-z_0}{B_z}, \tag{8}$$

уравнение соприкасающейся плоскости

$$(x-x_0)B_x+(y-y_0)B_y+(z-z_0)B_z=0. \tag{9}$$

3°. Если пространственная кривая задана линией пересечения двух поверхностей $F(x,y,z)=0$ и $G(x,y,z)=0$, то вместо векторов $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ можно брать векторы $d\vec{r}\{dx,dy,dz\}$ и

$d^2\vec{r}\left\{d^2x, d^2y, d^2z\right\}$. В данном случае одну из переменных x,y,z можно считать независимой и её второй дифференциал приравнивать нулю.

7.1. Дана кривая $x=t,\ \ y=t^2,\ \ z=t^3$. В точке $M_0(2,4,8)$ **найти:** а) основные единичные векторы $\vec{\tau},\ \vec{\nu},\ \vec{\beta}$; б) уравнения касательной, главной нормали и бинормали; в) уравнения касательной, нормальной и соприкасающейся плоскости.

Решение. а) Составим уравнение вектор-функции $\vec{r}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ и найдём производные

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k},\quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=2\vec{j}+6t\vec{k}.$$

Поскольку в точке M_0 параметр $t_0=2$, то вектор касательной будет

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k},$$

вектор бинормали

$$\vec{B}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & 12\\ 0 & 2 & 12\end{vmatrix}=24\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k},$$

вектор нормали

$$\vec{N}=[\vec{B},\vec{T}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 24 & -12 & 2\\ 1 & 4 & 12\end{vmatrix}=-152\vec{i}-286\vec{j}+108\vec{k}.$$

Таким образом, основные единичные векторы будут

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}}{\sqrt{161}},\qquad \vec{\beta}=\frac{24\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{724}}=\frac{12\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{181}},$$

$$\vec{v} = \frac{-152\vec{i} - 286\vec{j} + 108\vec{k}}{\sqrt{116564}} = \frac{-76\vec{i} - 143\vec{j} + 54\vec{k}}{\sqrt{29141}}.$$

б) Поскольку в точке M_0 координаты $x_0 = 2,\ y_0 = 4,\ z_0 = 8$ и производные при $t_0 = 2$ равны $\frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = 4,\ \frac{dz}{dt} = 12$, то уравнение касательной (2) будет

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}.$$

Уравнение главной нормали (6)

$$\frac{x-2}{-152} = \frac{y-4}{-286} = \frac{z-8}{108} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-76} = \frac{y-4}{143} = \frac{z-8}{54}.$$

Уравнение бинормали (8)

$$\frac{x-2}{24} = \frac{y-4}{-12} = \frac{z-8}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{12} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-8}{1}.$$

в) Уравнение касательной плоскости (7)

$$-152(x-2) - 286(y-4) + 108(z-8) = 0 \quad \text{или} \quad 76x + 143y - 54z = 292.$$

Уравнение нормальной плоскости (5)

$$(x-2) + 4(y-4) + 12(z-8) = 0 \quad \text{или} \quad x + 4y + 12z = 114.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости (9)

$$24(x-2) - 12(y-4) + 2(z-8) = 0 \quad \text{или} \quad 12x - 6y + z = 8.$$

7.2. Найти основные единичные векторы $\vec{\tau},\ \vec{v},\ \vec{\beta}$ кривой $y = x^2,\quad z = 2x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Пространственная кривая задана пересечением параболического цилиндра $y = x^2$ и плоскости $z = 2x$. Дифференцируя эти уравнения, считая x независимой переменной, получим $dy = 2xdx$ и $dz = 2dx,\ d^2y = 2dx^2$ и $d^2z = 0$.

Отсюда при $x_0 = 2$ получим $d\vec{r}\{dx, 4dx, 2dx\}$ и $d^2\vec{r}\{0, 2dx^2, 0\}$ или $d\vec{r}\{1,4,2\}$ и $d^2\vec{r}\{0,1,0\}$.

Таким образом, единичные векторы равны:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{21}},$$

$$\vec{B} = [d\vec{r}, d^2\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{5}},$$

$$\vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}, \qquad \vec{v} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-4\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{105}},$$

7.3. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии: а) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t_0 = 1$; б) $\vec{r}(t) = \sin^2 t\vec{i} + \sin t \cos t\vec{j} + \cos^2 t\vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$, $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Решение. а) Находим производные: $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$, $\dot{z} = 3t^2$ и вычисляем их значения при $t_0 = 1$: $\dot{x}(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 2$, $\dot{z}(1) = 3$.

Определяем координаты точки касания $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Отсюда, уравнения касательной прямой (2) и плоскости (4) примут вид: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$, $(x-1) + (y-1)2 + (z-1)3 = 0$ или $x + y + z - 6 = 0$.

б) Параметрические уравнения линии имеют вид $x = \sin^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $z = \cos^2 t$. Подставляя $t_0 = \frac{\pi}{4}$ в эти уравнения, определяем координаты точки касания M_0: $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{1}{2}$.

Находим производные: $\dot{x} = 2\sin t \cos t = \sin 2t$, $\dot{y} = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, $\dot{z} = -2\cos t \sin t = -\sin 2t$ и вычисляем их значения в точке касания: $\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\dot{z}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Подставляя координаты точки касания и значения производных в этой точке в уравнение касательной прямой (2), получим:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}.$$

Поскольку в уравнении прямой (3) $T_y=0$, то касательная лежит в плоскости, перпендикулярной оси y.

Уравнение нормальной плоскости (5), в нашем случае, примет вид $\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$ или $x+z-1=0$.

в) Если линия определена пересечением двух поверхностей: $\varphi(x,y,z)=0$ и $\psi(x,y,z)=0$, то, полагая, например, $x=x(t)$ и исключая попеременно другие переменные, находим $y=y(t)$, $z=z(t)$ (вообще говоря, бесчисленное множество различных параметрических уравнений).

Пусть $x=t$, тогда из решения системы:

$$\begin{cases} 2t^2+3y^2+z^2=9, \\ 3t^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$$

находим: $y=-\frac{1}{2}\sqrt{9-5t^2}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{7t^2+9}$. Знак минус переменной y ставит в соответствие координаты точки M_0 и параметр t, равный для этой точкм единице.

Находим производные: $\dot{x}=1$, $\dot{y}=\frac{5}{2}\frac{t}{\sqrt{9-5t^2}}$, $\dot{z}=\frac{7}{2}\frac{t}{\sqrt{7t^2+9}}$ и их значения в точке M_0: $\dot{x}(1)=1$, $\dot{y}(1)=\frac{5}{4}$,

$\dot{z}(1)=\dfrac{7}{8}$. Таким образом, уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке M_0 имеют вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\frac{5}{4}}=\frac{z-2}{\frac{7}{8}},\quad (x-1)+\frac{5}{4}(y+1)+\frac{7}{8}(z-2)=0$$

или

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{8},\qquad 8x+10y+7z-12=0.$$

7.4. Написать уравнения касательной прямой к винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в любой точке и при $t=\pi$. Показать, что винтовая линия пересекает образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$ под одинаковым углом.

Решение. Находим производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\dot{y}=a\cos t$, $\dot{z}=b$. Отсюда уравнение касательной прямой в любой точке $\dfrac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{y-a\sin t}{a\cos t}=\dfrac{z-bt}{b}$, а при $t=\pi$ $\dfrac{x+a}{0}=\dfrac{y}{-a}=\dfrac{z-b\pi}{b}$, т. е. при $t=\pi$ касательная лежит в плоскости, перпендикулярной оси x и отстоящей от начала координат на расстоянии $x=-a$.

Образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$ параллельны оси Oz. Находим направляющий косинус угла, образованного касательной с осью Oz:

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{z}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку касательные к винтовой линии образуют с осью Oz один и тот же угол, то они отсекают и образующие под этим же углом.

7.5. Найти уравнение соприкасающейся плоскости к кривой: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2-y^2=3$ в точке $M_0(2,1,2)$.

Решение. Пространственная кривая задана пересечением двух поверхностей. Дифференцируя уравнения поверхностей, считая x независимой переменной, будем иметь

$$xdx + ydy + zdz = 0, \qquad xdx - ydy = 0$$

и

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0, \quad dx^2 - dy^2 - yd^2y = 0.$$

Отсюда, полагая $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$, получим $dy = 2dx$, $dz = -2dx$, $d^2y = -3dx^2$, $d^2z = -3dx^2$.

Таким образом, соприкасающаяся плоскость определяется векторами $\{dx,\ 2dx, -2dx\}$ и $\{0, -3dx^2, -3dx^2\}$ или $\{1, 2, -2\}$ и $\{0, -3, 3\}$.

Следовательно, нормальный вектор соприкасающейся плоскости будет

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Отсюда уравнение соприкасающейся плоскости $-12(x-2) + 3(y-1) - 3(z-2) = 0$ или $4x - y + z - 9 = 0$.

9.8. Кривизна и кручение пространственной кривой

1°. Кривизна пространственной кривой в точке M определяется аналогично кривизне плоской кривой. Если кривая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s — длина дуги, то

$$k = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|, \tag{1}$$

где R — радиус кривизны.

Если кривая задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кривизна определяется выражением

$$k=\frac{1}{R}=\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}. \tag{2}$$

2°. Под кручением или второй кривизной кривой в точке M понимается число

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s}, \tag{3}$$

где θ — угол поворота бинормали на участке кривой Δs, ρ — радиус кручения или радиус второй кривизны. Если кривая задана уравнением $\vec{r}=\vec{r}(s)$, то

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\pm\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=\frac{\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}. \tag{4}$$

Знак минус соответствует тому случаю, когда векторы $\vec{v}$ и $\frac{\vec{\beta}}{ds}$ имеют одинаковое направление; знак плюс — в противоположном случае.

Если кривая задана уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, т. е. параметрически, то

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}. \tag{5}$$

3°. Формулы Френе.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{v}}{R},\qquad \frac{d\vec{v}}{ds}=-\frac{\vec{\tau}}{R}+\frac{\vec{\beta}}{\rho},\qquad \frac{d\vec{\beta}}{s}=-\frac{\vec{v}}{\rho}.$$

8.1. Вычислить кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(a > 0)$ в любой точке.

Решение. Уравнение винтовой линии представим вектор-функцией $\vec{r} = \vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t + \vec{k}bt$.

Кривизну и кручение определяем по формулам (2) и (5). Для этого сначала найдём производные

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}a\sin t + \vec{j}a\cos t + \vec{k}b,$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{i}a\cos t - \vec{j}a\sin t,$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \vec{i}a\sin t - \vec{j}a\cos t.$$

Тогда

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}ab\sin t - \vec{j}ab\cos t + \vec{k}a^2.$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Окончательно получим

$$k = \frac{\left(a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\sigma = \frac{a^2 b}{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Отсюда следует, что для винтовой линии кривизна и кручение постоянны.

8.2. Найти радиус кривизны линии: $x^2-y^2+z^2=1$, $y^2-2x+z=0$ в точке $(1,1,1)$.

Решение. Пространственная кривая задана пересечением двух поверхностей. Дифференцируем уравнения поверхностей, считая x независимой переменной

$$xdx-ydy+zdz=0,\quad 2ydy-2dx+dz=0$$

и

$$dx^2-dy^2-yd^2y+dz^2+zd^2z=0,\qquad 2dy^2+2yd^2y+d^2z=0.$$

Полагая $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$, получим

$$dy=dx,\ \ dz=0,\quad d^2y=-\frac{2}{3}dx^2,\quad d^2z=-\frac{2}{3}dx^2.$$

Отсюда $d\vec{r}\{dx;dx;0\}$ и $d^2\vec{r}\left\{0;-\frac{2}{3}dx^2;-\frac{2}{3}dx^2\right\}$ или $d\vec{r}\{1;1;0\}$ и $d^2\vec{r}\{0;-1;-1\}$.

Воспользуемся формулой (2). Находим векторное произведение

$$\left[d\vec{r},d^2\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

Таким образом,

$$R=\frac{\left|d\vec{r}\right|^3}{\left|\left[d\vec{r},d^2\vec{r}\right]\right|}=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

8.3. Найти кривизну и кручение линии: $x^2=2ay$, $\quad x^3=6a^2z$ в произвольной точке $M(x,y,z)$.

Решение. Дифференцируем уравнения обеих поверхностей, считая x независимой переменной

$$xdx=ady,\ \ dy=\frac{x}{a}dx,\quad x^2dx=2a^2dz,\ \ dz=\frac{x^2}{2a^2}dx$$

и

$$d^2y = \frac{dx^2}{a},\ \ d^3y = 0, \quad d^2z = \frac{x}{a^2}dx^2,\ \ d^3z = \frac{dx^3}{a^2}.$$

Отсюда

$$d\vec{r}\left\{dx, \frac{x}{a}dx, \frac{x^2}{2a^2}dx\right\},\ d^2\vec{r}\left\{0, \frac{dx^2}{a}, \frac{x}{a^2}dx^2\right\},\ d^3\vec{r}\left\{0, 0, \frac{dx^3}{a^2}\right\}$$

Кривизна и кручение определяются по формулам (2),(4), соответственно. Для этого находим

$$\left[d\vec{r}, d^2\vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{2a^2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{a} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2a^2}\vec{i} - \frac{x}{a}\vec{j} + \vec{k},$$

$$d\vec{r}d^2\vec{r}d^3\vec{r} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{2a^2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, кривизна кривой в точке M равна

$$k = \frac{\left(\frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^2}{a^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{a}{a+y}\right)^2;$$

кручение

$$\sigma = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}} = \left(\frac{a}{a+y}\right)^2.$$

Глава 10
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов и простейшие примеры

1°. Пусть дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множесво различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то есть, если $F(x)$ есть первообразная от фукнции $f(x)$, то $F(x)+C$ есть также первообразная от $f(x)$, ибо $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$. Здесь C — произвольная постоянная.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

если $F'(x)=f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*; C — *постоянной интегрирования*.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Отсюда видно, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию. Правильность интегрирования всегда можно проверить, выполнив обратное действие, т. е. найдя производную функции, получившейся в результате интегрирования.

Производная должна быть равна подынтегральной функции.

2°. Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть, если $F'(x)=f(x)$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала или производной некоторой функции равен этой функции плюс постоянная интегрирования

$$\int dF(x) = F(x)+C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x)+C.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов

$$\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть, если a — $const$, то

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$$

3°. Таблица основных интегралов. Таблица интегралов вытекает непосредственно из определения неопределенного интеграла и таблицы производных:

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C; \qquad \alpha\neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C;$
3. $\int \sin x dx=-\cos x+C;$
4. $\int \cos x dx=\sin x+C;$
5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C;$
6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C;$
7. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C;$
8. $\int e^x dx=e^x+C;$
9. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C;$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C;$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$

15 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Так как неопределенный интеграл не зависит от выбора переменной интегрирования, то все табличные интегралы имеют место для любой переменной.

Процесс нахождения первообразной сводится к преобразованию подынтегральной функции к табличному виду.

Простейшие интегралы могут быть найдены путем разложения подынтегральной функции на слагаемые. В состав каждого интеграла входит постоянная интегрирования, но все они могут быть объединены в одну, поэтому обычно при интегрировании алгебраической суммы функций пишут только одну постоянную нитегрирования.

4°. Существуют целые классы интегралов, которые в зависимости от постоянных сомножителей или показателей степеней могут быть найдены по обобщенным формулам интегрирования. Приведем некоторые из них.

1. $\int P(x)\sin ax dx = \sin ax\left(\frac{P'}{a} - \frac{P'''}{a^4} + \ldots\right) - \cos ax\left(\frac{P}{a} - \frac{P''}{a^3} + \ldots\right) + C,$

где $P(x)$ — целый относительно x многочлен.

2. $\int P(x)\cos ax dx = \sin ax\left(\frac{P}{a} - \frac{P''}{a^3} + \ldots\right) + \cos ax\left(\frac{P'}{a^2} - \frac{P'''}{a^4} + \ldots\right) + C;$

3. $\int P(x)e^{ax} dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \right) + C;$

4. $\int x^m \ln^n x dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx$

где n — любое вещественное число $n \neq -1;\ m = 1, 2, 3, \ldots$

5. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C;$

6. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C;$

7. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right) + C;$

8. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right) + C;$

9. Если обозначить $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,то

$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} I_n;$

10. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx;$

11. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx;$

12. $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C, \quad (n = 1, 2, \ldots);$

13. $\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = x + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{2k} + C \quad (n = 1, 2, \ldots);$

14. $$\int\frac{dx}{\cos^{2k+1}x}=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k}x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)\int\frac{dx}{\cos^{2k-1}x};$$

15. $$\int\frac{dx}{\sin^{2k+1}x}=-\frac{1}{2k}\frac{\cos x}{\sin^{2k}x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)\int\frac{dx}{\sin^{2k-1}x};$$

16. $$\int x^n e^{-x}dx=-x^n e^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}dx;$$

17. $$\int\frac{ax+b}{cx+d}dx=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d|+C;$$

18. $$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

1.1. Найти интегралы: а) $\int(x^3+2x+\frac{1}{x})dx$; б) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; в) $\int\mathrm{ctg}^2 x dx$; г) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$; д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. а) Представим интеграл как сумму интегралов и воспользуемся табличными интегралами

$$\int x^3dx+\int 2xdx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C=\frac{1}{4}x^4+x^2+\ln|x|+C;$$

Проверка: $\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+\ln|x|+C\right)'=x^3+2x+\frac{1}{x}$, т. е. производная равна подынтегральной функции.

б) Внесем первый множитель в скобки и представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int e^x dx-\int\frac{dx}{x^3}=e^x-\int x^{-3}dx=e^x-\frac{x^{-2}}{-2}+C=e^x+\frac{1}{2x^2}+C.$$

в) Сделаем следующие преобразования

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

г) Вычтем и прибавим в числителе единицу

$$\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\left(\frac{x^4-1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\int(x^2-1)dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$$

д) Заменим корни отрицательными степенями и представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int x^{-\frac{1}{3}}dx-\int x^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[4]{x}+C.$$

е) Считаем, что в числителе множителем стоит тригонометрическая единица $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, тогда

$$\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

1.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{x^2-9}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int 2^x e^x dx$; д) $\int\frac{dx}{x^2+2}$.

Решение. а) Представим 9 как 3^2 и воспользуемся табличным интегралом (11), где $a = 3$

$$\int\frac{dx}{x^2-3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$$

б) Приведем подынтегральную функцию к виду $\frac{1}{\sqrt{5^2-x^2}}$ и воспользуемся табличным интегралом (10)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{5}+C.$$

в) Воспользуемся табличным интегралом (12)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

г) Объединим множители в подынтегральной функции и воспользуемся табличным интегралом (7)

$$\int (2e)^x\,dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C.$$

д) Преобразуем следующим образом

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

10.2. Непосредственное интегрирование

В простейших случаях, применяя следующие преобразования дифференциала

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b);\quad nx^{n-1}dx = dx^n;\quad \cos x dx = d(\sin x);$$

$$\sin x dx = -d(\cos x);\quad \frac{dx}{x} = d(\ln x);\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);\quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);\quad e^x dx = d(e^x),$$

их возможные комбинации и обозначая мысленно выражение в скобках за новую переменную t, интегралы сводятся к табличным.

2.1. Найти интегралы: а) $\int e^{-2x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

в) $\int (2-3x)^5 dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-5x}} dx$; д) $\int \frac{dx}{1-6x}$; е) $\int \frac{e^{2x}}{3-2e^{2x}} dx$.

Решение. а) Вносим (–2) под знак дифференциала и делим на (–2), тогда интеграл равен

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

б) Приводим к одному аргументу $4x$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + C.$$

в) Запишем под знаком дифференциала такое же выражение,что и в скобках

$$\int (2-3x)^5 dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^5 d(2-3x) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^6}{6} + C = -\frac{1}{18}(2-3x)^6 + C.$$

г) Преобразуем интеграл следующим образом

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{6-5x}} = \int (6-5x)^{-\frac{1}{3}} dx = -\frac{1}{5}\int (6-5x)^{-\frac{1}{3}} d(6-5x) = -\frac{3}{10}(6-5x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

д) Запишем под знаком дифференциала выражение такое же, что и в знаменателе, тогда

$$\int \frac{dx}{1-6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(1-6x)}{1-6x} = -\frac{1}{6}\ln|1-6x| + C.$$

е) Преобразуем интеграл следующим образом

$$\int \frac{e^{2x} dx}{3-2e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{3-2e^{2x}} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(-2e^{2x})}{3-2e^{2x}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d(3-2e^{2x})}{3-2e^{2x}} = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2e^{2x}\right| + C.$$

2.2. Найти интегралы: а) $\int \frac{\cos x}{1+4\sin x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int x^2 e^{x^3} dx$; д) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; е) $\int \frac{x^2 dx}{9+x^6}$.

Решение. а) Вносим косинус под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int \frac{\cos x}{1+4\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{1+4\sin x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4\sin x)}{1+4\sin x} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4\sin x)}{1+4\sin x} = \frac{1}{4}\ln|1+4\sin x| + C.$$

б) Выполнив преобразование дифференциала, получим

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{d\ln x}{1+\ln x} = \int \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln|1+\ln x| + C.$$

в) Вносим $\sqrt{x}$ под знак дифференциала

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

г) Преобразовав дифференциал, получим

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

д) Вносим синус под знак дифференциала и преобразуем

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^5 x} = -\int \cos^{-5} x d\cos x = \frac{1}{4}\cos^4 x + C.$$

е) Вносим x^2 под знак дифференциала и преобразуем к табличному виду

$$\int \frac{x^2 dx}{9+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{3^2+(x^3)^2} = \frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3} + C.$$

2.3. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$

в) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$; г) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; д) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2xdx$;

е) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; ж) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$; з) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

Решение. а) Преобразуем дифференциал и приведем интеграл к табличному виду

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^3} =$$

$$= \int (\arcsin x)^{-3} d\arcsin x = -\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C.$$

б) Вносим x под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+(x^2)^2}\right| + C.$$

в) Выполнив преобразования, получим

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| + C.$$

г) Вносим $\sin 2x$ под знак дифференциала и преобразуем

$$\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\int \frac{d\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\int (1+\cos^2 x)^{-1/2} d(1+\cos^2 x) =$$

$$= -2(1+\cos^2 x)^{1/2} + C.$$

д) Вносим под знак дифференциала $\sin 2x$ следующим образом

$$\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx=\int e^{\sin^2 x} d\sin^2 x=e^{\sin^2 x}+C.$$

е) Вносим x^3 под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\sqrt{1-(x^4)^2}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C.$$

ж) Преобразуем подынтегральную функцию

$$\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln|\cos x+\sin x|+C.$$

з) Преобразуем дифференциал следующим образом

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}=$$

$$=2\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}d\operatorname{arctg}\sqrt{x}=(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+C.$$

10.3. Интегрирование методом замены переменной

1°. Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразню для $f(x)$ мы не можем. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывная функция, имеющая обратную производную $x=\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$.

В этом случае имеет место следующее равенство

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования t будет найден, то преобразовав результат к переменной x, получим искомое выражение.

Общего правила выбора требуемой подстановки нет, поэтому некоторые частные правила рассмотрим на примерах.

2°. Тригонометрические подстановки.

1. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то обычно полагают $x=a\sin t \vee x=a\cos t$; отсюда $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \vee a\sin t$.

2. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагают $x=\dfrac{a}{\cos t}$; отсюда $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$.

3. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то полагают $x=a\operatorname{tg} t$; отсюда $\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos x}$.

3°. Некоторые другие подстановки:

1. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, где R — некоторая рациональная функция, приводятся к рациональному алгебраическому виду подстановкой $e^x=t,\quad x=\ln t,\quad dx=\dfrac{dt}{t}$.

2. Интегралы вида $\int R(\ln x)\dfrac{dx}{x}$, где R — некоторая рациональная функция, приводятся к рациональному алгебраическому виду подстановкой $\ln x=t,\quad \dfrac{dx}{x}=dt$.

3. Интегралы вида $\int\dfrac{dx}{x^m\sqrt{(ax^2+b)^n}}$, приводятся к рациональному виду подстановкой $x=\dfrac{1}{t},\quad dx=-\dfrac{dt}{t^2}$.

3.1. Найти интегралы: а) $\int x(2x+3)^9\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$;

в) $\int \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$; г) $\int \sin\sqrt{x+1}\,\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}$; д) $\int \dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{x\ln x}\,dx$; е) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменной $2x+3=t$, $x=\dfrac{t-3}{2}$, $dx=\dfrac{1}{2}dt$, тогда будем иметь

$$I=\int x(2x+3)^9\,dx=\frac{1}{4}\int(t-3)t^9\,dt=\frac{1}{4}\int(t^{10}-3t^9)\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{11}}{11}-\frac{3}{10}t^{10}\right)+C=\frac{1}{4}t^{10}\left(\frac{t}{11}-\frac{3}{10}\right)+C.$$

Переходя к переменной x, получим

$$I=\frac{1}{4}(2x+3)^{10}\left(\frac{2x+3}{11}-\frac{3}{10}\right)+C=\frac{1}{44}(2x+3)^{10}(2x-27/10)+C.$$

б) Сделаем замену переменной $\dfrac{1}{x}=t$, $x=\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{dt}{t^2\,\dfrac{1}{t}\,\dfrac{\sqrt{1-2t^2}}{t}}=--\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d(\sqrt{2}t)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}t)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos(\sqrt{2}t)+C.$$

Переходя к переменной x, будем иметь

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C.$$

в) Преобразуем подынтегральную функцию

$$I=\int\frac{\ln \operatorname{tg}x}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln \operatorname{tg}x}{\sin x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln \operatorname{tg}x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}dx$$

и сделаем замену $\operatorname{tg}x=t$, $\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt$, тогда получим $I=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln t}{t}dt$.

Сделаем еще одну замену $\ln t=z$, $\dfrac{dt}{t}=dz$, тогда будем иметь $I=\dfrac{1}{2}\int zdz=\dfrac{1}{4}z^2+C$. Перейдем теперь к переменной x

$$I=\frac{1}{4}\ln^2 t+C=\frac{1}{4}\ln^2 \operatorname{tg}x+C.$$

г) Сделаем замену переменной $x+1=t^2$, $dx=2tdt$, тогда получим

$$I=\int\sin\sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2\int\sin t\frac{tdt}{t}=2\int\sin tdt=-\cos t+C.$$

Переходя к переменной x, будем иметь $I=-2\cos\sqrt{x+1}+C$.

д) Сделаем замену $\ln x=t$, $\dfrac{dx}{x}=dt$, тогда получим

$$I=\int\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{\sqrt{1-t}}{t}dt.$$

Чтобы избовиться от радикала сделаем еще одну замену переменной $1-t=z^2$, $t=1-z^2$, $dt=-2zdz$, тогда будем иметь

$$I=\int\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz=2\int\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=2\left(z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)+C.$$

Теперь перейдем к переменной x

$$I=2\left(\sqrt{1-t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right|\right)+C=$$

$$=2\sqrt{1-\ln x}+\ln\left|\frac{\ln\ x+2\sqrt{1-\ln\ x}-2}{\ln\ x}\right|+C.$$

е) Сделаем замену переменной $x=t^2$, $dx=2tdt$, тогда получим

$$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}dx=2\int\frac{t^2+1}{t+1}tdt=2\int\frac{t^3+t}{t+1}dt.$$

Деля числитель на знаменатель, выделим целую часть в подынтегральной функции

$$\frac{t^3+t}{t+1}=t^2-t+2-\frac{2}{t+1}.$$

Таким образом

$$I=2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2t-2\ln|t+1|\right)+C.$$

Переходя к переменной x, окончательно получим

$$I=2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x+1}\right|\right)+C.$$

3.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; в) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

Решение. а) Сделаем замену $x=\sin t$, тогда $dx=\cos tdt$ и $\sqrt{1-x^2}=\cos t$. Подставим эти выражения под знак интеграла, проинтегрируем и перейдем к старой переменной

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}dt=\int\sin^2 tdt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t})+C=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C.$$

б) Сделаем замену $x=\operatorname{tg} t$, тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ и $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\cos t}$. Переходим под знаком интеграла к новой переменной

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\cos t dt}{\operatorname{tg} t\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\ t}{1+\cos t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg} t}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$$

в) Сделаем замену $x=\dfrac{a}{\cos t}$, тогда $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ и $x^2-a^2=a\operatorname{tg} t$. Преобразуем интеграл к новой переменной

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int\frac{a\operatorname{tg} t\cos t\cdot a\sin\ t}{a\cos^2 t}dt=a\int\operatorname{tg}^2 t dt=a\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=a\left(\int\frac{dt}{\cos^2 t}-\int dt\right)=a(\operatorname{tg} t-t)+C=a\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos\ t}-t\right)+C=$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-\arccos\frac{a}{x}+C.$$

3.3. Найти интегралы: а) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+1}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2+2}}$; г) $\int \frac{dx}{(ax^2+b)^{3/2}}$; д) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$.

Решение. а) Делаем замену $e^x = t$, тогда $dx = \frac{dt}{t}$ и интеграл примет вид

$$\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^2-3t}{t^2+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{t-3}{t^2+1}dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} - 3\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 3\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 3\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 3\operatorname{arctg} e^x + C.$$

б) Делаем замену $e^{3x} = t$, тогда $dx = \frac{1}{3}\frac{dt}{t}$ и интеграл примет вид

$$\int \frac{e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{t}{(1+t)^2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int (1+t)^{-2}d(1+t) =$$

$$= -\frac{1}{3(1+t)} + C = -\frac{1}{3(1+e^{3x})} + C.$$

в) Воспользуемся подстановкой $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2+2}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{3+2t^2}} = \frac{1}{4}\int (3+2t^2)^{-1/2}d(3+2t^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3+2t^2} + C = -\frac{\sqrt{3x^2+2}}{2x} + C.$$

г) Используем подстановку $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда будем иметь

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)^{3/2}} = -\int \frac{tdt}{(a+bt^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2b}\int (a+bt^2)^{-3/2} d(a+bt^2) =$$

$$= \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{a+bt^2}} + C = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}} + C.$$

д) Заменяем $e^x = t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$, тогда

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 13} = \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 4} = \int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2 + 2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-3}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x - 3}{2} + C.$$

10.4. Интегрирование по частям

1°. Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (1)$$

Для применения формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение следует представить в виде произведения двух множителей u и dv. За u выбирается функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти v.

По этой формуле отыскание интеграла от udv сводится к отысканию интеграла от vdu, причем применять ее следует в тех случаях, если интеграл от vdu проще исходного интеграла

2°. Есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^n \ln x dx, \quad \int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \sin bx dx,$$

$$\int x^n \cos bx dx, \quad \int x^n \arcsin bx dx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} bx dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx, \quad \int e^{ax}\cos bxdx$$

и т. д., которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно и в некоторых случаях получают выражение, из которого определяется исходный интеграл. Так последние два интеграла могут быть найдены по формулам

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C;$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \qquad (2)$$

3°. Интегрируя по частям, можно вывести формулы "понижения степени" для интегралов

$$\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx,$$

$$\int \cos^n xdx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}xdx. \qquad (3)$$

4.1. Найти интегралы: а) $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$; б) $\int x\operatorname{arctg}xdx$; в) $\int \ln xdx$; г) $\int x^2\sin xdx$; д) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; е) $\int \arcsin xdx$.

Решение. а) Положим $x = u$ и $e^{\frac{x}{2}}dx = dv$, тогда $du = dx$ и $v = 2e^{\frac{x}{2}}$. Запишем по формуле интегрирования по частям интеграл в виде

$$\int xe^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}}(x-2) + C.$$

б) Положим $\operatorname{arctg}x = u$, $xdx = dv$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. По формуле (1) имеем:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} x - x - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

в) Положим $\ln x = u$, $dx = dv$, тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. По формуле (1) имеем

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x(\ln x - 1) + C.$$

г) Положим $x^2 = u$, $\sin x dx = dv$, тогда $du = 2x dx$, $v = -\cos x$. По формуле (1) имеем

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям, положив $x = u$ и $\cos x dx = dv$, тогда получим

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C.$$

д) Положим $x = u$, $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = dv$, тогда $du = dx$, $v = -\operatorname{ctg} x$. По формуле (1) имеем

$$\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

е) Полагаем $\arcsin x = u$, $dx = dv$, тогда $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$. По формуле (1) имеем

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{1-x^2} = x \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4.2. Найти интегралы: а) $\int\sqrt{x^2+k}dx$; б) $\int\cos(\ln x)dx$; в) $\int e^{2x}\cos 3xdx$.

Решение. а) Положим $\sqrt{x^2+k}=u$, $dx=dv$, тогда $du=\dfrac{xdx}{x^2+k}$, $v=x$. По формуле (1) имеем

$$\int\sqrt{x^2+k}dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}dx+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+x\sqrt{x^2+k}\right|-\int\sqrt{x^2+k}dx.$$

Перенося последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$2\int\sqrt{x^2+k}dx=x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|,$$

откуда

$$\int\sqrt{x^2+k}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right)+C.$$

б) Положим $\cos(\ln x)=u$, $dx=dv$, тогда $du=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$, $v=x$. По формуле (1) имеем

$$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx.$$

Положим теперь $\sin(\ln x)=u$, $dx=dv$ тогда $du=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx$, $v=x$. Применяя еще раз формулу (1), получим

$$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx.$$

Переносим последний интеграл в левую часть

$$2\int\cos(\ln x)dx = x(\cos\ln x+\sin\ln\ x)$$

откуда

$$\int\cos\ln xdx = \frac{x}{2}\left(\cos\ln x+\sin\ln x\right)+C.$$

в) Полагаем $\cos 3x = u$, $e^{2x}dx = dv$, тогда $du = -3\sin 3xdx$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$. По формуле (1) имеем

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx.$$

Полагаем теперь $\sin 3x = u$, $e^{2x}dx = dv$, тогда $du = 3\cos 3xdx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Применим еще раз формулу (1)

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

Переносим последний интеграл в левую часть

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right),$$

откуда

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{2}{13}e^{2x}\left(\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right)+C.$$

Этот же результат можно получить сразу, если воспользоваться формулами (2).

4.3. Найти интегралы: а) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$; в) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменной $x = t^2$, $dx = 2tdt$, тогда $\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int te^t dt$.

Теперь обозначим $t = u$, $e^t dt = dv$, тогда $du = dt$, $v = e^t$. По формуле (1) будем иметь

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + C.$$

Переходя к переменной x, окончательно получим

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

б) Делаем замену $\operatorname{arctg} x = t$, тогда $\dfrac{dx}{1+x^2} = dt$ и $x^2 = tg^2 t$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int t \operatorname{tg}^2 t dt.$$

Полагаем $t = u$, $\operatorname{tg}^2 t dt = dv$, тогда $du = dt$, $v = \operatorname{tg} t - t$. По формуле (1) имеем

$$\int t \operatorname{tg}^2 t dt = t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t) dt = t(\operatorname{tg} t - t) + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C.$$

Переходя к переменной x, получим

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x(x - \operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C.$$

в) Делаем замену $\arcsin\sqrt{x} = t$, тогда $\sqrt{x} = \sin t$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sin t dt$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = 2\int t \sin t dt.$$

Интегрируем по частям: $t = u$, $\sin t dt = dv$ и $du = dt$, $v = -\cos t$. Откуда

$$\int t\sin t\ dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t\ + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x} + \sqrt{x} + C.$$

4.4. Найти интегралы: а) $\int \cos^7 xdx$; б) $\int \sin^{10} xdx$.

Решение. а) Воспользуемся второй формулой (3)

$$\int \cos^7 xdx = \frac{1}{7}\sin x\cos^6 x + \frac{6}{7}\int \cos^5 xdx = \frac{1}{7}\sin x\cos^6 x +$$

$$+\frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\sin\ x\cos^6 x + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin\ x\cos^4 x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sin\ x\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin\ x\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{7}\sin\ x\left(\cos^6 x + \frac{6}{5}\left(\cos^4 x + \frac{4}{3}(\cos^2 x + 2)\right)\right) + C.$$

б) Воспользуемся несколько раз первой формулой (3)

$$\int \sin^{10} xdx = -\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x + \frac{9}{10}\int \sin^8 xdx = -\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x +$$

$$+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x + \frac{7}{8}\int \sin^6 xdx\right) = -\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x +$$

$$+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x + \frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x + \frac{5}{6}\int \sin^4 xdx\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x + \frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x + \frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x +\right.\right.$$

$$:+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}\int\sin^2 xdx\right)\Bigg)\Bigg)=$$

$$=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin 7x+\frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right)+C.$$

10.5. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

1°. Рассмотрим интеграл вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$

Путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и замены $ax^2+bx+c=t,\quad x+\frac{b}{2a}=z$ интеграл приводится к табличным (2,9,11) интегралам

$$\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{dz}{z^2\pm k^2},$$

где $k^2=\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$

С помощью аналогичных преобразований решаются интегралы вида

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\qquad\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx.$$

2°. Интегралы вида $\int\frac{Mx+N}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n=\frac{1}{t}$.

3°. Интегралы вида

$$\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

находятся методом выделения алгебраической части по формуле

$$\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= (A_0x^{m-1} + \ldots + A_{m-1})\sqrt{ax^2+bx+c} + A_m\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$$

где коэффициенты $A_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ находятся приравниванием коэффициентов правой и левой части при одинаковых степенях неизвестных x после дифференцирования равенства и освобождения его от знаменателя.

Аналогичным путем можно найти и интеграл

$$\int (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m)\sqrt{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= (A_0x^{m+1} + A_1x^m + \ldots + A_{m+1})\sqrt{ax^2+bx+c} + A_{m+2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Неопределенные коэффициенты определяются путем дифференцирования правой и левой части и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x.

4°. Интегралы вида $I = \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где корни трехчлена x^2+px+q мнимые, находятся подстановкой $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Интеграл в этом случае принимает вид

$\int \frac{\varphi_n(t)dt}{(At^2+Bt+C)^n\sqrt{A_1t^2+B_1t+C_1}}$, где $\varphi_n(t)$ — полином степени n.

Приравнивая коэффициенты B и B_1 нулю, получим уравнения $B = 2\alpha\beta + p(\alpha+\beta)+2q = 0$; $B_1 = 2a\alpha\beta + b(\alpha+\beta)+2c = 0$ для определения вещественных значений α и β.

При этом интеграл представляется суммой интегралов двух видов:

$$\int \frac{t^{2k+1}dt}{(At^2+C)^n\sqrt{A_1t^2+C_1}} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{t^{2k}dt}{(At^2+C)^n\sqrt{A_1t^2+C_1}}; \qquad (k = 0,1,2, \ldots),$$

которые интегрируются подстановками, соответственно,

$$A_1t^2 + C_1 = u^2 \quad \text{и} \quad A_1 + C_1t^{-2} = v^2.$$

Если $p = b = 0$, то интеграл представляется суммой двух интегралов

$$I = M\int \frac{xdx}{(x^2+q)^n\sqrt{ax^2+c}} + N\int \frac{dx}{(x^2+q)^n\sqrt{ax^2+c}},$$

которые находятся подстановками, соответственно, $ax^2+c = u^2$ и $a+cx^{-2} = v^2$.

5.1. Найти интегралы: а) $\int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x-7}$; б) $\int \frac{xdx}{3x^2+4x+5}$;

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}$; г) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx$; д) $\int \sqrt{x^2+2x-2}dx$; е) $\int \frac{2^x dx}{2^{2x}-4\cdot 2^x+2}$.

Решение. а) Выделим в знаменателе полный квадрат

$$\int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x+9-16} = \int \frac{(5x-3)dx}{(x-3)^2-16}$$

и сделаем замену $x-3=t,\quad dx=dt,\quad x=t+3,$ тогда получим

$$\int\frac{5t+12}{t^2-16}dt=\frac{5}{2}\int\frac{d(t^2-16)}{t^2-16}+12\int\frac{dt}{t^2-4^2}=\frac{5}{2}\ln\left|t^2-16\right|+\frac{12}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-6x-7\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C.$$

б) Выделим в знаменателе полный квадрат

$$\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{2\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{5}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}}$$

и сделаем замену $x+\dfrac{2}{3}=t,\quad dx=dt,\quad x=t-\dfrac{2}{3}$, тогда получим

$$\frac{1}{3}\int\frac{t-\frac{2}{3}}{t^2+\frac{11}{9}}dt=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{11}{9}}-\frac{2}{9}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|t^2+\frac{11}{9}\right|-\frac{2}{9}\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{11}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+\frac{4}{3}x+\frac{15}{9}\right|-\frac{2}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{\sqrt{11}}+C.$$

в) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{4}+2\frac{x}{2}+x^2\right)}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}}$$

и сделаем замену $x+\dfrac{1}{2}=t,\quad dx=dt,\quad x=t-\dfrac{1}{2},$ тогда получим

$$\int\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{\sqrt{\frac{5}{2}-t^2}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{\frac{5}{2}-t^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{2}-t^2}}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{5}{2}-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(\frac{5}{2}-t^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}=-\left(\frac{5}{2}-t^2\right)-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-\sqrt{1-x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

г) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int\frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+1-1}}dx=\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

и сделаем замену $x+1=t,\quad dx=dt,\quad x=t-1$, тогда получим

$$\int\frac{t+2}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}d(t^2-1)+2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=(t^2-1)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C.$$

д) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int\sqrt{x^2+2x+1-3}dx=\int\sqrt{(x+1)^2-3}dx$$

и сделаем замену $x+1=t,\quad dx=dt$, тогда получим $\int\sqrt{t^2-3}dt$.

При нахождении данного интеграла воспользуемся обобщенной формулой (7.п.10.1).

$$\int\sqrt{t^2-3}dt=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-3}-3\ln\left(t+\sqrt{t^2-3}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x-2}-3\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-2}\right)\right)+C.$$

е) Сделаем замену $2^x=t,\quad 2^x\ln 2dx=dt$, тогда получим

$$\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t^2-4t+2}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t^2-4t+4-2}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\ln 2}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{2}}{t-2+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-2-\sqrt{2}}{2^x-2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

5.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$; г) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$.

Решение. а) Сделаем подстановку $x+1=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}}=-\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right|+C.$$

б) Делаем замену $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, получим

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}=-\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2t-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^{1/2}}=-\frac{1}{2}\frac{(2t-1)^{1/2}}{1/2}+C=-(2t-1)^{1/2}+C=-\left(\frac{2}{x}-1\right)^{1/2}+C.$$

в) Делаем замену $x-1=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x-2)^2-1}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-1}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1-2t}}.$$

Сделаем еще замену $1-2t=z^2$, $t=\frac{1-z^2}{2}$, $dt=-zdz$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int \frac{(1-z^2)zdz}{z} = \frac{1}{2}\int (1-z^2)dz = \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{3}z^3\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2t}-\frac{1}{3}(1-2t)^{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{x-3}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}+C.$$

г) Сделаем замену $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$-\int \frac{t^2 dt}{t^2\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+2}} = -\int \frac{tdt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Сделаем еще замену $t-\frac{1}{2}=z$, $t=z+\frac{1}{2}$, $dt=dz$, будем иметь

$$-\int \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}} = -\frac{1}{2}\int \left(z^2+\frac{7}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} d(z^2+\frac{7}{4}) - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}} =$$

$$=-\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}-\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}\right|+C=-\sqrt{t^2-t+2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+2}\right|+C=-\frac{\sqrt{1-x+2x^2}}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x+2x^2}+1}{x}-\frac{1}{2}\right|+C.$$

5.3. Найти интеграл: а) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

б) $\int \frac{(2x+1)dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1), тогда получим

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = (A_0x+A_1)\sqrt{x^2+2x+2} + A_2\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Продифференцируем правую и левую часть

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A_0\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(A_0x+A_1)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем правую и левую части

$$x^2+4x = A_0(x^2+2x+2) + (A_0x+A_1)(x+1) + A_2.$$

Приравниваем неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных

$$\begin{array}{ll} x^2 & 1 = A_0 + A_0, \\ x & 4 = 2A_0 + A_0 + A_1, \\ x^0 & 0 = 2A_0 + A_1 + A_2. \end{array}$$

Решая данную систему уравнений, получим $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = \frac{5}{2}$, $A_2 = -\frac{7}{2}$. Таким образом, интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

б) Воспользуемся подстановкой $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$, $dx=\dfrac{\alpha-\beta}{(t+1)^2}dt$, тогда интеграл примет вид

$$I=\int\frac{(2x+1)dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}=$$

$$=\int\frac{(2\alpha t+2\beta+t+1)(\alpha-\beta)dt}{(3(\alpha t+\beta)^2+4(\alpha t+\beta)(t+1)+4(t+1)^2\sqrt{(\alpha t+\beta)^2+6(\alpha t+\beta)(t+1)-(t+1)^2}}.$$

Приравнивая в квадратных трехчленах коэффициенты при t к нулю, запишем систему уравнений относительно α, β

$$\begin{cases}6\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8=0,\\ 2\alpha\beta+6(\alpha+\beta)-2=0,\end{cases}$$

откуда $\alpha=-1$, $\beta=2$.

Интеграл в этом случае будет

$$I=\int\frac{(t-5)dt}{(t^2+8)\sqrt{15-6t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{tdt}{(t^2+8)\sqrt{5-2t^2}}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{(t^2+8)\sqrt{5-2t^2}}.$$

Первый интеграл находим с помощью подстановки $5-2t^2=u^2$, $t^2=\dfrac{1}{2}(5-u^2)$, $tdt=-\dfrac{1}{2}udu$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{tdt}{(t^2+8)\sqrt{5-2t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{21-u^2}=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{21}}{u-\sqrt{21}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{(u+\sqrt{21})^2}{u^2-21}\right|+C=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}\right)^2}{\sqrt{4(3x^2+4x+4)^2}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}}{\sqrt{2(3x^2+4x+4)}}\right|+C.$$

Второй интеграл решаем посредством подстановки $-2+5t^{-2}=v^2$, $\dfrac{dt}{t}=-\dfrac{1}{5}vdv$, $t^2=\dfrac{5}{v^2+2}$, тогда

$$-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{(t^2+8)\sqrt{5-2t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{v^2+2}{8v^2+21}dv=\frac{1}{8\sqrt{3}}v-\frac{5}{8\sqrt{3}}\int\frac{dv}{8v^2+21}=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}v-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{8}{21}}v+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+6x-1}}{8(2-x)}-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(x^2+6x-1)}}{(2-x)\sqrt{7}}+C.$$

Окончательно получим

$$I=\frac{\sqrt{x^2+6x-1}}{8(2-x)}-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(x^2+6x-1)}}{(2-x)\sqrt{7}}-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}}{\sqrt{2\left(3x^2+4x+4\right)}}\right|+C.$$

10.6. Интегрирование рациональных дробей

1°. Если подынтегральная функция представляет неправильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ т. е. $m>n$, то следует выделить целую часть делением числителя на знаменатель «уголком». В этом случае дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

2°. Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $m<n$ производится разложением ее на сумму простых всегда интегрируемых дробей. Для этого необходимо:

1. Разложить знаменатель $Q_n(x)$ на простейшие множители, причем могут встретиться следующие случаи:

а) корни знаменателя действительны и различны;

б) корни знаменателя действительные и некоторые из них кратные;

в) среди корней знаменателя есть комплексные;

г) среди корней знаменателя есть комплексные кратные.

В общем случае разложение имеет вид

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^m\cdot\ \ldots\ \cdot(x-b)^n(x^2+px+q)^k\cdot\ \ldots\ \cdot(x^2+cx+d)^l,$$

где $m,n,k,l=1,2,3,\ \ldots$; a_0,a,b,p,q,c,d — постоянные, причем $p^2-4q<0,\quad c^2-4d<0.$

2. Написать схему разложения данной дроби на сумму простых дробей

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ \ldots\ +\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1}{x-b}+\ \ldots\ +\frac{B_n}{(x-b)^n}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\ldots+\frac{C_lx+D_l}{(x^2+cx+d)^l},$$

где $A_1,A_2,\ \ldots\ ,A_m,B_1,\ \ldots\ ,B_n,M_1,\ \ldots\ ,M_k,N_1,\ \ldots\ ,\ N_k,C_1,\ \ldots\ ,\ C_l,$ $D_1,\ \ldots\ ,D_l$ — некоторые неопределенные постоянные. Для каждого множителя в разложении знаменателя $Q_n(x)$ выписывается столько простых дробей, какова его кратность (m,n,k,l). Знаменателями простых дробей являются целые степени каждого множителя, начиная с первого и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении.

3. Освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на $Q_n(x)$.

4. Составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (метод неопределенных коэффициентов). Число уравнений должно быть равно числу неопределенных коэффициентов.

5. Решить систему и подставить найденные значения неопределенных коэффициентов $A_1, B_1, M_1, N_1, C_1, D_1$, ... в схему разложения.

Неопределенные коэффициенты можно найти, если положить x в разложении равным действительным значениям корней знаменателя $Q_n(x)$ или подходяще выбранным числам. При решении некоторых примеров этот метод определения коэффициентов целесообразно комбинировать с методом неопределенных коэффициентов.

3°. *Метод Остроградского.* Если многочлен $Q_n(x)$ имеет кратные корни, то справедлива формула

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_1(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $Q_n(x)$ и его производной $Q_n'(x)$; $Q_2(x)$ определяется делением $Q_n(x)/Q_1(x)$; $P_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, у которых степени на единицу меньше, соответственно, степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Дифференцируя формулу Остроградского, представим ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Для определения неопределенных коэффициентов

$P_1(x)$, $P_2(x)$ можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

6.1. Найти интегралы: а) $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$; г) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$ д) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$; е) $\int \frac{dx}{x^4-x^2-6}$.

Решение. а) Выделим целую часть в подынтегральной функции $\frac{x^4}{x^2+a^2}=x^2-a^2+\frac{a^4}{x^2+a^2}$, тогда

$$\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx=\int\left(x^2-a^2+\frac{a^4}{x^2+a^2}\right)dx=\int x^2dx-\int a^2dx+a^4\int \frac{dx}{x^2+a^2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

б) Учитывая кратность корней, подынтегральную функцию представим в виде суммы простых дробей

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю в правой части, приравниваем числители

$$x=A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)$$

или

$$x=Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-C.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0=A+B, \\ x & 1=-4A-3B+C, \\ x^0 & 0=4A+2B-C. \end{array}$$

Из решения этой системы имеем: $A=1$; $B=-1$; $C=2$. Таким образом

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=\ln|x-1|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+C.$$

в) Так как $(x+a)-(x+b)=a-b$, то

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Отсюда

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dx}{x+b}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\ln|x+b|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

г) Раскладываем подынтегральную функцию на множители и, учитывая кратность корней, представим ее в виде суммы простых дробей

$$\frac{1}{x^2(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Откуда $1=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$. Составляем систему

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=B+D, \\ x & 0=4A, \\ x^0 & 1=4B. \end{array}$$

Из решения системы имеем: $A=0,\quad B=\frac{1}{4},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{4}$. Таким образом

$$\int\frac{dx}{x^4+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

д) Поскольку один корень действительный, а два комплексные, то подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Откуда $2x+1=Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C$. Приравнивая коэффициенты, имеем

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0=A+B, \\ x & 2=C-B, \\ x^0 & 1=A-C. \end{array}$$

Из решения системы находим: $A=\frac{3}{2},\quad B=-\frac{3}{2},\quad C=\frac{1}{2}$. Таким образом

$$\int\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{3x-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{4}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{4}\ln(x^2+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{3}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

е) Раскладываем знаменатель подынтегральной функции на множители и представим ее в виде простых дробей

$$\frac{1}{x^4-x^2-6}=\frac{1}{\left(x^2-3\right)\left(x^2+2\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-3}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Откуда $1=Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3-3Cx+Dx^2-3D$. Составляем систему

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=B+D, \\ x & 0=2A-3C, \\ x^0 & 1=2B-3D. \end{array}$$

Из решения системы имеем: $A=0,\ B=\frac{1}{5},\ C=0,\ D=-\frac{1}{5}$. Таким образом

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2-6}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-3}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

6.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{x^4+1}$; б) $\int\frac{4x^2-4x+7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}dx$.

Решение. а) Воспользуемся разложением

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=$$

$$=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

и представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Отсюда имеем

$$1=(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D, \\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D, \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

Из решения системы уравнений получим $A=-C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, решение примет вид

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C.$$

б) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{4x^2-4x+7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}=\frac{x^2-x+7/4}{(x+1)(x-3/2)(x+5/2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3/2}+\frac{C}{x+5/2},$$

откуда следует равенство

$$x^2-x+7/4=A(x-3/2)(x+5/2)+B(x+1)(x+5/2)+C(x+1)(x-3/2).$$

Вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях слева и справа будем полагать в этом равенстве последовательно $x=-1,\ 3/2,\ -5/2$, тогда сразу получим $A=-1$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{7}{4}$, т. к. справа всякий раз остается лишь один член. Таким образом,

$$\int\frac{4x^2-4x+7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3/2}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x+5/2}=$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3/2|+\frac{7}{4}\ln|x+5/2|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2x+5)(2x-3)^7}{256(x+1)^4}\right|+C.$$

6.3. Найти интегралы: а) $\int\frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}dx$; б) $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$; в) $\int\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^2+1)^3}dx$; г) $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)^3}$.

Решение. а) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\left[\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+2x^2+2x+1}\right]'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+2x^2+2x+1},$$

откуда $2-3x+x^2=(2Ax+B)(x^3+2x^2+2x+1)-$

$-(Ax^2+Bx+C)(3x^2+4x+2)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+2x^2+2x+1).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим систему уравнений, из которой и определяются неопределенные коэффициенты

$x^5 \quad 0=D,$

$x^4 \quad 0=2A-3A+2D+E,$

$x^3 \quad 0=4A+B-4A-3B+2D+2E+F,$

$$x^2 \quad 1 = 4A + 2B - 2A - 4B - 3C + D + 2E + 2F,$$

$$x \quad -3 = 2A + 2B - 4C - 2B + E + 2F,$$

$$x^0 \quad 2 = B - 2C + F.$$

Из решения данной системы уравнений получим: $A = -9$, $B = -20$, $C = -7$, $D = 0$, $E = -9$, $F = -2$. Интеграл примет вид

$$I = \int \frac{2 - 3x + x^2}{(x+1)^2 (x^2 + x + 1)^2} dx = -\frac{9x^2 + 20x + 7}{(x+1)(x^2 + x + 1)} - \int \frac{9x + 2}{(x+1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{9x + 2}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1},$$

откуда $9x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$,

$$x^2 \quad 0 = A + B,$$

$$x \quad 9 = A + B + C,$$

$$x^0 \quad 2 = A + C.$$

Из решения системы имеем $A = -7$, $B = 7$, $C = 9$. Таким образом,

$$I = -\frac{9x^2 + 20x + 7}{(x+1)(x^2 + x + 1)} + 7\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{7x + 9}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= -\frac{9x^2 + 20x + 7}{(x+1)(x^2 + x + 1)} + 7\ln|x + 1| - \int \frac{7x + 9}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x + \frac{1}{2} = t$, $dx = dt$, $x = t - \frac{1}{2}$, тогда получим

$$\int \frac{7x+9}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{7t+11/2}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=\frac{7}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{7}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательный результат будет

$$I=-\frac{9x^2+20x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}+7\ln|x+1|-\frac{7}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

б) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}=\left(\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}\right)'+\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+J}{x^5+x+1},$$

$$4x^5-1=(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1)-(Ax^4+Bx^3+$$

$$+Cx^2+Dx+E)(5x^4+1)+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+J)(x^5+x+1),$$

$$\begin{array}{ll}
x^9 & 0=F,\\
x^8 & 0=4A-5A+G,\\
x^7 & 0=3B-5B+H,\\
x^6 & 0=2C-5C+I,\\
x^5 & 4=D-5D+J+F,\\
x^4 & 0=4A+5E-A+F+G,\\
x^3 & 0=4A+3B-B+G+H,\\
x^2 & 0=3B+2C-C+H+I,\\
x & 0=2C+D-D+I+J,\\
x^0 & -1=D-E+J.
\end{array}$$

Из решения системы $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=-1$, $E=0$, $F=0$, $G=0$, $H=0$, $I=0$, $J=0$.

Интеграл примет вид

$$\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx = -\frac{x}{x^5+x+1}+C.$$

в) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^2+1)^3} = \left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right]' + \frac{E}{x+1}+\frac{Fx+G}{x^2+1},$$

$$x^4-2x^2+1=(3Ax^2+2Bx+C)(x^3+x^2+x+1)-4(Ax^3+Bx^2+Cx+$$

$$+D)(x^2+x)+E(x^6+3x^4+3x^2+1)+(Fx+G)(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим

$$\begin{array}{ll} x^6 & 0=E+F, \\ x^5 & 0=-A+F+G, \\ x^4 & 1=-A-2B+3E+2F+G, \\ x^3 & 0=3A-2B-4C+2F+2G, \\ x^2 & -2=3A+2B-4C-4D+3E+F+2G, \\ x & 0=2B+C-4D+F+G, \\ x^0 & 1=C+E+G. \end{array}$$

Из решения системы: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{2}{3}$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $G=\frac{1}{3}$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^2+1)^3}dx = \frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3-\frac{3}{2}x^2+2x}{(x^2+1)^2}+\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

г) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^5(x+1)^3}$$

и воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{1}{(x-1)^5(x+1)^3}=\left[\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x-1)^4(x+1)^2}\right]'+\frac{G}{x-1}+\frac{H}{x+1}.$$

Найдем производную, приведем к общему знаменателю и приравняем числители

$$1=(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(x^2-1)-(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+$$
$$+Ex+F)(6x+2)+G(x^6-3x^4+3x^2-1)(x-1)+H(x^3-3x^2+$$
$$+3x-1)(x^4-2x^2+1).$$

$$\begin{array}{ll}
x^7 & 0=G+H,\\
x^6 & 0=5A=6A-G-3H,\\
x^5 & 0=4B-2A-6B-3G-2H+3H,\\
x^4 & 0=-5A+3C-2B-6C+3G+6H-H,\\
x^3 & 0=-4B+3D-6D-2C+3G+H-6H,\\
x^2 & 0=-3C+E-2D-6E-3G+H,\\
x & 0=-2D-2E-6F-G+3H,\\
x^0 & 1=-E-2F+G-H.
\end{array}$$

Из решения системы имеем: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{6}$, $C=-\frac{5}{9}$, $D=\frac{23}{36}$, $E=-\frac{1}{18}$, $F=-\frac{11}{36}$, $G=\frac{1}{6}$, $H=-\frac{1}{6}$. Таким образом, интеграл будет равен

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)^3}=\frac{\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{9}x^3+\frac{23}{36}x^2-\frac{1}{18}x-\frac{11}{36}}{(x-1)^4(x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{12x^5-6x^4-20x^3+23x^2-2x-11}{(x-1)^4(x+1)^2}+\cdot$$

$$+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{6x-1}{x+1}\right|+C.$$

10.7. Интегралы от иррациональных функций

Интегралы от иррациональных функций берутся только в некоторых частных случаях. Основным приемом интегрирования является отыскание таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду.

1°. Интегралы вида $R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots)dx$, где R — некоторая рациональная функция; m_1, m_2, n_1, n_2 — целые числа, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^k,$ $dx=kt^{k-1}dt$, где k — общий знаменатель дробных показателей.

2°. Интегралы более общего вида $\int R(x,(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta}\ldots)dx$ или

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right)dx$$

приводятся к рациональному виду с помощью аналогичных подстановок $ax+b=t^k$, $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, \ldots$.

3°. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p, a, b — постоянные числа, преобразуется с помощью подстановки $x=z^{1/n}$ к виду $\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz,$

где $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$ и приводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

1. Если p — целое, то подстановка $z = t^{n_1}$, где n_1 — знаменатель дроби $q = \dfrac{m_1}{n_1}$.

2. Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое, то и $\dfrac{m+1}{n} - 1$ — тоже целое и подстановка $a + bx^n = a + bz = t^{n_1}$, где n_1 — знаменатель дроби $p = \dfrac{m_1}{n_1}$.

3. Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число, то $p + q = \dfrac{m+1}{n} - 1 + p$ — тоже целое и интеграл равен $\int z^q (a+bz)^p\, dz = z^{q+p}\left(\dfrac{a+bz}{z}\right)^p dz$. Интеграл приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax^{-n} + b = \dfrac{a+bz}{z} = t^{n_1}$, где n_1 — знаменатель дроби $p = \dfrac{m_1}{n_1}$.

4°. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера.

1. Если $a > 0$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$, откуда

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt.$$

2.Если $c > 0$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, откуда

$$x = \frac{2\sqrt{a}t - b}{a - t^2}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt.$$

3. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет различные вещественные корни,т. е. $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$, откуда

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx = 2\frac{a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Замечание. При $a > 0$, $c > 0$, т. е. в первой и второй подстановках можно было бы положить, соответственно, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$. В третьей подстановке $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\mu)$. Следует заметить, что в большинстве случаев подстановки Эйлера приводят к более длинным вычислениям, чем другие методы.

5°. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E})dx$, где R — рациональная функция, называемые эллиптическими, вообще говоря не интегрируются, если между коэффициентами функции R или полинома под знаком радикала нет особых соотношений. В ряде случаев, при наличии возвратных полиномов, интеграл находится с помощью подстановок $x+\dfrac{1}{x}=t$ или $x-\dfrac{1}{x}=t$.

7.1. Найти интегралы: а) $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\sqrt{3-x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$; д) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Решение. а) Общий знаменатель дробных показателей степеней равен четырем, поэтому делаем замену $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$. Отсюда

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = 4\int \frac{1+t}{t^4+t^2}t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+t}dt = 4\left(1+\frac{t-1}{t^2+t}\right)dt =$$

$$= 4\left(t + \int \frac{tdt}{t^2+t} - \frac{dt}{t^2+t}\right) = 4\left(t + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= 4\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

б) Чтобы избавиться от радикала, сделаем замену $3 - x = t^2$, $x = 3 - t^2$, $dx = -2tdt$, тогда получим

$$\int x\sqrt{3-x}dx = -2\int (3-t^2)t^2dt =$$

$$= -2\int (3t^2 - t^4)dt = -2\left(t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) + C = -\frac{2}{5}(3-x)^{3/2}(x+2) + C.$$

в) Общий знаменатель дробных показателей равен шести, поэтому делаем замену $x + 1 = t^6$; $dx = 6t^5dt$. Отсюда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = 6\left(\frac{1}{3}\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x+1} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[6]{x+1} - \ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|\right) + C.$$

г) Чтобы избавиться от радикала, сделаем замену $\frac{x+1}{x-1} = t^2$; $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$; $dx = -\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$, тогда получим

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = -4\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt = -4\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{A}{t^2+1} + \frac{B}{t^2-1}; \qquad t^2 = At^2 - A + Bt^2 + B;$$

$\{1 = A+B,\ 0 = -A+B\} \Rightarrow A = \frac{1}{2};\ B = \frac{1}{2}$, таким образом

$$-4\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1}\right) = -2\left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C =$$

$$= -\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|\right) + C.$$

д) Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x} - (1+\sqrt{x})$, тогда будем иметь

$$\int \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \sqrt{x}}{1+x-(1+\sqrt{x})^2}dx = \int \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}\int dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$$

Рассмотрим $\int \frac{1+x}{x}dx = I$ отдельно. Сделаем замену $\frac{1+x}{x} = t^2$, $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Интеграл примет вид $I = -2\int \frac{t^2dt}{(t^2-1)^2}$. Подынтегральную функцию представим в виде суммы двух более простых дробей

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{At+B}{(t-1)^2} + \frac{Ct+D}{(t+1)^2}.$$

Приравниваем числители

$$t^2=(At+B)(t^2+2t+1)+(Ct+D)(t^2-2t+1)$$

и неопределеные коэффициенты при одинаковых степенях t

$$\begin{array}{ll} t^3 & 0=A+C, \\ t^2 & 1=2A+B-2C+D, \\ t & 0=A+2B+C-2D, \\ t^0 & 0=B+D. \end{array}$$

Решая данную систему уравнений, находим: $A=\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=0$.

Отсюда

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{(t-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t-1}+\int(t-1)^{-2}dt\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t+1}-\int(t+1)^{-2}dt\right)=\frac{1}{2}(-\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{t}{t^2-1}+C=\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|+\sqrt{x(1+x)}+C.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\left(x+2\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|-\sqrt{x(1+x)}\right)+C.$$

7.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$; б) $\int\frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$; в) $\int\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Решение. а) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином. $p=-2$ — целое число, поэтому применяем подстановку $x=t^4$, $dx=4t^3dt$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2(1+t)^2} = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt =$$

$$= 4\left(\int \frac{dt}{t+1} - \int (t+1)^{-2} d(t+1)\right) = 4\left(\ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= 4\left(\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right) + C.$$

б) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином $p = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} = 2$ — целое число, поэтому применяем подстановку $x = z^4$, $dx = z^3 dz$, получим

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 4\int \frac{\sqrt[3]{1+z}}{z^2} z^3 dz = 4\int z\left(1+z\right)^{1/3} dz.$$

Поскольку $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{-1/2+1}{1/4} - 1 = 1$ — целое число, то используем подстановку $1+z = t^3$, $z = t^3 - 1$, $dz = 3t^2 dt$. Отсюда

$$I = 12\int \left(t^3-1\right)t^3 dt = 12\int \left(t^6 - t^3\right)dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{12}{7}\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(1+z\right)^{4/3} + C = \frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{4}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3} + C.$$

в) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином $m = -2$, $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = -z$ — целое число, поэтому применим подстановку $x = z^{1/3}$, $dx = \frac{1}{3}z^{-2/3}dz$, и получим

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}=\frac{1}{3}\int\frac{z^{-2/3}dz}{z^{2/3}\left(1+z\right)^{5/3}}=\frac{1}{3}\int\frac{z^{-4/3}z^{-5/3}}{\left(\frac{1+z}{z}\right)^{5/3}}dz=\frac{1}{3}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-5/3}dz.$$

Интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{1+z}{z}=t^3,\quad z=\frac{1}{t^3-1},\quad dz=\frac{3t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}.$

$$I=-\int\left(t^3-1\right)^3t^{-5}\frac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}=-\int\frac{t^3-1}{t^3}dt=\int\frac{dt}{t^3}-\int dt=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}-t+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{2/3}-\left(\frac{1+z}{z}\right)^{1/3}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}-\left(\frac{1}{x^3}+1\right)^{1/3}+C.$$

7.3. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$; б) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

Решение. а) Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $x^2+1=t-x.$

Возводя в квадрат, получим $x=\frac{t^2-1}{2t},\quad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt.$

Подставляя под знак интеграла, будем иметь

$$I=\int\frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x^2+1})}=\int\frac{(t^2+1)dt}{2t^2\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2\left(\frac{t^2-1}{2t}+\frac{t^2+1}{2t}\right)}=2\int\frac{t^2+1}{t(t^2-1)^2}dt.$$

Воспользуемся методом Остроградского. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{t^2+1}{t(t^2-1)^2}=\left[\frac{At+B}{t^2-1}\right]'+\frac{C}{t}+\frac{Dt+E}{t^2-1}.$$

Найдем производную, приведем к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных

$$\begin{array}{ll} t^4 & 0=C+D, \\ t^3 & 0=-A+E, \\ t^2 & 1=-2B-2C-D, \\ t & 0=-A-E, \\ t^0 & 1=C. \end{array}$$

Отсюда: $A=0$, $B=-1$, $C=1$, $D=-1$, $E=0$. Интеграл примет вид

$$I=2\left(-\frac{1}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{t^2-1}\right)=2\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}-\frac{1}{t^2-1}\right)+C.$$

Переходя к переменной x, окончательно будем иметь

$$I=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}-\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)+C.$$

б) Воспользуемся второй подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2-x+1}=tx+1$. Возводя в квадрат, получим $x=\dfrac{2t+1}{1-t^2}$, $dx=2\dfrac{t^2+t+1}{(1-t^2)^2}dt$, $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t^2+t+1}{1-t^2}$. Подставляя все это под знак интеграла, будем иметь

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-2\int\frac{t^2+t+1}{(t^2-1)(t^2+3t+2)}dt.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t^2+t+1}{(t^2-1)(t^2+3t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{t+2},$$

$$t^2+t+1=A(t+2)(t^2+2t+1)+B(t+2)(t^2-1)+$$
$$+C(t-1)(t+2)+D(t+1)(t^2-1),$$

$$\begin{array}{ll} t^3 & 0=A+B+D, \\ t^2 & 1=4A+2B+C+D, \\ t & 1=5A-B+C-D, \\ t^0 & 1=2A-2B-2C-D. \end{array}$$

Отсюда $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{3}{2}$, $C=-1$, $D=-\frac{5}{3}$. Таким образом:

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-3\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{10}{3}\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|-3\ln|t+1|-\frac{2}{t+1}+\frac{10}{3}\ln|t+2|+C.$$

Переходя к переменной x, получим

$$I=-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1-x\right|-3\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1+x\right|+$$

$$+10\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1+2x\right|-\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}-1+x}+C.$$

в) Поскольку подкоренное выражение имеет два действительных корня, то воспользуемся третьей подстановкой Эйлера $\sqrt{3-2x-x^2}=(3+x)t$, откуда $x=\frac{1-3t^2}{1+t^2}$, $dx=-\frac{8tdt}{(1+t^2)^2}$.

Интеграл примет вид

$$I=\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx=4\int\frac{1+4t^2-21t^4}{(t^2+1)^3}dt.$$

Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{1+4t^2-21t^4}{(t^2+1)^3}=\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2+1)^2}\right]'+\frac{Et+F}{t^2+1},$$

откуда $1+4t^2-21t^4=(3At^2+2Bt+C)(t^2+1)-4t(At^3+Bt^2+Ct+$
$+D)+(Et+F)(t^4+2t^2+1)$

$$\begin{array}{ll} t^5 & 0=E, \\ t^4 & -21=3A-4A+F, \\ t^3 & 0=2B-4B+2E, \\ t^2 & 4=3A+C-4C+2F, \\ t & 0=2B-4D+E, \\ t^0 & 1=C+F. \end{array}$$

Отсюда: $A=14$, $B=0$, $C=8$, $D=0$, $E=0$, $F=-7$. Таким образом,

$$I=4\left(\frac{14t^3+8t}{(t^2+1)^2}-7\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=4\left(\frac{2t(7t^2+4)}{(t^2+1)^2}-7\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

Учитывая, что $t^2=\dfrac{1-x}{3+x}$, и переходя к переменной x, окончательно получим

$$I=\frac{1}{2}(19-3x)\sqrt{3-2x-x^2}-28\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{3+x}}+C.$$

7.4. **Найти** интегралы: а) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$;

б) $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Решение. а) Воспользуемся подстановкой $x+\dfrac{1}{x}=t$, $\dfrac{x^2-1}{x^2}dx=dt$.

Выведем некоторые нужные соотношения $\frac{x^2+1}{x}=t$, $x^4+1=(t^2-2)x^2$, $\frac{x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{t^2-4}$, тогда интеграл примет вид

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{tdt}{(t^2-4)\sqrt{t^2-2}}.$$

Сделаем еще одну замену $t^2-2=z^2$, $tdt=zdz$ и представим интеграл в виде

$$I=\int\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Переходя к переменной t, а затем к x, будем иметь

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\left(\sqrt{t^2-2}-\sqrt{2}\right)^2}{\left|t^2-4\right|}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}-x\sqrt{2}}{x^2-1}\right|+C.$$

б) Воспользуемся подстановкой $x-\frac{1}{x}=t$, $\frac{x^2+1}{x^2}dx=dt$.

Введем некоторые дополнительные соотношения $\frac{x^2-1}{x}=t$, $\sqrt{x^4+3x^2+1}=x\sqrt{t^2+5}$, $\frac{x^2+1}{x}=\sqrt{t^2+2}$. Интеграл в этом случае примет вид

$$I=\int\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+2}\sqrt{t^2+5}}.$$

Сделаем еще одну замену $t^2+2=z^2$, $tdt=zdz$, тогда интеграл преобразуется к виду

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+3}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2+3}\right|+C.$$

Переходя к переменной t, а затем к x, получим

$$I=\ln\left|\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$$

10.8. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интеграл от четной степени $\sin x$, $\cos x$ можно найти путем понижения степени вдвое по формулам

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x). \tag{1}$$

2°. Интеграл от нечетной степени $\sin x$, $\cos x$ можно найти путем отделения от нее одного множителя и замены его произведения на дифференциал новой переменной.

3°. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x dx$ можно найти по правилу (1°), если m и n оба четные неотрицательные числа, или по правилу (2°), если m или n (или и m и n) нечетно. Если $m+n=-2k$, т. е. четное отрицательное число, то целесообразно использовать подстановку $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$, откуда $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ или $dx=-\frac{dt}{1+t^2}$. В общем случае интегралы данного вида, где m и n целые числа, находятся с помощью рекурентных формул, которые выводятся интегрированием по частям.

4°. Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$, то применяют замену $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$.

5°. Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $\sin x$, $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, поскольку $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются через $\operatorname{tg} x$ рационально $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ и $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$.

6°. Если интегралы имеют вид: $\int \sin ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \sin bx dx$; $\int \cos ax \cos bx dx$, то их можно найти путем разложения на слагаемые по формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x). \tag{2}$$

7°. Интегралы от рациональной функции вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ всегда сводятся к интегралам от рациональной функции, т. к. $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через t рационально

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{3}$$

Рассмотренная подстановка позволяет проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$, поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой».

8°. Интегралы от произведения трех тригонометрических функций могут быть найдены по формулам

$$\int \cos ax \cos bx \cos cx dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} + \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} \right) + C,$$

$$\int \cos ax \sin bx \sin cx dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} - \frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a} \right) + C,$$

$$\int \sin ax \cos bx \cos cx dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\cos(a+c-b)x}{a+c-b} \right) + C,$$

$$\int \sin ax \sin bx \sin cx dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c} - \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} - \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} \right) + C.$$

8.1. Найти интегралы: а) $\int \sin^4 x dx$; б) $\int \cos^3 x dx$; в) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$; г) $\int \sin x \cos^5 x dx$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; е) $\int \mathrm{tg}^3 5x dx$.

Решение. а) Пользуемся формулами тригонометрии для половинного угла

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x-\sin 2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx = \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{8}(x + \frac{1}{4}\sin\ 4x) + C.$$

б) Отделяем от нечетной степени один множитель первой степени и вносим его под знак дифференциала

$$\int \cos^3 dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x) d\sin\ x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

в) По формулам половинных углов имеем

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x)(1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x) dx = \frac{1}{8}(1-\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) - \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x) d\sin\ 2x =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) - \frac{1}{16}(x + \frac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{16}(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x) + C.$$

г) Вносим синус под знак дифференциала

$$\int \sin x \cos^5 x dx = -\int \cos^5 x d\cos x = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

д) Отделяем в числителе от нечетной степени один множитель первой степени и вносим под знак дифференциала

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d\cos x = -\int \frac{d\cos x}{\cos^4 x} + \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= -\int \cos^{-4} x d\cos x + \int \cos^{-2} x d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

е) Делаем замену $\operatorname{tg} 5x = t$, тогда $x = \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{dt}{5(1+t^2)}$. Переходим под знаком интеграла к новой переменной

$$\int \operatorname{tg}^3 5x dx = \frac{1}{5}\int \frac{t^3 dt}{t^2+1}.$$

Выделяем, деля числитель на знаменатель, целую часть

$$\frac{1}{5}\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\frac{1}{5}\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{10}t^2-\frac{1}{10}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{10}(t^2-\ln(t^2+1)+C=\frac{1}{10}(\mathrm{tg}^2\,5x-\ln(\mathrm{tg}^2\,5x+1))+C.$$

8.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^6 x}$; б) $\int\cos 3x\cos 7xdx$;

в) $\int\frac{dx}{2\cos x+3\sin x+2}$; г) $\int\frac{dx}{\cos^5 x}$; д) $\int\cos 2x\sin 3x\sin 4xdx$;

е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x-8\sin x\cos x-\cos^2 x}$; ж) $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}{\sin x\cos x}dx$.

Решение. а) Поскольку синус и косинус в четных степенях, используем подстановку $\mathrm{tg}\,x=t$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^6 x}=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^4 x}=\int t^2(1+t^2)^2\frac{dt}{1+t^2}=\int(t^2+t^4)dt=$$

$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5\,x+C.$$

б) Преобразуя по формулам (2), имеем

$$\int\cos 3x\cos 7xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 10x)dx=\frac{1}{8}\int\cos 4xd(4x)+$$

$$+\frac{1}{20}\int\cos 10xd(10x)=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

в) Пользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда по формулам (3) получим

$$\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 2} = 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 2} = 2\int \frac{dt}{2-2t^2+6t+2+2t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t+2} = \frac{1}{3}\ln|3t+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\right| + C.$$

г) Воспользуемся обобщенной формулой интегрирования (13)

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x|\right) + C.$$

д) Пользуясь формулами пункта (8°), имеем

$$\int \cos 2x \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{4}(\sin(2+3-4)x + \frac{1}{3}\sin(2+4-3)x -$$

$$-\frac{1}{9}\sin(2+3+4)x - \frac{1}{5}\sin(3+4-2)x) + C = \frac{1}{4}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x -$$

$$-\frac{1}{9}\sin 9x - \frac{1}{5}\sin 5x) + C.$$

е) Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, будем иметь

$$\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - 4)}{(\operatorname{tg} x - 4)^2 - 17} = \frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 4 - \sqrt{17}}{\operatorname{tg} x - 4 + \sqrt{17}}\right| + C.$$

ж) Умножим числитель и знаменатель на $\cos x$, получим

$$\int \frac{\cos x\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x} d\operatorname{tg} x = \int \operatorname{tg}^{-\frac{1}{2}} x d\operatorname{tg} x = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

10.9. Интегрирование гиперболических функций

1°. Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций. Интегралы от квадратов и других четных степеней $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ находятся применением формул:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1);$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);\ \operatorname{sch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x;\ \operatorname{csch}^2 x = 1 - \operatorname{cth}^2 x.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ находятся так же, что и интегралы от нечетных степеней $\sin x$, $\cos x$.

2°. Гиперболические подстановки могут пременяться при нахождении интегралов вида

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{ch} t$;

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{sh} x$;

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{th} x$.

При этом: если $x = a \operatorname{sh} t$, то $t = \ln \dfrac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$,

если $x = a \operatorname{ch} x$, то $t = \ln \dfrac{x + \ln\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$.

9.1. Найти интегралы: а) $\int \operatorname{sh}^2 2x dx$; б) $\int \operatorname{sh}^x \operatorname{ch}^3 x dx$;

в) $\int \operatorname{th}^4 x dx$; г) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$; д) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh} x}$; е) $\int x^2 \operatorname{sh} x dx$;

ж) $\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx$; з) $\int \dfrac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$; и) $\int \sin x \operatorname{sh} x dx$.

Решение. а) Пользуясь формулами понижения степени, имеем

$$\int \operatorname{sh}^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 4x - 1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 4x d4x - x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x - x\right) + C.$$

б) Внесем $\operatorname{ch} x$ под знак дифференциала, тогда будем иметь

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x d\operatorname{sh} x = \int \operatorname{sh}^2 x(1+\operatorname{sh}^2 x) d\operatorname{sh} x =$$

$$= \int \operatorname{sh}^2 x d\operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^4 x d\operatorname{sh} x = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C.$$

в) Сделаем замену $\operatorname{th} x = t$; $\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = dt$; $dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$, тогда получим

$$\int \operatorname{th}^4 x dx = \int \frac{t^4 dt}{1-t^2} = -\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = -\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C =$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 1}{\operatorname{th} x + 1}\right|\right) + C.$$

г) Преобразуем подынтегральную функцию по формулам половинных углов

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \int \frac{dx}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{th}\frac{x}{2} + C.$$

д)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2} dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

е) Воспользуемся дважды формулой интегрирования по частям, принимая $x^2 = u$, $\operatorname{sh} x dx = dv$, $2x dx = du$, $v = \operatorname{ch} x$. Будем иметь

$$\int x^2 \operatorname{sh} x dx = x^2 \operatorname{ch} x - 2\int x \operatorname{ch} x dx.$$

Принимаем $x = u$, $\operatorname{ch} xdx = dv$, отсюда $dx = du$, $v = \operatorname{sh} x$.

Окончательно получим $\int x^2 \operatorname{sh} xdx = x^2 \operatorname{ch} x - 2(x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + C$.

ж) $\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}dx = \int \sqrt{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}dx = 2\sqrt{2}\int \operatorname{sh}\frac{x}{2} d\frac{x}{2} = 2\sqrt{2} \operatorname{ch}\frac{x}{2} + C.$

з) Воспользуемся заменой $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, тогда будем иметь

$$\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = 2\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}} = \int dx = x + C.$$

и) Раскроем гиперболический синус и воспользуемся обобщенной формулой (6)

$$\int \sin x \operatorname{sh} xdx = \frac{1}{2}\int e^x \sin xdx - \frac{1}{2}\int e^{-x} \sin xdx = \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)e^x +$$

$$+\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)e^{-x} + C = \frac{1}{2}(\sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x) + C.$$

9.2. Найти интегралы: а) $\int \sqrt{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. а) Сделаем замену $x = 2\operatorname{sh} t$; $dx = 2\operatorname{ch} xdt$, тогда

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = 4\int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \operatorname{ch} tdt = 4\int \operatorname{ch}^2 tdt = 2\int (\operatorname{ch} 2t + 1)dt =$$

$$= \operatorname{sh} 2t + 2t + C = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} + 2t + C = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\ln\frac{x+x^2+4}{2} + C.$$

б) Сделаем замену $x = a\operatorname{ch} tdt$, $dx = a\operatorname{sh} tdt$, тогда

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^2\int \frac{\operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} tdt}{\operatorname{sh} t} = a^2\int \operatorname{ch}^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (\operatorname{ch} 2t + 1)dt =$$

$$=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh}2t+t)+C=a^2(\operatorname{ch}t\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}+t)+C=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\frac{x+\ln\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.$$

в) Выделяя полный квадрат и делая замену $1-x=t,\quad dx=-dt$, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}=-\int\frac{dt}{1-t^2}.$$

Сделаем еще одну замену $t=\operatorname{th}z,\quad dt=\frac{dz}{\operatorname{ch}^2z}$, тогда

$$-\int\frac{dt}{1-t^2}=-\int\frac{dz}{\operatorname{ch}z}=-\int\frac{\operatorname{ch}z\,dz}{\operatorname{ch}^2z}=-\int\frac{d\operatorname{sh}z}{1+\operatorname{sh}^2z}=-\operatorname{arctg}\operatorname{sh}^2z+C=$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}^2z}{1-\operatorname{th}^2z}+C=-\operatorname{arctg}\frac{t^2}{1-t^2}+C=-\operatorname{arctg}\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}+C.$$

10.10 Задачи, приводящие к понятию неопределенного интеграла

Из геометрического смысла первообразной следует, что производная функции $y=F(x)$ дает угловой коэффициент касательной к соответствующему графику $y=F(x)+C$. Поэтому задача отыскания первообразной для заданной функции $f(x)$, равносильна задаче нахождения кривой, для которой закон изменения углового коэффициента известен $\operatorname{tg}\alpha=f(x)$.

Поскольку кривые отличаются друг от друга на постоянную интегрирования, то для того, чтобы из этого множества кривых выбрать одну кривую, достаточно задать точку $(x_0,\,y_0)$, через которую кривая должна проходить, т. е. определить постоянную интегрирования.

Из механического истолкования неопределенного интеграла следует, что если задан закон изменения скорости от времени $v = f(x)$, то зависимость пути S от времени определяется интегралом $S = \int f(t)dt$, т. к. скорость движения точки есть производная $\frac{dS}{dt}$. Постоянная интегрирования находится из заданного начального условия, иначе получим бесчисленное множество решений.

10.1. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1,2)$, если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен обратной величине абсциссы точки касания.

Решение. Закон изменения углового коэффициента известен $f(x) = \frac{1}{x}$. Поскольку производная от $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то $y = \ln x + C$ — искомая кривая.

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся условием, что кривая проходит через точку M, тогда $2 = \ln 1 + C$ и $C = 2$. Таким образом: $y = \ln x + 2$.

10.2. Скорость тела задана функцией $v = 3t^2$ м/с.**Найти** закон изменения пути S, если за $t = 2$с, тело прошло путь $S = 20$м.

Решение. Имеем: $S = \int v dt = 3\int t^2 dt = t^3 + C$. Согласно начальному условию: $20 = 2^3 + C$, откуда $C = 12$. Таким образом, искомый закон $S = t^3 + 12$.

Глава 11
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Определение определенного интеграла. Свойства. Формула Ньютона–Лейбница

1°. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей. В каждом из отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ возьмем по точке ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. В зависимости от деления отрезка $[a,b]$ на n частичных отрезков и выбора точек ξ_i можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число, равное общему пределу всех интегральных сумм при стремлении к нулю максимального отрезка разбиения

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a,b]$ — промежутком интегрирования.

2°. *Свойства:* 1. Определенный интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

5. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx +.$$

6. Отрезок интегрирования можно разбивать на части

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

причем точка c может быть как внутренней точкой деления отрезка ($a<c<b$), так и внешней ($a<b<c$).

3°. *Формула Ньютона–Лейбница.* Если $F(x)$ есть первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

По формуле Ньютона–Лейбница сначала находят первообразную, а затем находят разность первообразных, соответственно, при верхнем и нижнем значении предела.

4°. Нахождение интегралов от четных и нечетных функций с симметричными пределами интегрирования можно упростить, применяя формулы $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ — четная функция, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ — нечетная функция.

5°. Если функция периодическая с периодом T, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx; \quad (n=0,\pm1,\mp2,\ \dots\ ).$$

1.1. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^3 (3x^2+1)dx$; б) $\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx$; в) $\int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}$; г) $\int_0^\pi \sin\frac{\pi}{2}dx$;

Решение. а) Представим определенный интеграл в виде суммы двух интегралов и для каждого из них воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница

$$\int_1^3 (3x^2+1)dx = 3\int_1^3 x^2dx + \int_1^3 dx = x^3\Big|_1^3 + x\Big|_1^3 = (3^3-1^3)+(3-1)=28.$$

б) По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx = \left(x + 4e^{\frac{x}{4}} \right)\Bigg|_0^4 = (4+4e)-(0+4) = 4e.$$

в) По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{7} (3t+4)^{-\frac{1}{2}} d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^{7} =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{21+4} - \sqrt{-3+4}) = \frac{8}{3}.$$

г) Пользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = -2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = 2.$$

1.2. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$; б) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^7dx}{x^6+4x^2+7}$; в) $\int\limits_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \sin 2x}{\cos^4 x}dx.$

Решение. а) Подынтегральная функция есть произведение двух нечетных функций, т. е. является четной функцией, поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

б) В силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов интегрирования данный определенный интеграл равен нулю

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^7dx}{x^6+4x^2+7} = 0.$$

в) Подынтегральная функция имеет период π, поэтому из верхнего и нижнего пределов интегрирования можно вычесть 2π. Определенный интеграл примет вид

$$\int_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos^4 x}dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x)d\operatorname{tg} x=\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}3\sqrt{3}+3-\frac{1}{3}-1=\sqrt{3}+\frac{5}{3}.$$

11.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t по формуле $x=\varphi(t)$.

Если $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$, функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2.1. Вычислить определенные интегралы: а) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}dx$; д) $\int_0^4\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

е) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$; ж) $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменной $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$. Находим новые пределы интегрирования: при x = 0, $t=0$ и при $x=3$, $t=\sqrt{3}$. Интеграл примет вид

$$\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}tdt = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} dt - 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3}-\mathrm{arctg}\sqrt{3}) = 2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Полагаем $e^x=t$, тогда $dx=\frac{dt}{t}$. Находим новые пределы интегрирования: при $x=\ln 2$, $t=2$ и при $x=\ln 3$, $t=3$. Отсюда

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int\limits_2^3 \frac{dt}{(t-t^{-1})t} = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

в) Сделаем замену $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, тогда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x=0$, $t=0$ и при $x=\frac{\pi}{2}$, $t=1$. Интеграл примет вид

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = 2\int\limits_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2} =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

г) Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$, тогда $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x = \dfrac{\pi}{4}$, $t = 1$ и при $x = \dfrac{\pi}{3}$, $t = \sqrt{3}$. Интеграл примет вид

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\sqrt{3}} (1+t)^{-2}\,d(1+t) =$$

$$= -\left|\frac{1}{1+t}\right|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2(1+\sqrt{3})} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

д) Сделаем замену $x = 4\sin t$, тогда $dx = 4\cos t\,dt$. Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x = 0$, $t = 0$ и при x=4, $t = \dfrac{\pi}{2}$. Интеграл примет вид

$$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\, 4\cos t\,dt}{4\cos t} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = 8\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

е) В данном определенном интеграле первообразная не выражается через элементарные функции. Воспользуемся искусственным приемом. Сделаем подстановку $x = \operatorname{tg} t$, тогда $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$ и при $x = 0$, $t = 0$, а при $x = 1$, $t = \dfrac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} t + 1)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin t + \cos t}{\cos t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt =$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt.$$

Последние два интеграла равны между собой, т. к. приводятся один к другому с помощью подстановки $t=\frac{\pi}{4}-\varphi$. Действительно, $dt=-d\varphi$, причем при $t=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, а при $t=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=0$ и интеграл равен

$$\int\limits_0^1\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt=$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\varphi d\varphi-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

ж) Воспользуемся подстановкой $x=\pi-t$,, тогда при $x=0$, $t=\pi$ и при $x=\pi$, $t=0$. Интеграл примет вид

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int\limits_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Поскольку величина определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования, то, заменяя в последнем интеграле t на x и перенося его в левую часть, будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\cos t\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}(\operatorname{arctg}(-1)-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi^2}{4}.$$

11.3. Интегрирование по частям

1°. Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (1)$$

2°. Обобщенная формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left(uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^n v\right)\Big|_a^b +$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx. \qquad (2)$$

Пользуясь обобщенной формулой интегрирования по частям, можно вывести ряд рекурентных формул:

1. Интегралы $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx,\;\; I'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$ находятся с помощью рекурентной формулы $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$ и равны

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } m - \text{четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{при } m - \text{нечетном.} \end{cases}$$

2. Если m и n натуральные числа, то интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } m \text{ и } n - \text{четных;} \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

3. Интеграл вида $I_{n,m} = \int_0^1 x^n \ln^m x dx$ находится по рекурентной формуле $I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}$ и равен

$$I_{n,m} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

4. Если m и n натуральные числа, то имеет место следующий интеграл

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

5. Интеграл вида $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx dx$ находится по рекурентной формуле $I_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + I_{m-1}\right)$ и равен

$$I_m = \frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^m}{m}\right).$$

6. Интеграл вида $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos mx dx$ равен $I_m = \frac{\pi}{2^{m+1}}$.

7. Приведем еще некоторые известные соотношения:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x dx = 0$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x dx = -\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}$.

3.1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx$; б) $\int_0^1 (x+2)e^{5x}dx$.

Решение. а) Полагаем $u = x$; $\sin x dx = dv$, тогда $du = dx$; $v = -\cos x$. Пользуемся формулой (1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx =$$

$$= -(\pi\cos\pi + \pi\cos\pi) + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

б) Полагаем $u = x+2$; $e^{5x}dx = dv$, тогда $du = dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$.
По формуле (1) имеем

$$\int_0^1 (x+2)e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+2)e^{5x}\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 e^{5x}dx =$$

$$= \frac{1}{5}(3e^5 - 2) - \frac{1}{25}e^{5x}\Big|_0^1 = \frac{1}{25}(14e^5 - 9).$$

3.2. Вычислить интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 x dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^4 x dx$; в) $\int_0^1 x^4 \ln^3 x dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos 7x dx$.

Решение. а) Воспользуемся формулой пункта 1. При $m = 9$, т. е. нечетном, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x dx = \frac{8!!}{9!!} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot} \simeq 0,406.$$

б)По формуле пункта (2), где $m = 5$; $n = 4$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^4 x dx = \frac{4!!3!!}{9!!} = \frac{2\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \simeq 0,0254.$$

в) По формуле пункта 3, где $n = 4$, $m = 3$, имеем

$$\int_0^1 x^4 \ln^3 x dx = (-1)^3\frac{3!}{(4+1)^{3+1}} = -\frac{2\cdot 3}{5^4} = -0,0096.$$

г) По формуле в) пункта 7 имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos 7x dx = -\frac{1}{6}\sin\frac{5\pi}{2} = -\frac{1}{6}.$$

11.4. Теоремы об оценке определенного интеграла

1°. Если функция $f(x) \geq 0$ в промежутке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2°. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, причем $a < b$ и $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$.

3°. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, причем $a < b$, то справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4°. Теорема об оценке определенного интеграла. Если функция непрерывна и интегрируема в промежутке $[a,b]$, причем $a < b$, и если во всем этом промежутке выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

где m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

5°. Обобщенная теорема об оценке определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, а $\varphi(x) \geq 0$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

6°. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, то существует такая точка $c\in(a,b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Число $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ — называется средним значением функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

7°. Обобщенная теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, $\varphi(x)$ во всем промежутке не меняют знака $\varphi(x)\ge 0$ $(\varphi(x)\le 0)$ и выполняется неравенство $m\le f(x)\le M$, то существует такая точка $c\in(a,b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

8°. *Неравенство Коши-Буняковского.* Если квадраты функций $f^2(x)$ и $\varphi^2(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.1. Не вычисляя интегралов, **определить** их знак: а) $\int_{-2}^{1} x^3dx$; б) $\int_{-1}^{1} xe^x dx$; в) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x dx$.

Решение. а) Разобьем отрезок интегрирования на отрезки $[-2,-1]$ и $[-1,1]$. Поскольку подынтегральная функция нечетная, то на отрезке $[-1,1]$ интеграл равен нулю. На отрезке $[-2,-1]$ подынтегральная функция отрицательна, следовательно, интеграл имеет знак минус.

б) Поскольку подынтегральная функция на отрезке $[-1,1]$ положительна, то интеграл имеет знак плюс.

в) Так как логарифм при $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ отрицательный, то подынтегральная функция то же отрицательна, следовательно, интеграл имеет знак минус.

4.2. Не вычисляя интегралов, **выяснить**, какой из интегралов больше: а) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx$ или $\int_0^1 xdx$. б) $\int_0^1 x^2\cos^2 xdx$ или $\int_0^1 x\sin^2 xdx.$

Решение. а) Поскольку на отрзке $[0,1]$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{1+x^3} > x$, то $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx > \int_0^1 xdx.$

б) Поскольку на отрезке $[0,1]$ выполняется неравенство $x^2\cos^2 x < x\sin^2 x$, то $\int_0^1 x^2\cos^2 xdx < \int_0^1 x\sin^2 xdx.$

4.3. Оценить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3+2\cos\, x}}$.

Решение. При $0 \le x \le 2\pi$ имеем $1 \le 3+2\cos x \le 5$, т. е. $m = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $M = 1$. Поскольку $b-a=2\pi$, то по теореме **4°** имеем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{5}} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}} \le 2\pi.$$

4.4. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x(1+x^3)}dx$, пользуясь: а) обобщенной теоремой об оценке интеграла; б) неравенством Коши-Буняковского.

Решение. а) Пусть $\varphi(x)=\sqrt{x}$, а $f(x)=\sqrt{1+x^3}$. Найдем наибольшее и наименьшее значение $f(x)$ на $[0,1]$: $m=1$, $M=\sqrt{2}$.

По теореме 5° имеем $\int_0^1\sqrt{x}dx\le\int_0^1\sqrt{x(1+x^3)}dx\le\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}dx$,

откуда $\frac{2}{3}\le\int_0^1\sqrt{x(1+x^3)}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

б) Поскольку $f^2(x)=1+x^3$ и $\varphi^2(x)=x$ интегрируемы на $[0,1]$, то неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$\left|\int_0^1\sqrt{x(1+x^3)}dx\right|\le\left(\int_0^1(1+x^3)dx\int_0^1 xdx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(x+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

4.5. Найти средние значения функций на заданных промежутках: а) $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$; б) $\cos^3 x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. а) Находим, что $b-a=1$. Среднее значение функции (**6°**) на отрезке $[0,1]$ находим по формуле

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

б) Среднее значение функции равно

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)d\sin x=\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi}.$$

11.5. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, то она интегрируема и в промежутке $[a,x]$, где $x\in[a,b]$. Заменяя верхний предел b переменной x, получим выражение

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,$$

которое является функцией от x. Чтобы не смешивать переменную интегрирования с ее верхним пределом x, здесь она обозначена через t.

1°. Если функция непрерывна в точке $t=x$, где $x\in[a,b]$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x).$$

2°. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в любой точке x, принадлежащей промежутку $[a,b]$, и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a)\le t\le\psi(b)$, то справедливо равенство

$$\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right)'_x=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

5.1. Найти производные следующих функций:

а) $\Phi(x)=\int_0^x\frac{e^t}{t^2}dt$; б) $\Phi(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$.

Решение. а) Используя свойство (1°), находим

$$\Phi'(x)=\left(\int_0^x\frac{e^t}{t^2}dt\right)'_x=\frac{e^t}{x^2}.$$

б) Используя свойство (2°) и учитывая, что $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $\psi(x)=x^2$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\psi'(x)=2x$, находим

$$\Phi'(x)=\sin\sqrt{x}^2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin\sqrt{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{2x}\sin x-\sin\sqrt[4]{x}\right).$$

5.2. Найти точки экстремума функции

$$\Phi(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, \quad (x>0).$$

Решение. Находим производную от функции $\Phi(x)$ и приравниваем ее к нулю $\Phi'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; $\sin x=0$, отсюда $x=\pi k$, (k=0,1,2, ...).

5.3. Найти производные от интегралов: а) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \dfrac{dt}{\ln t}$; б) $\dfrac{d}{da}\int_a^b \sqrt{1-t^3}dt.$

Решение. а) Используя свойство (1°), имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\ln t}=\frac{1}{\ln x}.$$

б) Если изменить пределы интегрирования в определенном интеграле, то справедливы преобразования

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sqrt{1-t^3}dt=-\frac{d}{da}\int_b^a \sqrt{1-t^3}dt=-\sqrt{1-t^3}.$$

11.6. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются *несобственными.*

1°. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на интервале $[a,\infty[$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Несобственный интеграл существует или сходится, если существует конечный предел. Если несобственный интеграл конечного предела не имеет, то интеграл расходится.

Для других бесконечных интервалов несобственные интегралы выражаются аналогичным образом

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx; \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx. \tag{3}$$

С геометрической точки зрения определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Несобственный интеграл в этом смысле выражет площадь неограниченной области, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямой $x=a$.

2°. Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащей отрезку $[a,b]$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то интеграл от функции $f(x)$ называется *несобственным интегралом второго рода* и вычисляется по формуле

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \tag{4}$$

где ε — произвольная бесконечно малая величина.

Геометрически несобственный интеграл (4) есть сумма площадей двух фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$, вертикальной асимптотой $x=c$ и осью абсцисс.

При $c = a$ или $c = b$ несобственные интегралы равны

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx; \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

3°. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов.

1. Пусть при $a \le x < +\infty$ имеет место равенство $f(x) \le \varphi(x)$, тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_0^\infty f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^\infty f(x)dx$, следует расходимость $\int_0^\infty \varphi(x)dx$

2. Если при $a \le x < +\infty$ существует конечный предел $\lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \quad (0 \le k < +\infty)$, то интегралы $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если при $x \to \infty$ функция $f(x) > 0$ имеет вид $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$, то при $\alpha > 1$ и $\varphi(x) \le c < +\infty$ интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, а при $\alpha \le 1$ и $\varphi(x) > c > 0$ расходится.

4. Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$, то тем более и сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$. Последний интеграл называется *абсолютно сходящимся*, а функция $f(x)$ — *абсолютно интегрируемой* в промежутке $[a, +\infty[$.

5. *Признак Абеля.* Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на отрезке $[a, \infty)$, причем функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, т. е. интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, а функция $\varphi(x)$ —

монотонна и ограничена $|\varphi(x)| \le L$ $(L - const,\ x \in [a, \infty))$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ сходится.

6. *Признак Дирихле*. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$ $(b > a)$, причем интеграл $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le L$ $(L$ — $const,\ a \le b < \infty)$ оказывается ограниченным, а функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ сходится.

7. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны.

Если для достаточно близких к c значений x функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(c-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, то при $\alpha < 1$ и $\varphi(x) \le L < +\infty$ $(L$ — $const)$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится $(a \le c \le b)$, при $\alpha \ge 1$ и $\varphi(x) \ge L > 0$ интеграл расходится.

6.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: а) $\int_1^\infty \dfrac{x^2dx}{1+x^6}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$; в) $\int_{-\infty}^0 xe^{-\frac{x}{2}}dx$; г) $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; д) $\int_9^\infty \dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. а) Преобразуем подынтегральное выражение и воспользуемся формулой (1)

$$\int_1^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx^3}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty} \operatorname{arctg} x^3\Big|_1^\beta =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}(\operatorname{arctg}\beta^3 - \operatorname{arctg}1) = \frac{\pi}{12}.$$

б) Разбиваем точкой $x=0$ промежуток интегрирования на два интервала, а интеграл на два несобственных интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_{0}^{\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\lim_{\beta\to-\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\lim_{\beta\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{\beta}^{0}+$$

$$+\lim_{\beta\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{0}^{\beta}=\lim_{\beta\to-\infty}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(\beta+1))+$$

$$+\lim_{\beta\to\infty}(\operatorname{arctg}(\beta+1)-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

в) Представим несобственный интеграл с помощью предельного перехода в виде определенного и воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая $x=u$, $e^{-\frac{x}{2}}dx=dv$; $dx=du$, $v=-2e^{-\frac{x}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{0}xe^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0}xe^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{\beta\to-\infty}\left(-2xe^{-\frac{x}{2}}+2\int_{\beta}^{0}e^{-\frac{x}{2}}dx\right)=$$

$$=-2\lim_{\beta\to-\infty}(x+2)e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{\beta}^{0}=-2\lim_{\beta\to-\infty}\left(2-(\beta+2)e^{-\frac{\beta}{2}}\right)=-\infty.$$

Интеграл расходится.

г) Перейдем к новой переменной $x=t^2$; $dx=2tdt$. При $x=1$, $t=1$, при $x=\infty$, $t=\infty$ и интеграл примет вид

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=\int_{1}^{\infty}\frac{2tdt}{t(1+t^2)}=2\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}.$$

С помощью предельного перехода приводим интеграл к определенному интегралу и вычисляем значение предела

$$2\int_1^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=2\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dt}{1+t^2}=2\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_1^{\beta}=$$

$$=2\lim_{\beta\to\infty}(\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}1)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

д) Сделаем следующие преобразования

$$\int_9^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{\beta\to\infty}\int_9^{\beta}\ln^{-3}x d\ln x=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\Bigg|_9^{\beta}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2\beta}-\frac{1}{\ln^2 9}\right)=\frac{1}{2\ln^2 9}=\frac{1}{8\ln^2 3}.$$

6.2. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; б) $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int_0^1\frac{dx}{x^3-3x^2}$; г) $\int_0^2\frac{dx}{x^2-6x+5}$.

Решение. а) Поскольку в точке $x=1$, принадлжащей промежтку интегрирования, функция терпит разрыв, то интеграл относится к несобственным интегралам второго рода и вычисляется по формуле (4)

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{2}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=3\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt[3]{1-\varepsilon-1}-\sqrt[3]{-2})+$$

$$+3\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{1+\varepsilon-1})=3(\sqrt[3]{2}+1).$$

б) Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=1$, т. е. на конце промежутка [1,2]. Следовательно, интеграл относится к несобственным интегралам второго рода и вычисляется

$$\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\ln\ln 2-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon)=\ln\ln 2+\infty=\infty.$$

в) При $x=0$ подынтегральная функция обращается в бесконечность, во всех остальных точках промежутка $[0,1]$ она непрерывна. Следовательно, имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3-3x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2(x-3)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\left(-\frac{1}{9x}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9(x-3)}\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{9}\ln x+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{9}\ln|x-3|\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}\ln 2 -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{9}\ln\varepsilon+\frac{1}{9}\ln|\varepsilon-3|\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon+1)-\frac{1}{3}\ln 3\right)=-\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[0,2]$ за исключением точки $x=1$, в которой она терпит разрыв. Следовательно,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-3)^2-4}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{(x-3)^2-4}.$$

Первый интеграл равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-3)^2-4}=\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{\varepsilon+4}{\varepsilon}-\ln 5\right)=\infty$$

и представляет неограниченную площадь криволинейной трапеции (рис. 11.1), ограниченную осью y, кривой $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}>0$ на данном промежутке, осью абсцисс и вертикальной асимптотой $x=1$.

Второй интеграл равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{(x-3)^2-4}=\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^2=\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 3-\ln\left|\frac{\varepsilon-4}{\varepsilon}\right|\right)=-\infty$$

и представляет неограниченную площадь криволинейной трапеции (рис. 11.1), ограниченную осью x, прямой $x = 2$, вертикальной асимптотой $x = 1$ и функцией $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5} < 0$ на данном промежутке.

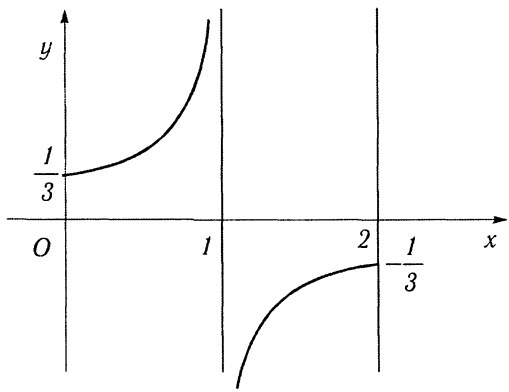


Рис. 11.1

Данный интеграл представляет два расходящихся интеграла,т. е. расходится.

6.3. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{1 + 3x^2 + x^6}$;

б) $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; в) $\int_a^{\infty} \dfrac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \quad (\alpha > 0)$; г) $\int_1^{\infty} \dfrac{2x^2 + \sqrt{(x-1)^3}}{3x^3 + \sqrt[3]{x^4} + 2} dx$;

д) $\int_0^{\infty} e^{\sin x} \dfrac{\sin 2x}{x^{\alpha}} dx \quad (\alpha > 0)$.

Решение.а) Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x^2 + x^6}$ в промежутке интегрирования меньше, чем $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^6}$. Так как $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^6}$ сходится,то данный интеграл тем более сходится.

б) Разобъем промежуток интегрирования

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_1^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Первый интеграл в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-\frac{x^2}{2}} \le e^{-\frac{x}{2}}$ при $x \ge 1$, а

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\lim_{\beta\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\Bigg|_1^{\beta} = -2\lim_{\beta\to\infty}\left(e^{-\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

в) Пользуясь признаком Дирихле, полагаем $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Поскольку $\left|\int_a^b \sin x dx\right| = \left|\cos a - \cos b\right| \le 2$ $(a \le b < \infty)$ и функция $\frac{1}{x^{\alpha}}$, монотонно убывая, стремится к нулю при $x \to \infty$, то интеграл $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ при $\alpha > 0$ сходится.

г) Сравним подынтегральную функцию $f(x) = \frac{2x^2 + \sqrt{(x-1)^3}}{3x^3 + \sqrt[3]{x^4} + 2}$ с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Найдем предел их отношения

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x\sqrt{(x-1)^3}}{3x^3 + \sqrt[3]{x^4} + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \sqrt{\left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{x^{4/3}}\right)^3}}{3 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{2}{3}.$$

Поскольку $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то на основании второго признака сходимости несобственных интегралов расходится и данный интеграл.

д) Пользуясь признаком Дирихле, полагаем $f(x)=e^{\sin x}\sin 2x$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Функция $\dfrac{1}{x^{\alpha}}\to 0$ при $x\to\infty$, монотонно убывая. Делая замену $t=\sin x$, $|x=0,\ t=0;\ x=b,\ t=\sin b|$, получим $\left|\int_0^b e^{\sin x}\sin 2x dx\right|=2\left|\int_0^{\sin b} te^t dt\right|$.

Интегрируя по частям, будем иметь

$$2\left|\int_0^{\sin b} te^t dt\right|=2\left|e^t(t-1)\right|_0^{\sin\, b}<2e,$$

т. е. интеграл от функции $f(x)$ ограничен.

Поскольку условия признака Дирихле выполнены, то данный интеграл сходится.

6.4. Исследовать сходимость интегралов: а) $\int_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$; б) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\ln x}$; в) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$; д) $\int_0^{\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1}dx$.

Решение. а) В точке $x=1$ подынтегральная функция имеет разрыв, т. е. обращается в бесконечность. Разложим подкоренное выражение на множители

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}.$$

Отсюда, при $x\to 1$ будем иметь $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Так как интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{\beta\to 1}\int_\beta^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=2\lim_{\beta\to 1}\sqrt{x-1}\Big|_\beta^2=2$$

сходится, то данный интеграл также сходится.

б) В точке $x=1$ подынтегральная функция имеет разрыв. Найдем предел отношения подынтегральной функции и функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$$

Поскольку порядок подынтегральной функции по отношению к функции $\dfrac{1}{x-1}$ равен единице ($\alpha=1$), то данный интеграл расходится.

в) В точке $x=0$ подынтегральная функция имеет разрыв. Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2,$$

то порядок подынтегральной функции относительно $\dfrac{1}{x}$ равен $\alpha=\dfrac{2}{3}<1$. Следовательно, данный интеграл сходится.

г) В точке $x=0$ подынтегральная функция имеет разрыв. Воспользуемся интегрированием по частям. Полагая $u=\ln\sin x$, $dv=dx$; $du=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$, $v=x$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\operatorname{tg}x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=0$, то последний интеграл является собственным. Следовательно, данный интеграл сходится.

д) Представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx.$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и воспользуемся свойствами определенного интеграла, тогда получим

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx = -\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\frac{dt}{t^2} = \int_1^0 \frac{\ln t dt}{t^2+1} = -\int_0^1 \frac{\ln t dt}{t^2+1} = -\int_0^1 \frac{\ln x dx}{x^2+1}.$$

Отсюда следует сходимость и данного интеграла.

Глава 12
ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

12.1. Общая схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин

Определенный интеграл широко используется для вычисления различных геометрических и физических величин. Рассмотрим общую схему применения определенного интеграла к вычислению некоторой величины u в заданных пределах или на отрезке $[a,b]$.

1°. а) Заданный отрезок разделим на n промежутков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и найдем длину каждого из этих частичных промежутков

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_1,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

б) Выберем в каждом из этих промежутков произвольную точку ξ_k так, что $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, определим соответствующее значение функции в этой точке $f(\xi_k)$ и представим приближенное значение каждого элемента Δu_k в виде произведения $\Delta u_k \simeq f(\xi_k)\Delta x_k$.

в) Составим сумму таких произведений по всем промежуткам заданного отрезка

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ \dots \ + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \,.$$

Выражаемая этой суммой величина будет тем ближе к истинному значению u, чем меньше каждый из промежутков Δx_k.

г) Истинная величина u определяется пределом, к которому стремится указанная сумма, при условии, что каждый из промежутков $\Delta x_k \to 0$, т. е.

$$u = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

В предложенной схеме определенный интеграл рассматривается как предел интегральной суммы.

2°. Некоторые величины целесообразнее вычислять посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой.

а) Пусть некоторая часть искомой величины u есть неизвестная функция Δu от переменной x, которая изменяется в известном из условия задачи интервале $x \in [a,b]$.

б) Представим дифференциал функции du в виде произведения $du = f(x)dx$, где $f(x)$ — заданная из условия задачи функция от x.

в) Поскольку дифференциал функции du при $dx \to 0$ и приращение Δu есть бесконечно малые величины одного порядка малости, то искомая величина u находится интегрированием du в пределах от $x = a$ до $x = b$, т. е.

$$u = \int_a^b f(x)dx$$

1.1. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$: а) рассматривая определенный интеграл как предел интегральной суммы; б) посредством дифференциала искомой площади.

Решение. а) Разобъем отрезок интегрирования $[0,1]$ на n равных частей точками деления с абсциссами $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ \dots, \ \frac{n-1}{n}, 1$ и выберем из полученных n частичных отрезков правые концы, т. е. $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ... , $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, $x_n = 1$. Длина каждого из этих частичных промежутков равна $\Delta x_k = \frac{1}{n}$.

Так как $y = x^2$, то

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(x_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, f(x_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

и приближенное значение каждого элемента ΔS_k выразится в виде произведения

$$\Delta S_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{k^2}{n^3}.$$

Составим сумму таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \dots \ + n^2).$$

Пользуясь формулой суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Искомая площадь определяется пределом при $\Delta x_k \to 0$, т. е. при $n \to \infty$

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

б) Для криволинейного треугольника, прилежащего к оси Ox (рис. 12.1) дифференциал переменной площади $S(x)=S_{OMx}$ есть площадь прямоугольника со сторонами y и dx, т. е. $dS = ydx$.

Подставляя сюда значение функции и интегрируя в заданных пределах $a=0$, $b=1$, получим

$$S=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$$

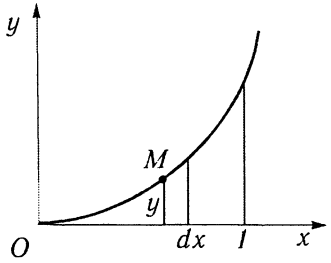


Рис. 12.1

12.2. Площадь плоской фигуры

Площадь всякой плоской фигуры в декартовой системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или Oy.

1°. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 12.2), прилежащей к оси Ox находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx. \qquad (1)$$

2°. Площадь криволинейной трапеции $cCDd$ (рис. 12.3), прилежащей к оси Oy находится по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d xdy. \qquad (2)$$

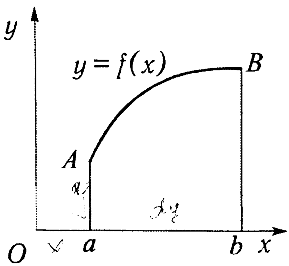


Рис. 12.2

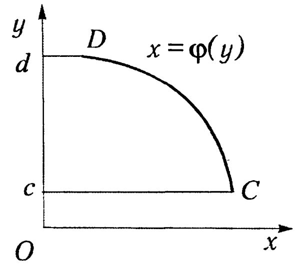


Рис. 12.3

3°. Если фигура образована пересечением кривых так, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее границы не более чем в двух точках (рис. 12.4), то ее площадь равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций и определяется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_a^b (y_2 - y_1)dx. \qquad (3)$$

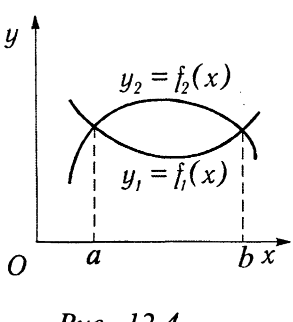


Рис. 12.4

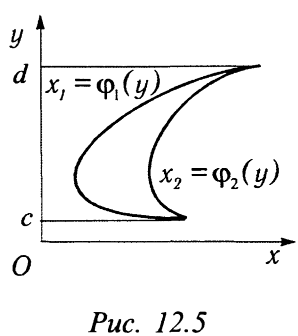


Рис. 12.5

Если фигура образована пересечением кривых так, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает ее границы не более, чем в двух точках (рис. 12.5), то ее площадь определяется по формуле

$$S=\int_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy=\int_c^d(x_2-x_1)dy. \qquad (4)$$

4°. Площадь всякой плоской фигуры в полярной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных секторов.

Площадь криволинейного сектора OAB (рис. 12.6) находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

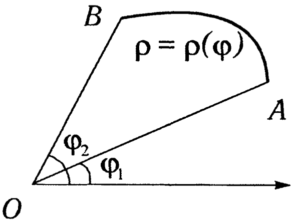


Рис. 12.6

5°. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$, определяется по формуле

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (6)$$

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x+2$, $y^2=9x$; б) $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$; в) $x=\frac{1}{2}y^2$, осью ординат и прямыми $y=1$, $y=-3$; г) $y=x^2$, $y^2=-x$;

д) $y=x^2, y=x^3, x=\pm 1$; е) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой; ж) $y^2=x(x-a)^2$.

Решение. а) Построим графики (рис. 12.7) и найдем точки пересечения этих линий. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y=x+2; \\ y^2=9x. \end{cases}$$

Откуда $(x+2)^2=9x$ или $x^2-5x+4=0$. Точки пересечения $x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$; $x_1=4$; $x_2=1$.

Применяя формулу (3), будем иметь

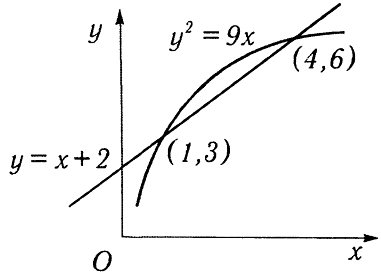


Рис. 12.7

$$S=\int_1^4[\sqrt{9x}-(x+2)]dx=3\int_1^4\sqrt{x}dx-\int_1^4(x+2)dx=\left(3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^4=2\cdot 8-8-8-2+\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}.$$

б) Построим графики (рис. 12.8) и найдем координаты точки A пересечения гиперболы и параболы, решая их уравнения совместно; $A(1,1)$. Поскольку криволинейная трапеция сверху ограничена различными кривыми, то разбивая промежуток интегрирования на два промежутка и пользуясь формулой (1), получим

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^4 \frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^4 = \frac{2}{3} + \ln 4 - \ln 1 = \frac{2}{3} + 2\ln 2.$$

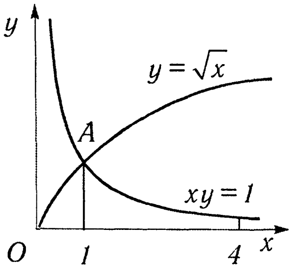


Рис. 12.8

в) Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 12.9) находим по формуле (2)

$$S = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} y^2 dy = \frac{1}{6}y^3\Big|_{-3}^{1} = \frac{1}{6}(1+27) = \frac{14}{3}.$$

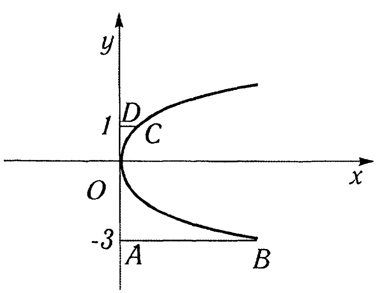


Рис. 12.9

г) Построим графики (рис. 12.10) и из решения системы: $y = x^2$, $y^2 = -x$ найдем точки пересечения этих линий (0,0), $(-1,1)$. Применяя формулу (3), получим

$$S = \int_{-1}^{0}(\sqrt{-x} - x^2)dx = \left(-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

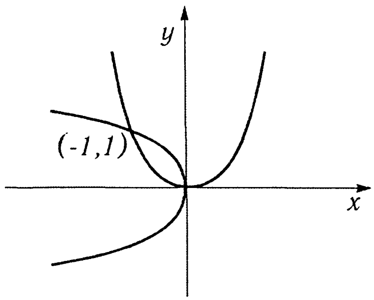


Рис. 12.10

д) Сделаем чертеж (рис. 12.11). Пределы интегрирования даны по условию. Искомая площадь будет

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

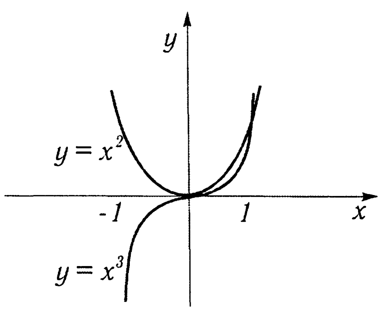


Рис. 12.11

е) Функция нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Найдем ее асимптоту

$$y = kx + b: \ k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \ b = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

таким образом, асимптотой будет прямая $y = 0$, т. е. ось Ox (рис. 12.12).

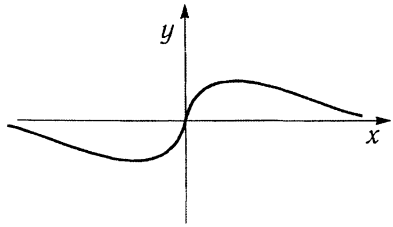


Рис. 12.12

Вследствие симметрии, достаточно найти половину площади

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{\beta\to\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^{\beta}=-\lim_{\beta\to\infty}(e^{-\frac{\beta^2}{2}}-1)=1,\quad S=2.$$

ж) Функция четная относительно переменной y, следовательно, фигура, ограниченная заданной кривой, симметрична относительно оси Ox (рис. 12.13).

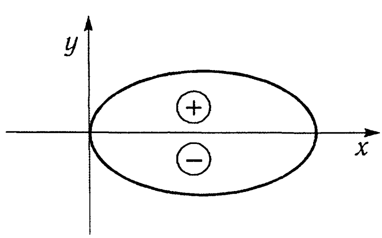


Рис. 12.13

Найдем точки пересечения с осью Ox. Полагая $y=0$, будем иметь $x=0$, $x=a$, следовательно, x изменяется от 0 до a.

Половину площади найдем по формуле (1)

$$\frac{1}{2}S=\int_0^a\sqrt{x}(x-a)dx=\int_0^a\left(x^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^a=-\frac{4}{15}a\sqrt{a}.$$

Знак минус означает, что фигура расположена ниже оси Ox. Это, кстати, следует даже из того, что подынтегральная функция на промежутке интегрирования отрицательна $\sqrt{x}(x-a)\le 0$ при $x\in[0,a]$. Следовательно, найденный результат надо взять с противоположным знаком. Таким образом, вся площадь будет равна $S=\dfrac{8}{15}a\sqrt{a}$.

2.2. Найти площадь, ограниченную: а) эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; б) одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью x; в) астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; г) кривой $x=2(t^2-1)$, $y=t(4-t^2)$.

Решение. а) Оси координат делят эллипс на четыре одинаковые части (рис. 3.32). Найдем площадь, расположенную в первом квадранте

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a ydx.$$

Поскольку эллипс задан уравнениями в параметрическом виде, то преобразуем интеграл к переменной t. При $x=0$, $t=\dfrac{\pi}{2}$, а при $x=a$, $t=0$. Таким образом

$$S=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin^2 tdt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

б) При $x=0$, $t=0$; при $y=0$, $t=2\pi$ (рис. 3.67). По формуле (6) имеем

$$S=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

в) Оси координат делят астроиду на четыре одинаковые части (рис. 7.63). Найдем площадь, расположенную в первом квадранте. При $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; при $y = 0$, $t = 0$. Отсюда по формуле (6) вся площадь будет равна

$$S = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3a^2 \sin^3 t \cos^2 t \sin t dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left[\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2t) d \sin 2t \right] =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

г) Найдем точки пересечения кривой с осями координат. Если $x = 0$, то $t = \pm 1$; если $y = 0$, то $t = 0$, $t = \pm 2$. Отсюда получим следующие точки: при $t = -1$ $(0, -3)$, при $t = 1$ $(0, 3)$; при $t = 0$ $(-2, 0)$; при $t = \pm 2$ $(6, 0)$.

Если $t \in [-2, 0]$, то $y \le 0$; если $t \in [0, 2]$, то $y \ge 0$. Точка (6,0) является точкой самосопряжения кривой. Следоватльно, кривая имеет форму петли (рис. 12.14).

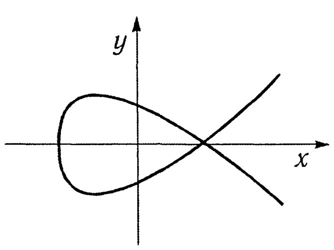


Рис. 12.14

Вследствие симметрии фигуры относительно оси x, достаточно найти половину площади; тогда вся площадь по формуле (6) будет равна

$$S = 2\int_0^2 t(4-t^2)4tdt = 8\int_0^2 (4t^2 - t^4)dt = 8\left(4\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512}{15}.$$

2.3. Найти площадь, ограниченную линиями: а) одним витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$; б) кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$; в) лемнискатой $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$; г) окружностями $\rho = a\cos\varphi$ и $\rho = \sqrt{3}a\sin\varphi$; д) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (декартов лист).

Решние. а) Один виток спирали Архимеда (рис. 3.58) описывается концом полярного радиуса при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. По формуле (5) находим

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

б) Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси (рис. 3.61), то достаточно найти половину ее площади, когда полярный угол φ изменяется от 0 до π. Отсюда по формуле (5) имеем

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi))d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

в) Лемниската симметрична относительно координатных осей и делится ими на четыре равные части (рис. 3.62). Если перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

Четвертой части площади соответствует изменение полярного угла от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$. Отсюда вся площадь по формуле (5) будет равна

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

г) Решая совместно уравнения окружностей, находим точку (рис. 12.15) их пересечения $A\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$. Искомая площадь равна сумме площадей двух сегментов OBA и OCA.

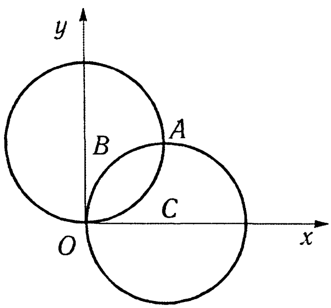


Рис. 12.15

Дуга OCA описывается концом полярного радиуса большой окружности при изменении полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$, следовательно

$$S_{OCA} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3a^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4} a^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{4} a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Дуга OBA описывается концом полярного радиуса меньшей окружности при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} a^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Таким образом, искомая площадь

$$S=S_{OCA}+S_{OBA}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right).$$

д) Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ в уравнении декартова листа, получим $\rho=\dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$. Так как петля кривой соответствует изменению полярного угла φ от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 12.16), то площадь будет равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi.$$

Деля числитель и знаменатель на $\cos^6\varphi$, получим

$$S=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi d\operatorname{tg}\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=-\frac{3}{2}a^2\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{2}.$$

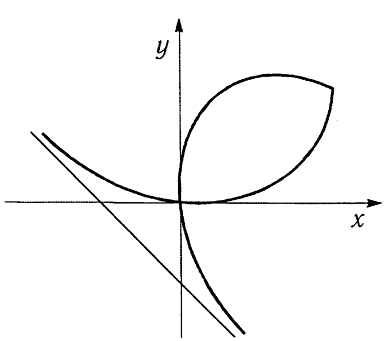


Рис. 12.16

12.3. Объем тела

1°. Объем тела по площадям его параллельных сечений. Пусть известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью перпендикулярной оси x (рис. 12.17). Если x — расстояние сечения от начала координат, то при изменении x на величину dx дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой dx и площадью основания $S(x)$, т. е. $dV = S(x)dx$. Объем всего тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)dx, \tag{1}$$

где a, b — левая и правая границы тела

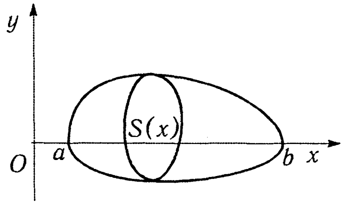


Рис. 12.17

2°. Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 12.18), то любое его сечение, перпендикулярное к оси Ox, будет круг, площадь которого равна πy^2. Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{2}$$

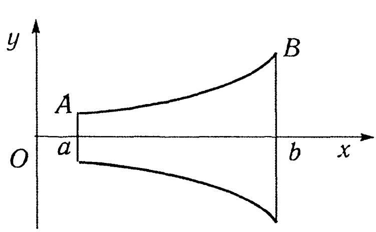


Рис. 12.18

Если тело образуется вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy (рис. 12.3), то объем тела находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy, \qquad (3)$$

где c и d — ординаты границ тела.

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 12.2), то элемент объема равен объему тела, образованного вращением вокруг оси Oy прямоугольника со сторонами y и dx и отстоящего от оси Oy на расстоянии x. Объем тела вращения в этом случае равен

$$V = 2\pi \int_a^b xydx. \qquad (4)$$

В более общих случаях объемы тел, образованных вращением криволинейных трапеций, ограниченных кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, если $f_1(x) < f_2(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг координатных осей Ox, Oy, соответственно равны

$$V_x = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx \quad \text{и} \quad V_y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)dx. \qquad (5)$$

Если кривая задана параметрически, то, в приведенных формулах вычисления объема тел вращения, следует сделать соответствующую замену переменной интегрирования.

3°. Если криволинейный сектор вращается вокруг полярной оси и ограничен кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$, то объем тела вращения определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi d\varphi. \qquad (6)$$

3.1. Найти объем трехосного эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. В сечении плоскости, перпендикулярной к оси y и отстоящей от начала координат на расстоянии l, будет эллипс (рис. 12.19).

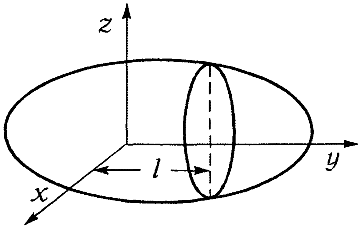


Рис. 12.19

Подставляя вместо y в уравнение эллипсоида l, находим уравнение проекции эллипса на плоскость xz

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)}=1.$$

Полуоси эллипса будут, соответственно, $a\sqrt{1-\frac{l^2}{b^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{l^2}{b^2}}$, а его площадь (см. 2.2, а) в функции переменной l равна $S(l)=\pi ac\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)$.

Таким образом, по формуле (1) искомый объем равен

$$V=\pi ac\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)dl=\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}(b^2-l^2)dl=\frac{\pi ac}{b^2}\left(b^2l-\frac{l^3}{3}\right)\Bigg|_{-b}^{b}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

3.2. Два круговых цилиндра радиуса r пересекаются под прямым углом. **Найти** объем тела, ограниченного этими цилиндрами.

Решение. На рис. 12.20 показана восьмая часть интересующего нас объема. В сечении искомого тела плоскостью, проведенной на расстоянии y от начала координат перпендикулярно к оси Oy, получается квадрат $ABCD$. Из треугольника ABO сторона квадрата равна $AB = \sqrt{r^2 - y^2}$. Площадь квадрата в функции y будет $S(y) = r^2 - y^2$. Отсюда, по формуле (1) имеем

$$V = 8\int_0^r (r^2 - y^2)dy = 8\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \frac{16}{3}r^3.$$

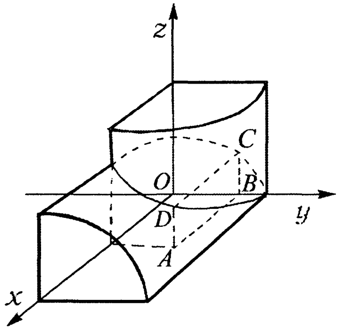


Рис. 12.20

3.3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = xe^x$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 12.21) и воспользуемся формулой (2), тогда

$$V = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Интегрируя дважды по частям, получим

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int_0^1 xe^{2x}dx\right) = \pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \int_0^1 e^{2x}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1).$$

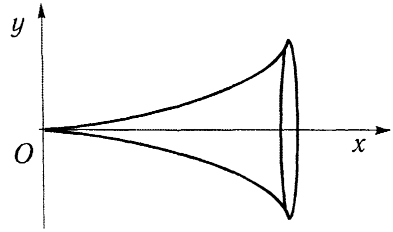


Рис. 12.21

3.4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 4x$ и прямыми $x = 0$ и $y = 4$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 12.22) и воспользуемся формулой (3), тогда

$$V = \pi\int_0^4 4x dx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi.$$

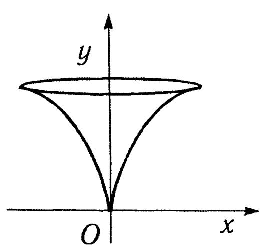


Рис. 12.22

3.5. Найти объем кольца (тора), образованного вращением окружности $x^2 + (y - 4)^2 = 9$ вокруг оси Ox.

Решение. Центр окружности сдвинут на четыре единицы вверх, а радиус окружности равен $R = 3$ (рис. 12.23). Решая уравнение окружности относительно y, находим уравнение верхней и нижней дуги полуокружности $y_{1,2}=4\pm\sqrt{9-x^2}$. Объем тора представим как разность тел вращения, ограниченных этими окружностями. Учитывая симметрию относительно оси Oy, будем иметь

$$V=2\pi\int_0^3(y_1^2-y_2^2)dx=2\pi\int_0^3(25-x^2+8\sqrt{9-x^2}-$$

$$-25+8\sqrt{9-x^2}+x^2)dx=16\pi\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

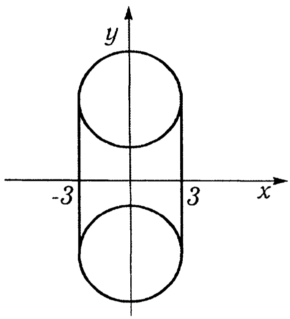


Рис. 12.23

Сделаем замену: $x=3\sin t$, $dx=3\cos t dt$; при $x=0$, $t=0$; при $x=3$, $t=\frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$V=16\pi\int_0^{\pi/2}9\cos^2 t dt=72\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=72\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=36\pi^2.$$

3.6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуокружностью $x^2+y^2=1$ (при $x\geq 0$) и параболой $y^2=\frac{3}{2}x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 12.24) и из решения системы

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{3}{2}x; \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

найдем абсциссу точки пересечения кривых: $2x^2 + 3x - 2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

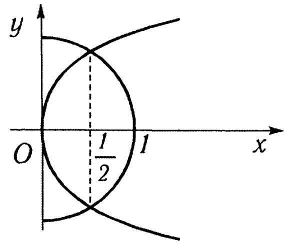


Рис. 12.24

Поскольку криволинейная трапеция, которая вращается вокруг оси Ox, ограничена различными кривыми, то, вычисляя объем тела вращения по формуле (2), представим его в виде суммы двух интегралов

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \pi \frac{3}{2} \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{3}{2} \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \frac{19}{48} \pi.$$

3.7. Доказать, что объем параболоида вращения равен половине объема кругового цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту.

Решение. Считаем, что параболоид образован вращением параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox, причем сечение возьмем в произвольной точке с абсциссой x (рис. 12.25). Тогда его объем равен

$$V_n = \pi \int_0^x 2pxdx = \pi p x^2 \Big|_0^x = \pi px^2.$$

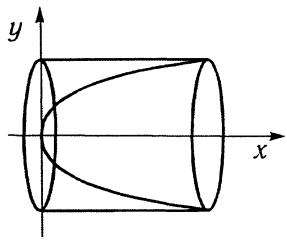


Рис. 12.25

Объем цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту, равен $V_ц = \pi y^2 x$. Поскольку $y^2 = 2px$, то $V_ц = 2\pi px^2$.

Сравнивая результаты, получим $V_ц = 2V_n$, что и требовалось доказать.

3.8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos x$ и $y = -1$ вокруг прямой $y = -1$ при $-\pi \le x \le -\pi$.

Решение. Тело, образованное вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, показано на рис. 12.26.

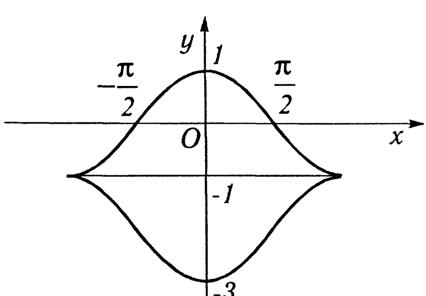


Рис. 12.26

Поскольку кривая вращается вокруг прямой $y = -1$, то целесообразно перейти к новой системе координат

$x' = x$; $y' = y + 1$. Тогда объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (y')^2 dx' = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (y+1) dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos 2x + 2\cos x \right) dx = \pi \frac{3}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 3\pi^2.$$

3.9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси: а) кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$; б) лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Решение. а) Очевидно, что φ изменяется от 0 до π (рис. 3.61). Отсюда по формуле (6) имеем

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} a^3 (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^3 d(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^3 (1 - \cos\varphi)^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

б) Так как лемниската симметрична относительно начала координат (рис. 3.62), то половина объема по формуле (6) равна

$$\frac{1}{2} V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/4} a^3 (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/4} (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi.$$

Сделаем замену: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin t}$, $\sin\varphi d\varphi = \dfrac{\cos t dt}{\sqrt{2}\sin^2 t}$; при $\varphi = 0$, $t = \dfrac{\pi}{4}$; при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$V = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t dt}{\sin^2 t} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t \right) dt =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \left(-\operatorname{ctg} t - 2t + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right) \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3 \left(5 - \frac{3\pi}{2} \right).$$

3.10. Найти объем тела, образованного вращением: а) одной ветви циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox; б) фигуры, ограниченной кривой $x = 3t^2$, $y = 2\ln t$ и осями координат, вокруг координатных осей; в) астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $x = a$.

Решение. а) Одна ветвь циклоиды получается при изменении t от 0 до 2π, а x от 0 до $2\pi a$ (рис. 3.67). Следовательно, искомый объем равен

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx.$$

Используя параметрические уравнения циклоиды, получим

$$V = \pi a^3\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - \right.$$

$$\left. -(1-\sin^2 t)\cos t\right)dt = \pi a^3\left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

б) Фигура, ограниченная заданной кривой и осями координат, показана на рис. 12.27, где $t \in]0,1]$. Объем тела вращения вокруг оси Ox находим по формуле

$$V = \pi\int_0^3 y^2 dx \quad \text{или} \quad V = 24\pi\int_0^1 t\ln^2 t dt.$$

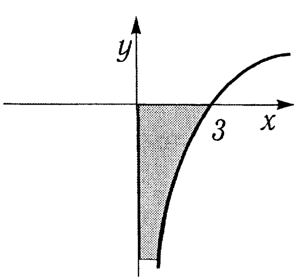


Рис. 12.27

При $t=0$ подынтегральная функция терпит разрыв. Интегрируя несобственный интеграл дважды по частям: $\ln^2 t = u$, $2\frac{1}{t}\ln t dt = du$; $tdt = dv$, $v=\frac{t^2}{2}$, получим

$$V = 24\pi \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{t^2}{2}\ln^2 t\Big|_\beta^1 - \int_\beta^1 t\ln t dt\right) = 24\pi\left(-\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln^2\beta}{\dfrac{2}{\beta^2}}\right) +$$

$$+\lim_{\beta\to 0}\left(-\frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4}\right)\Bigg|_\beta^1 = 24\pi\left(-\lim_{\beta\to 0}\frac{\dfrac{2}{\beta}\ln\beta}{-\dfrac{4}{\beta^3}} + \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta^2}{2}\ln\beta + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 24\pi\left(\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln\beta}{\dfrac{1}{\beta^2}} + \frac{1}{4}\right) = 6\pi.$$

Объем тела вращения вокруг оси Oy находим по формуле (3). При $y=-\infty$, $t=0$; при $y=0$, $t=1$, отсюда

$$V = \pi\int_{-\infty}^0 x^2 dy = 9\pi\int_0^1 t^4\frac{dt}{t} = \frac{9}{4}\pi t^4\Big|_0^1 = \frac{9}{4}\pi.$$

в) Поскольку астроида симметрична относительно оси Ox, то достаточно найти половину объема тела вращения (рис. 12.28). Так как астроида вращается вокруг прямой $x=a$, то перенесем начало координат в точку $(a,0)$, тогда в новой системе координат $x' = x-a$, $y' = y$ формула для вычисления объема примет вид

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^a (x')^2 dy' = \pi\int_0^a (x-a)^2 dy.$$

Рассматривая только объем тела, получающийся от вращения вокруг прямой $x=a$ фигуры, ограниченной верхними ветвями астроиды, и переходя к переменной t, представим его как разность интегралов

$$V = 6\pi a^3 \left(\int_\pi^{\pi/2} (\cos^3 t - 1)^2 \sin^2 t \cos t dt - \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t - 1)^2 \sin^2 t \cos t dt\right) =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\int_\pi^{\pi/2} (2 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t) \sin^2 t d \sin t - 2\int_\pi^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2} (2 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t) \sin^2 t d \sin t + 2\int_\pi^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt\right) =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\left(\frac{2}{3}\sin^3 t - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{1}{9}\sin^9 t \right)\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$- \frac{1}{4}\int_\pi^{\pi/2} \left(1 + \cos 2t - \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) - (1 - \sin^2 2t)\cos 2t \right) dt -$$

$$- \left(\frac{2}{3}\sin^3 t - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{1}{9}\sin^9 t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos 2t - \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) - (1 - \sin^2 2t)\cos 2t \right) dt \right) =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) - \frac{1}{8} t \Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3}{4}\pi^2 a^3.$$

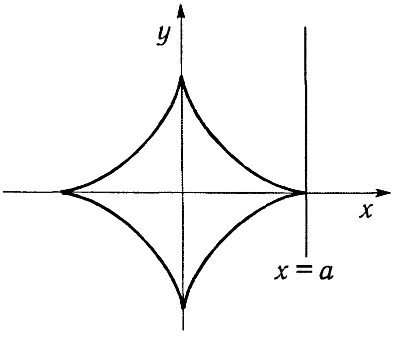


Рис. 12.28

12.4. Длина дуги кривой

1°. Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y = f(x)$ или $x = F(y)$, или параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то дифференциал dl длины ее дуги (рис. 12.29) определяется, соответственно, по формулам

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \qquad (1)$$

Интегрируя дифференциал дуги в заданных пределах, находим длину дуги

$$L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \qquad (2)$$

2°. Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 12.30), то дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$, а длина дуги определяется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (3)$$

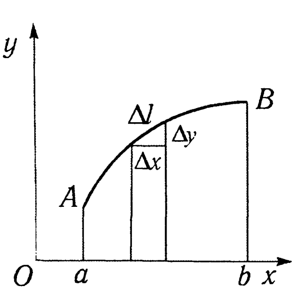


Рис. 12.29

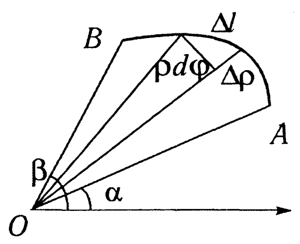


Рис. 12.30

3°. Длина дуги пространственной кривой, заданой параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при изменении t от α до β, определяется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{4}$$

4.1. Найти длину дуги: а) кривой $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$; б) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; в) кривой $y^2 = 9 - x$ между точками пересечения ее с осью Oy; г) полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6x$.

Решение. а) Применяя формулу (1), имеем

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + [(\ln\cos\ x)']^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}} \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\beta} = \lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}} \ln tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \infty.$$

б) Поскольку астроида симметрична относительно координатных осей (рис. 12.28), то достаточно найти длину одной ее ветви. Дифференцируя уравнение астроиды, имеем $y' = -(y/x)^{1/3}$. Длина одной четверти астроиды находится по формуле (2) и равна

$$\frac{1}{4}L = \int_0^a \sqrt{1 + (y/x)^{2/3}}\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx =$$

$$= \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3}\Big|_0^a = \frac{3}{2}a.$$

Отсюда длина всей астроиды $L = 6a$.

в) Кривая представляет параболу симметричную относительно оси Ox (рис. 12.31).

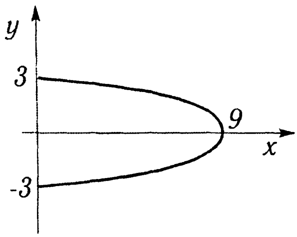


Рис. 12.31

Найдем точки пересечения с осью Oy: при $x=0$, $y=\pm 3$. Вследствие симметрии кривой относительно оси Ox достаточно найти половину длины заданной кривой. Используя формулу (1), будем иметь

$$\frac{1}{2}L=\int_0^3\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_0^3\sqrt{1+4y^2}\,dy.$$

Интегрируя по частям $\sqrt{1+4y^2}=u$, $dy=dv$; $du=\dfrac{4y\,dy}{\sqrt{1+4y^2}}$, $v=y$, получим

$$\frac{1}{2}L=y\sqrt{1+4y^2}\Big|_0^3-\int_0^3\sqrt{1+4y^2}\,dy+\int_0^3\frac{dy}{\sqrt{1+4y^2}}.$$

Отсюда

$$L=y\sqrt{1+4y^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2y+\sqrt{1+4y^2}\right|\Big|_0^3=3\sqrt{37}+\frac{1}{2}\ln(6+\sqrt{37}).$$

г) Сделаем чертеж (рис. 12.32) и найдем точки пересечения окружности и параболы.

Для этого решим систему $y^2=x^3$, $x^2-6x+y^2=0$. Абсциссы точек пересечения будут 0 и 2.

Вследствие симметрии достаточно найти половину длины дуги. По формуле (1) имеем

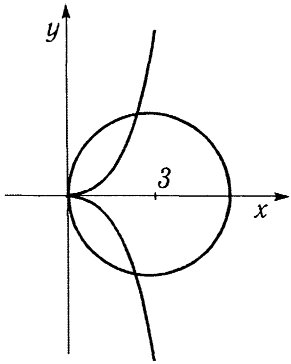


Рис. 12.32

$$\frac{1}{2}L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\frac{4}{9}\int_0^2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Таким образом, $L=\dfrac{16}{27}\left(\left(\dfrac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$

4.2. Найти длину дуги кривой: а) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ от точки $t_1=0$ до точки $t_2=2\pi$; б) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; в) $x=\dfrac{t^6}{6}$, $y=2-\dfrac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осями координат.

Решение. а) Заданная кривая представляет эвольвенту (развертку) окружности (рис. 12.33). Находим производные $\dot{x}=at\cos t$, $\dot{y}=at\sin t$. Длина дуги кривой находится по формуле (2)

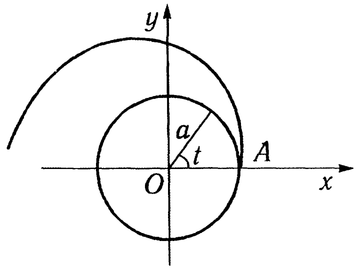


Рис. 12.33

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}t\,dt=\left.\frac{at^2}{2}\right|_0^{2\pi}=2a\pi^2.$$

б) Здесь t изменяется от 0 до 2π (рис. 3.67). Находим производные $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$. Длина одной арки циклоиды по формуле (2) равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\left.\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=8a.$$

в) Найдем пределы интегрирования: при $x=0$, $t=0$; при $y=0$, $t=\sqrt[4]{8}$. Вычисляя производные $\dot{x}=t^5$, $\dot{y}=-t^3$ и используя формулу (2), находим

$$L=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}(t^4+1)^{\frac{1}{2}}d(1+t^4)=$$

$$=\left.\frac{1}{6}(t^4+1)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{13}{3}.$$

4.3. Определить длину дуги кривой: а) первого витка спирали Архимеда $\rho=a\varphi$; б) кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$;

в) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$; г) логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$, находящейся внутри круга $\rho = a$.

Решение. а)Длина дуги первого витка ($0\le\varphi\le 2\pi$) спирали Архимеда (рис. 3.58) определяется по формуле (3) и равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\varphi)^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Интегрируя по частям $1+\varphi^2=u$, $d\varphi=dv$; $\varphi=v$, $du=\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, получим

$$L=a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right),$$

откуда

$$L=\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}=a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

б) Вследствие симметрии кардиоиды относительно полярной оси (рис. 3.61) достаточно вычислить половину ее длины. По формуле (3) имеем

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

в) Изменяя φ от 0 до 3π , получим кривую (рис. 12.34). Находим, что $\rho'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. Отсюда по формуле (3) имеем

$$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\varphi\right)\Big|_0^{3\pi}=\frac{3}{2}a\pi.$$

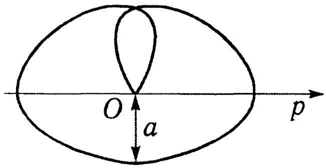


Рис. 12.34

г) При $\varphi = 0$ из уравнения логарифмической спирали находим, что $\rho = a$.

Следовательно, φ изменяется от $-\infty$ до 0. Представим логарифмическую спираль и круг $\rho = a$ на рис. 3.60. Находим производную $\rho' = ame^{m\varphi}$.

Длина дуги логарифмической спирали, находящейся внутри круга, по формуле (3) равна

$$L = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{a^2 e^{m\varphi} + m^2 a^2 e^{2m\varphi}}\, d\varphi = a\sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{0} e^{m\varphi} d\varphi =$$

$$= a\sqrt{1+m^2} \lim_{\beta\to-\infty} \frac{1}{m} \int_{\beta}^{0} e^{m\varphi} d(m\varphi) = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2} \lim_{\beta\to-\infty} e^{m\varphi}\Big|_{\beta}^{0} = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}.$$

4.4. Найти длину дуги пространственной кривой: а) одного витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$; б) $y = \frac{1}{2}\ln x$, $z = \frac{x^2}{2}$ от $x = 1$ до $x = 2$.

Решение. а) При изменении t от 0 до 2π получим один виток (рис. 4.20). Находим производные $\dot{x} = -a\sin t$, $\dot{y} = a\cos t$, $\dot{z} = c$. Длина дуги по формуле (4) будет равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}.$$

б) Запишем уравнение пространственной кривой в параметрическом виде. Пусть $x = t$, тогда $y = \frac{1}{2}\ln t$, $z = \frac{t^2}{2}$; при

$x=1$, $t=1$; при $x=2$, $t=2$. Найдем производные $\dot{x}=1$, $\dot{y}=\frac{1}{2}t$, $\dot{z}=t$ и воспользуемся формулой (4). Тогда

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4t^2}+t^2}\,dt=\int_1^2\frac{\sqrt{4t^4+4t^2+1}}{2t}\,dt=\int_1^2\left(t+\frac{1}{2t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+\ln t)\Big|_1^2=\frac{1}{2}(3+\ln 2).$$

12.5. Площадь поверхности вращения

Если поверхность образована вращением дуги AB плоской кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox (рис. 12.35), то площадь поверхности, образованная вращением дуги, определяется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b y\,dl=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (1)$$

При вращении дуги вокруг оси Oy (рис. 12.3) площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$S=2\pi\int_c^d x\,dl=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\,dy. \qquad (2)$$

Если дуга задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то площадь поверхности вращения вокруг оси Ox равна

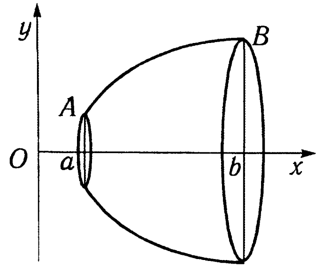


Рис. 12.35

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt. \qquad (3)$$

Если дуга кривой задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (4)$$

Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} R\,dl, \qquad (5)$$

где R — расстояние от произвольной точки кривой до оси вращения; dl — дифференциал дуги; a, b — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги. Здесь R и dl следует выразить через переменную интегрирования.

5.1. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ вокруг оси Ox от $x = 0$ до $x = a$; б) эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox и оси Oy; в) петли кривой $9ay^2 = x(3a - x)^2$ вокруг оси Ox и оси Oy.

Решение. а) Поверхность, образованная вращением дуги цепной линии вокруг оси Ox показана на рис. 12.36. Находим производную $y' = \mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$ и значение $\sqrt{1 + (y'_x)^2} = \mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$. Тогда по формуле (1) имеем

$$S = 2\pi \int_0^a a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \pi a \int_0^a \left(\mathrm{ch}\frac{2x}{a} + 1\right)dx =$$

$$= \pi a \left(\frac{a}{2}\mathrm{sh}\frac{2x}{a} + x\right)\Bigg|_0^a = \pi a^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2 + 1\right).$$

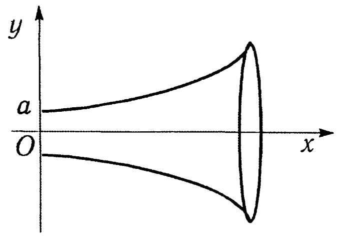


Рис. 12.36

б) Пусть эллипс вращается вокруг оси Ox, причем $a > b$, тогда $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $yy' = -\frac{b^2}{a^2}x$. Воспользуемся формулой (1) и найдем подынтегральную функцию

$$y\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{y^2+(yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^4} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2},$$

где $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = \varepsilon$ — эксцентриситет эллипса. Таким образом,

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = 4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx.$$

Интегрируя по частям: $\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} = u$, $dx = dv$; $\frac{-\varepsilon^2xdx}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}} = du$, $x = v$, имеем

$$S = 4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2} + a^2\arcsin\varepsilon\right) = 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Если эллипс вращается вокруг оси Oy, то пользуемся формулой (2): $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$, $xx'=-\frac{a^2}{b^2}y$,

$$x\sqrt{1+(x')^2}=\sqrt{x^2+(xx')^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{a^4}{b^4}y^2}=$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2},$$

$$S=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}\,dy.$$

Интегрируя по частям: $\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}=u$, $dy=dv$; $du=\dfrac{\frac{c^2}{b^2}ydy}{\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}}$, $v=y$, получим

$$S=2\pi\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2}y\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{a}y+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}\right)\right)\Bigg|_{-b}^{b}=$$

$$=2\pi a\left(\sqrt{b^2+c^2}\;\frac{b^2}{2c}\ln\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right).$$

Так как $b^2+c^2=a$, $c=\varepsilon a$, то окончательно имеем

$$S=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2\varepsilon a}\ln\frac{a+\varepsilon a}{a-\varepsilon a}\right)=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2\varepsilon a}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

в) Петля данной кривой описывается текущей точкой при изменении x то 0 до $3a$ (рис. 12.37). Дифференцируем уравнение кривой $18ayy' = (3a-x)^2 - 2x(3a-x)$, $\quad yy' = \dfrac{(3a-x)(a-x)}{6a}$. Для нахождения площади поверхности, образованной вращением петли вокруг оси Ox, преобразуем формулу (1)

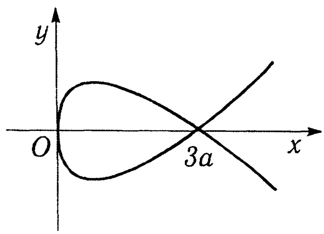


Рис. 12.37

$$S = 2\pi\int_0^{3a}\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx = 2\pi\int_0^{3a}\sqrt{\frac{x}{9a}(3a-x)^2+\frac{(3a-x)^2(a-x)^2}{36a^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a-x)\sqrt{a^2+2ax+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ax-x^2)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\left(3a^2x+ax^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3a} = 3\pi a^2.$$

5.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) астроиды $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$ вокруг оси Ox; б) одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $\quad y = a(1-\cos t)$ вокруг ее оси симметрии.

Решение. а) Вследствие симметрии астроиды относительно координатных осей, достаточно найти площадь поверхности, описанной дугой астроиды, лежащей в первом квадранте $(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$. Воспользуемся формулой (3). Вся площадь вращения будет равна

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t dt = \frac{2}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

б) При $y = 0,\ \cos t = 1,\ t = 0$ и $t = 2\pi$. Циклоида при $t = 2\pi$ имеет координату $x = 2\pi a$. Следовательно, ось симметрии (рис. 7.64) проходит через точку с координатами (πa,0). Воспользуемся формулой (5): $R = \pi a - a(t - \sin t) = a(\pi - t + \sin t)$,

$dl = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt =$
$= 2a\sin\dfrac{t}{2}dt$. Поверхность вращения образуется вращением половины арки циклоиды вокруг оси симметрии, т. е. переменная t изменяется от 0 до π.

Таким образом,

$$S = 4\pi a^2\int_0^{\pi}(\pi - t + \sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 4\pi a^2[2\pi\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2} - \int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}dt +$$

$$+4\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\sin\frac{t}{2}] = 8\pi a^2\left(-\pi\cos\frac{t}{2} + t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 8\pi a^2\left(\pi - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi a^2(3\pi - 4).$$

5.3. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) лемнискаты $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси; б) кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси и вокруг касательной в ее вершине ($2a$,0).

Решение. а) Вследствие симметрии лемнискаты относительно полярной оси достаточно найти половину поверхности вращения (рис. 12.13). Тогда по формуле (4) имеем

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\ a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{2a^2\cos 2\varphi + 2a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi = -8\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 8\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) Воспользуемся формулой (4). Пределы интегрирования $0\le\varphi\le\pi$ легко установить из рассмотрения рис. 3.64. Площадь поверхности равна

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = -16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= -\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

12.6. Вычисление статических моментов и моментов инерции

1°. Статическим моментом материальной точки массы m относительно оси l называется произведение ее массы на расстояние d от оси $m_l = md$.

Статическим моментом системы n материальных точек называется сумма произведений масс этих точек $m_1,\ m_2,\dots,m_n$ на расстояния их от оси $m_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$, причем расстояния точек, лежащих по разные стороны от оси l, берутся с разными знаками.

Если массы непрерывно заполняют линию $y = f(x)$, $a\le x\le b$, то статические моменты относительно осей выражаются интегралами

$$m_x = \int_a^b \delta(x) y dl = \int_a^b \delta(x) y \sqrt{1+(y')^2} dx;$$

$$m_y = \int_a^b \delta(x) x dl = \int_a^b \delta(x) x \sqrt{1+(y')^2} dx, \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ — плотность, dl — дифференциал дуги.

Статические моменты относительно координатных осей дуги кривой, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, выражаются формулами

$$m_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi,$$

$$m_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi, \qquad (2)$$

здесь плотность полагается равной единице.

Статические моменты плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, выражаются интегралами

$$m_x = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(M) y dS = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(M) y^2 dx;$$

$$m_y = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(M) x dS = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(M) x y dx; \qquad (3)$$

где $\delta(M)$ — плотность в точке M, $dS = ydx$ — дифференциал площади.

Для случая геометрических фигур плотность считается равной единице.

Статический момент тела относительно данной плоскости, если известны площади поперечных сечений тела параллельных этой плоскости $S(x)$ в функции расстояния x от нее, при плотности, равной единице, определяется интегрированием статического момента элементарного слоя тела на расстоянии x от плотности $dm = xS(x)dx$ в заданных пределах

$$m_{yz} = \int_a^b xS(x)dx. \quad (4)$$

Статический момент тела вращения относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения x, определяется по формуле

$$m_{yz} = \pi \int_a^b xy^2 dx. \quad (5)$$

Если поверхность образована вращением кривой $y = f(x)$ ($a \le x \le b$) вокруг оси Ox (рис. 12.38) и поверхностная плотность ее равна единице, то статический момент относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения, находится интегрированием элементарного кольцевого слоя $2\pi ydl$ в заданных пределах

$$m_{yz} = 2\pi \int_a^b xydl = 2\pi \int_a^b xy\sqrt{1+(y')^2}dx. \quad (6)$$

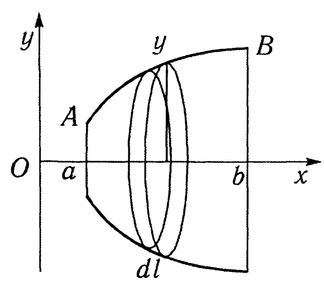


Рис. 12.38

Статические моменты относительно координатных плоскостей для цилиндрической поверхности $x = x(t)$, $y = y(t)$ с образующими параллельными оси z (рис. 12.39) и ограниченной сверху кривой $z = z(t)$ находятся по формулам

$$m_{yz} = \int_L xzdl; \quad m_{zx} = \int_L yzdl; \quad m_{xy} = \frac{1}{2}\int_L z^2 dl, \quad (7)$$

где $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$; L — проекция поверхности на плоскость xOy.

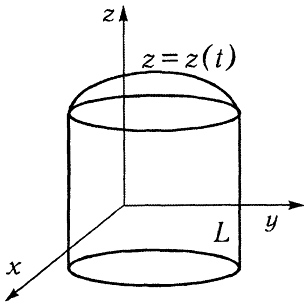


Рис. 12.39

2°. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение ее массы на квадрат расстояния d от оси $I_l = md^2$.

Моментом инерции системы n материальных точек называется сумма произведений масс этих точек $m_1,\ m_2, \ldots ,m_n$ на квадрат расстояния их от оси $I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$.

Моменты инерции относительно координатных осей плоской кривой $y = f(x)$ ($a \le x \le b$) вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b \delta(x) y^2 dl = \int_a^b \delta(x) y^2 \sqrt{1+(y')^2}\, dx;$$

$$I_y = \int_a^b \delta(x) x^2 dl = \int_a^b \delta(x) x^2 \sqrt{1+(y')^2}\, dx, \qquad (8)$$

где $\delta(\mathrm{x})$ — плотность, dl — дифференциал дуги.

Моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \delta(M) y^3 dx; \qquad I_y = \int_a^b \delta(M) x^2 y dx. \qquad (9)$$

Моменты инерции плоской фигуры (рис. 12.40), ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, относительно осей координат вычисляются по формулам

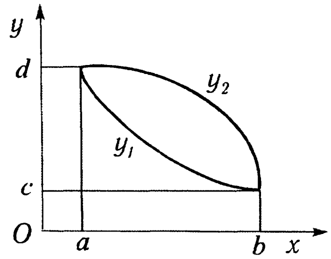


Рис. 12.40

$$I_x = \int_c^d \delta(M) y^2 \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right) dy;$$

$$I_y = \int_c^d \delta(M) x^2 \left(f_2(y) - f_1(y)\right) dx; \qquad (10)$$

здесь функции $\varphi_1(y) = x_1$, $\varphi_2(y) = x_2$ представляют уравнения заданных кривых, разрешенных относительно переменной x.

6.1. Найти статические моменты и моменты инерции относительно оси Ox дуги: а) кривой $y = e^x$ $(0 \le x \le 1)$; б) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первом квадранте, $\delta(x) = 1$; в) окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадранте, если в каждой ее точке плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение. а) Статический момент относительно оси Ox находим по первой из формул (1), полагая плотность равной единице

$$m_x = \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Делая замену $t = e^x$, $dt = e^x dx$, получим $m_x = \int_1^e \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

Интегрируя по частям: $u=\sqrt{1+t^2}$, $dv=dt$; $du=\dfrac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}$, $t=v$, будем иметь

$$m_x=t\sqrt{1+t^2}-\int_1^e\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$m_x=\int_1^e\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2}))\Big|_1^e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

По первой из формул (8) находим момент инерции относительно оси Ox

$$I_x=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+e^{2x})^{1/2}d(1+e^{2x})=$$

$$=\frac{1}{3}(1+e^{2x})^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}((1+e^2)^{3/2}-2\sqrt{2}).$$

б) Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

При нахождении статического момента относительно оси Ox воспользуемся формулами (1), для этого вычислим дифференциал дуги

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt=3a\sin t\cos tdt,$$

$$m_x=\int_0^{\pi/2}ydl=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sin t\cos tdt=\frac{3a^2}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{5}a^2.$$

Момент инерции по формулам (8) равен

$$I_x=\int_0^{\pi/2}y^2dl=3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\sin t\cos tdt=\frac{3a^3}{8}\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{8}a^3.$$

Следует заметить, что в силу симметрии астроиды относительно координатных осей $m_x = m_y = \frac{3}{5}a^2$ и $I_x = I_y = \frac{3}{8}a^3$.

в) Статический момент и момент инерции находим по формулам (1) и (8).

Дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, где y' находим из дифференцирования уравнения окружности $2x + 2yy' = 0,\ y' = -\frac{x}{y}$.

Окончательно

$$dl = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx = \frac{1}{y}\sqrt{y^2+x^2}\,dx = \frac{a}{y}dx.$$

Таким образом,

$$m_x = \int_0^a kxy\cdot y\frac{a}{y}dx = ka\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{ka}{2}\int_0^a (a^2-x^2)^{1/2}d(a^2-x^2) =$$

$$= -\frac{ka}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{ka^4}{3}.$$

$$I_x = \int_0^a kxy\cdot y^2\frac{a}{y}dx = ka\int_0^a xy^2dx = ka\int_0^a x(a^2-x^2)dx =$$

$$= ka\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{4}.$$

Здесь k — коэффициет пропорциональности.

6.2. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно ее диаметра.

Решение. Расположим декартову систему координат таким образом, чтобы ось Ox совпала с диаметром, а начало координат с центром окружности. В этом случае уравнение окружности в параметрической форме примет вид: $x = a\cos t,\quad y = a\sin t$.

Тогда дифференциал дуги будет $dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}dt = adt$. Воспользовавшись формулами (1) и (8), получим

$$m_x = \int_0^\pi ydl = a^2 \int_0^\pi \sin tdt = 2a^2, \quad I_x = \int_0^\pi y^2 dl = a^3 \int_0^\pi \sin^2 tdt = \frac{1}{2}\pi a^3.$$

6.3. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги окружности $\rho = 2a \sin\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулами (2). Поскольку $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{4a^2 \sin^2\varphi + 4a^2 \cos^2\varphi} = 2a$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ (рис. 12.41), то

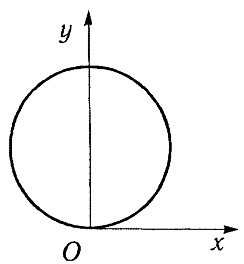


Рис. 12.41

$$m_x = 4a^2 \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2\pi a^2;$$

$$m_y = 4a^2 \int_0^\pi \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0.$$

То, что $m_y = 0$ и следовало ожидать, так как дуга окружности симметрична относительно оси Oy.

6.4. Найти статические моменты и моменты инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.

Решение. Расположим оси координат так, как показано на рис. 12.42.

Воспользуемся формулами (3),(9), полагая плотность равной единице. Будем иметь:

$$m_a = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a b^2 dx = \frac{1}{2}ab^2,$$

$$m_b = \int_0^a xydx = \int_0^a bxdx = \frac{1}{2}a^2 b,$$

$$I_a = \frac{1}{3}\int_0^a y^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^a b^3 dx = \frac{1}{3}ab^3,$$

$$I_b = \int_0^a x^2 ydx = \int_0^a x^2 bdx = \frac{1}{3}a^3 b.$$

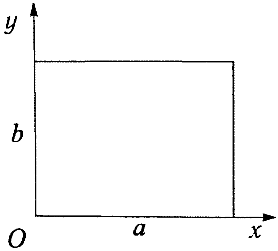


Рис. 12.42

6.5. Найти статические моменты и моменты инерции треугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = a$; а) относительно координатных осей; б) прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину; в) прямой, параллельной основанию и проходящей через центр тяжести треугольника.

Решение. а) Статический момент и момент инерции треугольника (рис. 12.43) относительно оси Ox находим по формулам (3) и (9)

$$m_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{1}{2}\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^a y^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^a (a-x)^3 dx = -\frac{1}{3}\frac{(a-x)^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{12}.$$

В силу симметрии $m_x = m_y = \dfrac{a^3}{6}$ и $I_x = I_y = \dfrac{a^4}{12}$.

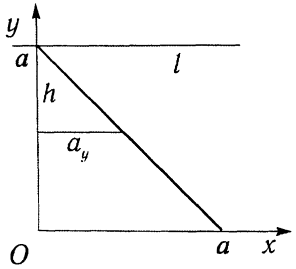


Рис. 12.43

б) Обозначим прямую, проходящую через вершину, за l. Через a_y обозначим ширину сечения, параллельного оси Ox, на расстоянии h от вершины треугольника. Из подобия трегольников $\dfrac{a_y}{a} = \dfrac{h}{a}$ и $a_y = h$. Отсюда, статический момент и момент инерции

$$m_l = \int_0^a a_y h dh = \int_0^a h^2 dh = \frac{a^3}{3};$$

$$I_l = \int_0^a a_y h^2 dh = \int_0^a h^3 dh = \frac{h^4}{4}.$$

в) Центр тяжести треугольника расположен на $\dfrac{1}{3}$ высоты от основания. Проведем через центр тяжести ось l (рис. 12.44). Обозначим через a_y ширину сечения, параллельного оси l, на расстоянии h от нее. Ширина сечения выше оси l равна $a_y = \dfrac{2}{3}a - h$, ниже $a_y = \dfrac{2}{3}a + h$.

Поскольку ось l проходит через центр тяжести, то статический момент треугольника относительно ее равен нулю. Действительно, для верхней части треугольника

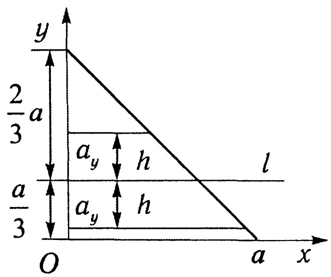


Рис. 12.44

$$m_l^{в}=\int_0^{\frac{2}{3}a}\left(\frac{2}{3}a-h\right)hdh=\left(\frac{2}{3}a\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}a}=\frac{a^3}{27}\frac{4}{3},$$

для нижней

$$m_l^{н}=\int_0^{\frac{a}{3}}\left(\frac{2}{3}a+h\right)hdh=\left(\frac{2}{3}a\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{3}}=\frac{a^3}{27}\frac{4}{3}.$$

При вычислении статических моментов расстояния точек, лежащих по разные стороны от оси l, берутся с разными знаками, следовательно, $m_l=m_l^{в}-m_l^{н}=0$.

Момент инерции верхней части треугольника относительно оси l равен

$$I_l^{в}=\int_0^{\frac{2}{3}a}\left(\frac{2}{3}a-h\right)h^2dh=\left(\frac{2}{3}a\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}a}=\frac{a^4}{81}\frac{4}{3}.$$

Момент инерции нижней части треугольника

$$I_l^{н}=\int_0^{\frac{a}{3}}\left(\frac{2}{3}a+h\right)h^2dh=\left(\frac{2}{3}a\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{3}}=\frac{a^4}{81}\frac{11}{12}.$$

Таким образом, момент инерции всего треугольника равен

$$I_l=I_l^{в}+I_l^{н}=\frac{a^4}{81}\left(\frac{4}{3}+\frac{11}{12}\right)=\frac{a^4}{36}.$$

6.6. Найти статический момент и момент инерции фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ относительно оси абсцисс.

Решение. Плоская фигура, ограниченння заданными линиями, показана на рис. 12.45. Ширина сечения на расстоянии y по оси x определяется разностью абсцисс $x_2(y) - x_1(y) = \sqrt{y} - y^2$. Статический момент определяем по формуле

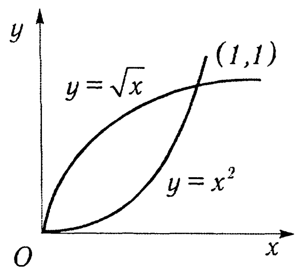


Рис. 12.45

$$m_x = \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2)dy = \left(\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Момент инерции находим по первой из формул (10)

$$I_x = \int_0^1 y^2(\sqrt{y} - y^2)dy = \left(\frac{7}{2}y^{7/2} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

6.7. Найти статический момент относительно основания: а) кругового конуса; б) полусферы; в) поверхности кругового конуса; г) поверхности полусферы.

Решение. а)Расположим оси координат относительно конуса, как показано на рис. 12.46. Из подобия треугольников OAB и MNB имеем $\frac{H}{H-x} = \frac{R}{y}$, $y = R\left(1 - \frac{x}{H}\right)$. Статический момент относительно плоскости основания находим по формуле (5)

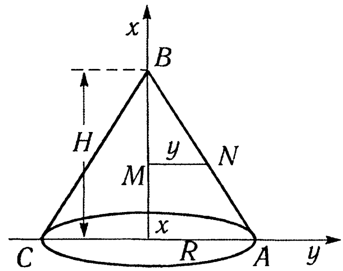


Рис. 12.46

$$m_{yz} = \pi\int_0^H xy^2 dx = \pi R^2 \int_0^H \left(x - 2\frac{x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2} \right) dx =$$

$$= \pi R^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2} \right)\Bigg|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2}{12}.$$

б) Расположим оси координат относительно полусферы, как показано на рис. 12.47. Из треугольника OMN имеем $y^2 = R^2 - x^2$. Статический момент относительно плоскости основания вычисляем по формуле (5)

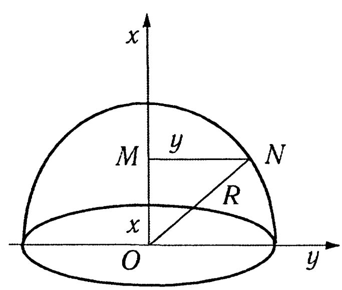


Рис. 12.47

$$m_{yz} = \pi\int_0^R xy^2 dx = \pi\int_0^R x(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.$$

в) Поскольку поверхность кругового конуса представляет поверхность вращения вокруг оси Ox (рис. 12.46), то статический момент относительно плоскости основания вычисляем по формуле (6)

$$m_{yz} = 2\pi \int_0^H xy\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^H xR\left(1-\frac{x}{H}\right)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi R}{H}\sqrt{H^2+R^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3H}\right)\Bigg|_0^H = \frac{\pi RH}{3}\sqrt{h^2+R^2}.$$

г) Статический момент поверхности полусферы (рис. 12.47) относительно плоскости основания вычисляем по формуле (6)

$$m_{yz} = 2\pi \int_0^R xy\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Производную y' находим из дифференцирования выражения $y^2 = R^2 - x^2$: $2yy' = -2x$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Радикал под знаком интеграла примет вид $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Таким образом,

$$m_{yz} = 2\pi \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi R\frac{R^2}{2} = \pi R^3.$$

6.8. Найти статические моменты относительно координатных плоскостей цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=y$ $(y>0)$.

Решение. Заданная цилиндрическая поверхность показана на рис. 12.48.

Статические моменты находим по формулам (7), учитывая, что

$$z = y,\quad x^2+y^2=R^2,\quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

$$m_{yz} = \int_{-R}^{R} xzdl = \int_{-R}^{R} xy\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R\int_{-R}^{R} xdx = 0.$$

$$m_{zx} = \int_{-R}^{R} yzdl = \int_{-R}^{R} y^2\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx.$$

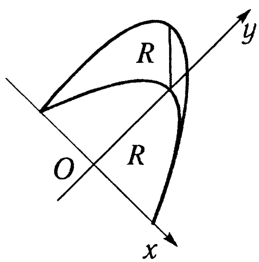


Рис. 12. 48

Интегрируя по частям, будем иметь

$$m_{zx} = \frac{R}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{R}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{\pi}{2}R^3.$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} z^2dl = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} y^2\frac{Rdx}{R^2-x^2}.$$

Используя вычисления предыдущего интеграла, получим

$m_{xy} = \dfrac{\pi}{4}R^3.$

6.9. Найти момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно его осей.

Решение. Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то достаточно найти момент инерции части эллипса, расположенной в первом квадранте, и умножить результат на 4. Согласно формулам (10) будем иметь $I_y = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,x^2dx$. Делаем замену $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t dt$ и

$$I_y = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos t a^2\sin^2 t a\cos t dt = a^3b\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{a^3b}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^3b}{4}\pi.$$

Аналогично находим момент инерции относительно оси x $I_x = 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,y^2dy.$ Делаем замену $y = b\sin t$, тогда $dy = b\cos t dt$ и

$$I_x = \frac{4a}{b}\int_0^{\pi/2} b\cos t b^2\sin^2 t b\cos t dt = \frac{ab^3}{4}\pi.$$

6.10. Найти момент инерции: а) цилиндра; б) конуса относительно его оси, высота которого H, а радиус основания R.

Решение. а) Разобьем цилиндр на элементарные цилиндрические трубки параллельно оси цилиндра (рис. 12.49). Объем такой элементарной трубки $V = 2\pi yHdy$, где y — радиус трубки толщиной dy и высотой H.

Момент инерции элементарной трубки относительно оси равен $dI_x = 2\pi Hy^3dy$.

Суммируя, получим момент инерции цилиндра относительно его оси

$$I_x = \int_0^R dI_x = 2\pi H \int_0^R y^3 dy = \frac{1}{2}\pi H R^4.$$

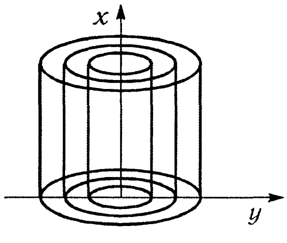


Рис. 12.49

б) Разобьем конус на элементарные цилиндрические трубки параллельно оси конуса (рис. 12.50). Объем элементарной трубки равен $dV = 2\pi y h dy$, где y — радиус трубки толщиной dy и высотой h. Из подобия треугольников OAB и MNB находим, что $h = H\left(1 - \frac{y}{R}\right)$. Момент инерции элементарной трубки

$$dI_x = 2\pi H \left(1 - \frac{y}{R}\right) y^3 dy.$$

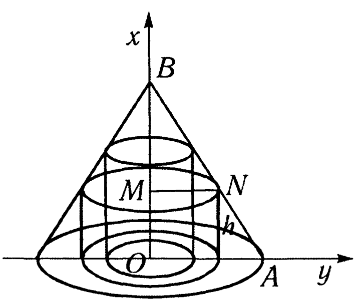


Рис. 12.50

Суммируя, получим момент инерции конуса относительно его оси

$$I_x = \int_0^R dI_x = 2\pi H \int_0^R \left(y^3 - \frac{y^4}{R} \right) dy = 2\pi H \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5R} \right) \Bigg|_0^R = \frac{1}{10} \pi H R^4.$$

6.11. Найти момент инерции боковой поверхности: а) цилиндра, высота которого H, а радиус основания R, относительно его оси; б) шара радиуса R относительно его диаметра.

Решение. а) Масса элементарной полоски боковой поверхности цилиндра (рис. 12.51) на расстоянии R от оси вращения есть $\delta 2\pi R dx$.

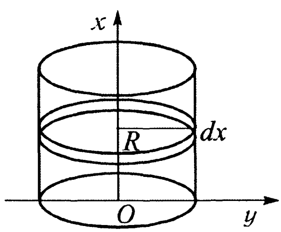


Рис. 12.51

Момент инерции элементарной полоски относительно оси Ox равен $dI_x = R^2 \delta 2\pi R dx$.

Суммируя, получим момент инерции цилиндрической поверхности, высота которой H

$$I_x = \int_0^H dI_x = 2\pi\delta R^3 \int_0^H dx = 2\pi\delta R^3 H = mR^2,$$

где $m = 2\pi\delta RH$ — масса боковой поверхности цилиндра.

б) Рассечем поверхность шара двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии dx, и параллельными плоскости Oyz (рис. 12.52).

Масса элементарной полоски боковой поверхности шара на расстоянии y от диаметра, расположенного по оси Ox, есть $\delta 2\pi y dl$.

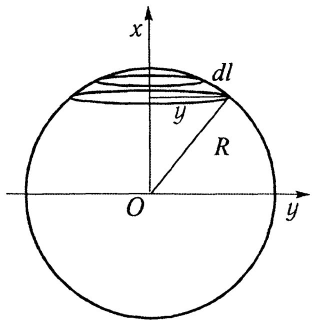


Рис. 12.52

Момент инерции элементарной полоски относительно диаметра равен $dI_x = y^2\delta 2\pi y dl$. Суммируя, получим момент инерции поверхности шара относительно его диаметра

$$I_x = \int_{-R}^{R} dI_x = 2\pi\delta \int_{-R}^{R} y^3 dl.$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = R^2$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$,

$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{Rdx}{R^2 - x^2}$,

находим

$$I_x = 2\pi\delta R\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = 2\pi\delta R\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{8}{3}\pi\delta R^4 = \frac{2}{3}mR^2,$$

где $m = 4\pi\delta R^2$ — масса поверхности шара.

12.7. Координаты центра тяжести

Точка C, являющаяся центром параллельных сил тяжести частиц тела, называется *центром тяжести* данного тела.

1°. Для материальной дуги AB плоской кривой прямоугольные координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{\int_a^b \delta(M)xdl}{\int_a^b \delta(M)dl}; \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{\int_a^b \delta(M)ydl}{\int_a^b \delta(M)dl}, \tag{1}$$

где m — масса дуги AB; m_x, m_y — статические моменты этой дуги относительно осей x,y; $\delta(M)$ — линейная плотность распределения массы в точке $M(x, y)$; dl — дифференциал дуги.

Декартовы координаты центра тяжести дуги кривой L, уравнение которой задано в полярной системе координат $\delta = \delta(\varphi)$, определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos\varphi dL; \qquad y_c = \frac{1}{L}\int_{\varphi}^{\varphi} \rho\sin\varphi dL, \tag{2}$$

где $dL = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi$ — дифференциал дуги; $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dL$ — длина дуги.

Здесь плотность дуги принята равной единице.

2°. Координаты центра тяжести криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox, определяются по формулам

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{\int_a^b \delta(M)xydx}{\int_a^b \delta(M)ydx}; \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{\int_a^b \delta(M)y^2dx}{2\int_a^b \delta(M)ydx}, \tag{3}$$

где m — масса плоской фигуры; m_x, m_y — статические моменты этой фигуры относительно осей x,y.

3°. Если плоская фигура ограничена линиями $y_1 = f_1(x)$; $y_2 = f_2(x)$, $x = a$; $x = b$ (рис. 12.4), то координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{\int_a^b \delta(M)x(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b \delta(M)(f_2(x) - f_1(x))dx};$$

$$y_c = \frac{\int_a^b \delta(M)(f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b \delta(M)(f_2(x) - f_1(x))dx}. \tag{4}$$

Здесь $\delta(M)$ — поверхностная плотность, т. е. масса единицы площади поверхности фигуры.

Если плотность $\delta(M)$ постоянна, то в предыдущих формулах δ может быть вынесена за знак интегралов и на ее величину можно сократить.

Если однородная материальная линия или фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси.

Координаты центра тяжести криволинейного сектора, ограниченного двумя полярными радиусами и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{3S}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi d\varphi; \quad y_c = \frac{1}{3S}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi d\varphi, \tag{5}$$

где $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$ — площадь сектора.

4°. Расстояние x_c центра тяжести тела от данной плоскости находится по формуле

$$x_c = \frac{\int_a^b xS(x)dx}{\int_a^b S(x)dx}, \tag{6}$$

где $S(x)dx$ — объем элементарого слоя тела на расстоянии x от плоскости; $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью параллельной данной плоскости и отстоящей от нее на расстоянии x.

Для тела, образованного вращением кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вокруг оси x (рис. 12.18), расстояние x_c центра тяжести от плоскости yOz определяется по формуле

$$x_c = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}. \tag{7}$$

Расстояние x_c центра тяжести поверхности вращения от плоскости, перпендикулярной оси x, определяется по формуле

$$x_c = \frac{m_{yz}}{S} = \frac{\int_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}. \tag{8}$$

5°. Координаты центра тяжести цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости xOy (рис. 12.29), образующие которой ограничены кривой $z = z(t)$, определяются формулами

$$x_c = \frac{m_{yz}}{S}, \quad y_c = \frac{m_{xz}}{S}, \quad z_c = \frac{m_{xy}}{S}, \tag{9}$$

где S — площадь цилиндрической поверхности; m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} — статические моменты (12.6 (7)) относительно координатных плоскостей.

6°. *Теоремы Гульдина.*

1) Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

2) Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.

7.1. Найти координаты центра тяжести дуги: а) цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ $(0 \le x \le a)$; б) арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки; в) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Решение. а) Воспользуемся формулами (1), полагая, что плотность равна единице. Для этого найдем дифференциал дуги

$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}dx} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$. Длина дуги равна

$$L = \int_0^a dl = \int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Bigg|_0^a = a\operatorname{sh}1.$$

Находим статические моменты:

$$m_y = \int_0^a x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx;\quad m_x = a\int_0^a \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx.$$

Интегрируя по частям: $x = u$, $\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = dv$; $dx = du$, $v = a\operatorname{sh}xa$, будем иметь

$$m_y = ax\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a\int_0^a \operatorname{sh}\frac{x}{a}dx = (ax\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a^2\operatorname{ch}\frac{x}{a})\Bigg|_0^a = a^2(\operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1 + 1).$$

$$m_x = \frac{a}{2}\int_0^a\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sh}\right).$$

Таким образом, координаты центра тяжести дуги будут

$$x_c = \frac{m_y}{L} = \frac{a}{\operatorname{sh}1}(\operatorname{sh}1 - \operatorname{sh}1 + 1) = a\left(1-\operatorname{th}\frac{1}{2}\right);$$

$$y_c = \frac{m_x}{L} = \frac{a}{2\operatorname{sh}1}\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\right) = \frac{a}{2}(\operatorname{csch}1 + \operatorname{ch}1).$$

б) Для определения массы дуги арки циклоиды m при заданной линейной плотности $\delta(M) = x$ найдем дифференциал ее дуги

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t dt} = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

и вычислим интеграл

$$m = \int_0^{2\pi} xdl = 2a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\sin t\sin dt\right) =$$

$$= 2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a^2\pi.$$

Статический момент относительно оси Oy равен

$$m_y = \int_0^{2\pi} x^2 dl = 2a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin\ t)^2\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^3\left(\int_0^{2\pi} t^2\sin\frac{t}{2}dt - 2\int_0^{2\pi} t\sin t\sin\frac{t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\sin^2 t\sin\frac{t}{2}dt\right).$$

Интегрируя первые два интеграла по частям, получим:

$$m_y = 2a^3\left(-2t^2\cos\frac{t}{2} + 4\int_0^{2\pi} t\cos\frac{t}{2}dt - \frac{8}{3}t\sin^3\frac{t}{2} + \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt -\right.$$

$$\left. -8\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\cos^2\frac{t}{2}d\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= 2a^3\left(\left(-2t^2\cos\frac{t}{2} + 8t\sin\frac{t}{2} + 16\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(\frac{8}{3}t\sin^3\frac{t}{2} + \frac{16}{3}\left(\cos\frac{t}{2} -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(\frac{8}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \frac{8}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= 2a^3\left(8(\pi^2-4) + \frac{64}{3} + \frac{32}{15}\right) = 16a^3\left(\pi^2 - \frac{16}{15}\right).$$

Статический момент относительно оси Ox равен

$$m_x = \int_0^{2\pi} xy dl = 2a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^3\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi} t\cos t\sin\frac{t}{2}dt -\right.$$

$$\left. -\int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\sin t\cos t\sin\frac{t}{2}dt\right).$$

Интегрируя первые два интеграла по частям, получим

$$m_x = 2a^3\left(\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 2t\left(\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} -\right.$$

$$-\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^3\frac{t}{2}dt + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} +$$

$$\left.+2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)dt\right) =$$

$$= 2a^3\left(4\pi + \frac{4}{3}\pi - \left(\frac{8}{3}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)-4\sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} +\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}-\frac{2}{5}\sin^5\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 2a^3\left(4\pi+\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{32a^3\pi}{3}.$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (1)

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{2a}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{16}{15}\right), \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{3}a.$$

в) Найдем дифференциал дуги:

$$dL = (a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi)^{1/2}d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Длина дуги: $L = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$

Координаты центра тяжести находим по формулам (2):

$$x_c = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi}\rho\cos\varphi\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right) =$$

$$=\frac{a}{2}(2\int_0^\pi\left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\sin\frac{\varphi}{2}+2\int_0^\pi\left(1-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)d\sin\frac{\varphi}{2}=$$

$$=a\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}-4\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{4}{5}a;$$

$$y_c=\frac{1}{4a}\int_0^\pi\rho\sin\varphi\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{a}{2}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}\left(\int_0^\pi\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi+\int_0^\pi\cos\varphi\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-4\int_0^\pi\cos^2\frac{\varphi}{2}d\cos\frac{\varphi}{2}-4\int_0^\pi\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}d\cos\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=-2a\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2}+\frac{2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{4}{5}a.$$

7.2. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной: а) осью Ox и полуокружностью $y=\sqrt{a^2-x^2}$; б) осями координат и дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, раположенной в первом квадранте, если плотность в каждой ее точке пропорциональна оси ординат; в) линиями $y^2=ax$ и $x=a$;; г) правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

Решение. а) Поскольку полукруг симметричен относительно оси координат, то центр тяжести находится на оси Oy и координата $x_c=0$.

Для вычисления координаты y_c воспользуемся формулами (3). В знаменателях формул (3) интегралы при $\delta(M)=1$ есть не что иное, как площадь фигуры, ограниченной криволинейной трапецией и осью абсцисс. Для полукруга $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{2}$.

Таким образом

$$y_c = \frac{1}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{1}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{1}{\pi a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

б) Так как плоская фигура прилежит к оси Ox, то воспользуемся формулами (3). Масса плоской фигуры равна $m = \int_0^a y^2 dx$. В первом квадранте при возрастании x от 0 до a величина t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, поэтому

$$m = \int_{\pi/2}^{0} b^2 \sin^2 t(-a\sin t)dt = ab^2\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)dt =$$

$$= ab^2\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{2}{3}ab^2.$$

Найдем статические моменты:

$$m_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^3 dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} b^3 \sin^3 t(-a\sin t)dt = -\frac{ab^3}{2}\int_{\pi/2}^{0}\frac{1}{4}(1-\cos 2t)^2 dt =$$

$$= -\frac{ab^3}{8}\int_{\pi/2}^{0}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right)dt =$$

$$= -\frac{ab^3}{8}\left(t - \sin 2t + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{3}{32}\pi ab^3,$$

$$m_y = \int_0^a xy^2 dx = \int_{\pi/2}^{0} a\cos t b^2 \sin^2 t(-a\sin t)dt = -a^2b^2\int_{\pi/2}^{0}\sin^3 t d\sin t =$$

$$= -\frac{1}{4}a^2b^2\sin^4 t\Big|_{\pi/2}^{0} = \frac{a^2b^2}{4}.$$

Окончательно получим $x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{3}{8}a,\quad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{9}{64}\pi b.$

в) Сделаем чертеж (рис. 12.53). Поскольку парабола симметрична относительно оси x, то $y_c = 0$. Уравнения ветвей параболы будут: $y = \sqrt{ax}$ и $y = -\sqrt{ax}$. Отсюда по формуле (4) имеем

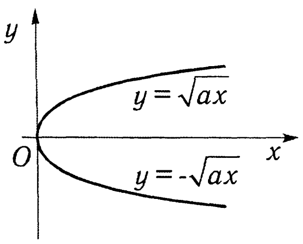


Рис. 12.53

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}dx} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{3}{5}a.$$

г) Поскольку правая петля лемнискаты симметрична относительно оси абсцисс, то центр тяжести находится на оси Ox и $y_c = 0$. Для нахождения координаты x_c воспользуемся формулами (5). Площадь петли равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$$

Таким образом

$$x_c = \frac{2}{3a^2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^3 \cos\varphi d\varphi = \frac{2a}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos 2\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2a}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - 2\sin^2\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi.$$

Делая замену $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$; $\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $t = -\frac{\pi}{2}$, получим

$$x_c = \frac{\sqrt{2}a}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t dt = \frac{\sqrt{2}a}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right)dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{12}\left(t + \sin 2t + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi a}{8}.$$

7.3. На каком расстоянии от основания лежит центр тяжести: а) тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной его оси, если высота параболоида равна H; б) конуса, высота которого равна H; в) полушара радиуса R?

Решение. а) Поскольку параболоид образован вращением кривой $x = y^2$ вокруг оси Ox, то для нахождения центра тяжести воспользуемся формулой (7)

$$x_c = \frac{\int_0^H xy^2 dx}{\int_0^H y^2 dx} = \frac{\int_0^H x^2 dx}{\int_0^H x dx} = \frac{2x^3}{3x^2}\Bigg|_0^H = \frac{2}{3}H.$$

Следовательно, от плоскости основания центр тяжести лежит на расстоянии $\frac{1}{3}H$.

б) Для нахождения центра тяжести конуса воспользуемся результатами задачи 6.7,а (рис. 12.46). Так как объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, то координата центра тяжести находится по формуле

$$x_c = \frac{m_{yz}}{V} = \frac{\pi R^2 H^2 \cdot 3}{12\pi R^2 H} = \frac{1}{4}H.$$

Этот же результат получается при вычислениях по формуле (7), т.к. расчеты в обоих случаях тождественны.

в) При вычислении центра тяжести полушара воспользуемся результатами задачи 6.7,б (рис. 12.47). Зная, что объем полушара равен $V=\frac{2}{3}\pi R^3$, расстояние от плоскости основания находим по формуле

$$x_c=\frac{m_{yz}}{V}=\frac{\pi R^4\cdot 3}{4\cdot 2\pi R^3}=\frac{3}{8}R.$$

Этот же результат получается при вычислениях по формуле (7).

7.4. Найти центр тяжести поверхности полусферы.

Решение. При вычислении центра тяжести полусферы воспользуемся результатами задачи 6.4,б (рис. 12.47). Поскольку полусфера представляет поверхность вращения, то по формуле (8) имеем

$$x_c=\frac{m_{yz}}{S}=\frac{\pi R^3}{2\pi\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{1}{2}R.$$

7.5. Найти координаты центра тяжести цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=y$ $(y>0)$.

Решение. Координаты центра тяжести цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости Oy (рис. 12.39), определяем по формулам (9).

Площадь цилиндрической поверхности равна $S\int\limits_L zdl=\int_{-R}^R z\sqrt{1+y'^2}dx$. Поскольку $z=y,\ x^2+y^2=R^2,\ y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то

$$S=\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=Rx\Big|_{-R}^R=3R^2.$$

Используя статические моменты, вычисленные в задаче 6.8., получим $x_c = 0$, $y_c = \frac{\pi}{2}\frac{R^3}{2R^2} = \frac{\pi}{4}R$, $z_c = \frac{\pi}{4}\frac{R^3}{2R^2} = \frac{\pi}{8}R$.

7.6. Пользуясь теоремой Гульдина, найти координаты центра тяжести: а) дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти; б) полукруга.

Решение. а) Вследствие симметрии дуги астроиды относительно биссектрисы первого координатного угла, координаты центра тяжести равны $x_c = y_c$. На основании первой теоремы Гульдина площадь поверхности, полученной вращением астроиды вокруг оси Ox, равна длине дуги астроиды, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести, т. е. $S = L\cdot 2\pi y_c$.

Площадь поверхности вращения астроиды найдена в задаче 5.2 и равна $S = \frac{6}{5}\pi a^2$. Длина дуги найдена в задаче 4.1,б и равна $L = \frac{3}{2}a$. Таким образом $y_c = \frac{S}{L2\pi} = \frac{6\pi a^2 2}{5\cdot 3a2\pi} = \frac{2}{5}a$.

б) Выберем оси координат таким образом, чтобы ось Ox совпадала с диаметром, начало координат с центром круга. Вследствие симметрии полукруга относительно оси Oy имеем $x_c = 0$.

При вращении полукруга вокруг оси Ox получим шар, объем которого равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь полукруга равна $S = \frac{1}{2}\pi R^2$. Пользуясь второй теоремой Гульдина, имеем $V = S\cdot 2\pi y_c$. Отсюда $y_c = \frac{4\pi R^3\cdot 2}{3\pi R^2\cdot 2\pi} = \frac{4R}{3\pi}$.

7.7. Найти поверхность и объем тела, которое получается при вращении окружности $(x-a)^2 + y^2 = R^2$, $0 < R < a$ вокруг оси Oy (такое тело называется тором).

Решение. Центр тяжести окружности совпадает с ее центром и отстоит от оси вращения Oy на расстоянии a. Используя первую теорему Гульдина, находим площадь поверхности $S = L2\pi a = 2\pi R \cdot 2\pi a = 4\pi^2 aR$. Объем тора находим по второй теореме Гульдина $V = \pi R^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 aR^2$.

12.8. Приложение определенного интеграла к задачам механики и физики

1°. Сила давления жидкости на вертикальную пластинку согласно закону Паскаля (рис. 12.54) равна произведению площади пластинки S на глубину ее погружения x и определяется по формуле $P = \gamma x S$ или

$$P = \gamma \int_a^b x dS = \gamma \int_a^b xy dx, \tag{1}$$

где $y = f(x)$ — известная функция, зависящая от формы пластинки; a и b — значения переменной интегрирования, соответствующие граничным точкам пластинки; γ — удельный вес жидкости.

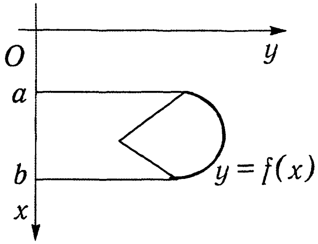


Рис. 12.54

2°. Работа переменной силы $f(s)$ при перемещении единицы массы из положения $s = a$ в положение $s = b$ численно равна определенному интегралу

$$A = \int_a^b f(s)ds. \tag{2}$$

Если переменная сила $f(x)$ действует в направлении оси Ox, то работа силы равна

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Если положение точки на траектории ее движения $s = s(t)$ описывается с помощью переменной t, $\alpha \le t \le \beta$ и величина пройденного пути является непрерывно дифференцируемой функцией, то работа определяется по формуле

$$A = \int_\alpha^\beta f(s(t))s'(t)dt. \tag{4}$$

3°. Если задан закон изменения скорости $v = f(t)$ при неравномерном движении тела, где t — время, то пройденный путь определяется по формуле

$$S = \int_a^b vdt = \int_a^b f(t)dt, \tag{5}$$

где a, b — значения переменной t на концах пройденного пути.

4°. Скорость истечения жидкости из отверстия на расстоянии h от свободной поверхности по закону Торичелли равна $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и отверстия (для воды $\mu = 0{,}6$), g — ускорение свободного падения.

Если за время t уровень жидкости в сосуде понизился на величину x, то, допуская, что скорость истечения в течение малого периода Δt постоянна, ее значение определяется выражением $v = \mu\sqrt{2g(h-x)}$.

Из равенства объема жидкости вытекшей через отверстие и объема опорожнившейся за этот же промежуток части сосуда $\mu s\sqrt{2g(h-x)}\Delta t \simeq S(x)\Delta x$, где s — площадь отверстия, $S(x)$ —

площадь поверхности жидкости, находим, что время полного опорожнения сосуда равно

$$T = \frac{1}{\mu s\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(x)dx}{\sqrt{h-x}}. \tag{6}$$

5°. Зависимость между объемом V и давлением p газа при изотермическом изменении состояния газа, т. е. постоянной температуре, согласно закону Бойля–Мариотта имеет вид $pV = p_\circ v_\circ = c - const$. Работа при изменении объема газа от значения V_1 до V_2 определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{7}$$

или на основании закона Бойля-Мариотта по формуле

$$A = c\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = c\ln\frac{V_2}{V_1} = c\ln\frac{p_2}{p_1}, \tag{8}$$

где p_1 и p_2 — давления в начале и в конце процесса.

Работа, затрачиваемая на сжатие газа в цилиндре при изменении поршня на величину h, находится по формуле

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H-x}, \tag{9}$$

где H — высота цилиндра.

В случае адиабатического процесса, когда при расширении объема газа температура понижается, а при сжатии — повышается, объем V и давление связаны соотношением Пуассона $pV^k = p_\circ V_\circ^k = c - const$, где k — постоянная для данного газа величина, всегда большая единицы (для воздуха $k \simeq 1,4$).

Работа при адиабатическом изменении объема газа равна

$$A = c\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^k} = c\frac{1}{1-k}\left(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}\right). \tag{10}$$

При движении поршня в цилиндре работа определяется, соответственно по формуле

$$A=\frac{c}{S^{k-1}}\int_0^h\frac{dx}{(H-x)^k}=\frac{p_\circ V_\circ{}^k}{S^{k-1}(k-1)}\left(\frac{1}{(H-h)^{k-1}}-\frac{1}{H^{k-1}}\right). \quad (11)$$

6°. Кинетическая энергия материальной точки массы m, обладающей скоростью v, определяется по формуле $K=\frac{mv^2}{2}$. При расчете кинетической энергии тела его разбивают на элементарные частицы. Суммируя кинетические энергии этих частиц, в пределе при $n\to\infty$, посредством интегрального перехода, находят кинетическую энергию всего тела $K=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i v_i^2$.

Если материальная точка вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega=\frac{v}{r}$, то ее кинетическая энергия определяется по формуле $K=\frac{1}{2}I\omega^2$, где $I=mr^2$ — момент инерции относительно оси вращения, r — расстояние от оси вращения. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, находится аналогично, посредством интегрального перехода.

8.1. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 200 м, нижним 150 м и высотой 10м. **Определить** давление воды на плотину.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 12.55). В силу симмтрии давление на всю плотину равно удвоенному давлению на половину плотины. Согласно формуле (1) имеем $P=2\gamma\int_0^{10}xydx$, где $\gamma=1$ т/м^3.

Найдем зависимость y от x. Возьмем на прямой AB произвольную точку F с координтами (x,y) и рассмотрим два треугольниа ABC и AEF.

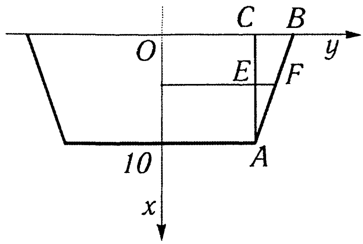


Рис. 12.55

Из подобия треугольников имеем $\dfrac{EF}{CB}=\dfrac{AE}{AC}$ или $\dfrac{EF}{25}=\dfrac{10-x}{10}$, откуда $EF=25-\dfrac{5}{2}x$; $y=75+EF=100-\dfrac{5}{2}x$.

Таким образом

$$P=2\int_0^{10}x\left(100-\frac{5}{2}x\right)dx=2\left(100\frac{x^2}{2}-\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{10}=10328\text{т.}.$$

8.2. Цилиндрическая цистерна наполовину наполнена маслом $\gamma=0,9$ т/м^3. **Определить** давление масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 1м.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 12.56). По условию $y=\sqrt{1-x^2}$. Согласно формуле (1) имеем

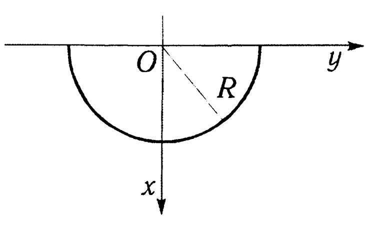


Рис. 12.56

$$P=\gamma\int_0^1 xydx=\gamma\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\gamma\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\gamma}{3}=\frac{0{,}9}{3}=0{,}3\text{ т.}$$

8.3. Найти давление жидкости на прямоугольную пластинку длиной a и шириной b, наклоненной к поверхности жидкости под углом α и находящейся на глубине h.

Решение. Выделим на глубине x элементарную полоску (рис. 12.57), площадь которой равна $dS=\dfrac{adx}{\sin\alpha}$. Используя формулу (1), получим

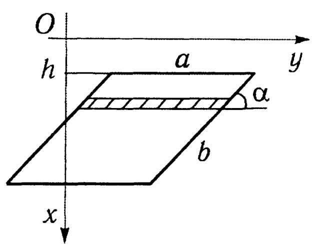


Рис. 12.57

$$P=\gamma\int_h^{h+b\sin\alpha}xdS=\frac{a\gamma}{\sin\alpha}\int_h^{h+b\sin\alpha}xdx=\frac{a\gamma}{2\sin\alpha}x^2\Bigg|_h^{h+b\sin\alpha}=$$

$$=\frac{a\gamma}{2\sin\alpha}(2hb\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha)=\gamma ab(h+\frac{1}{2}b\sin\alpha).$$

8.4. Найти силу, с которой выталкивается круговой конус с радиусом основания R и высотой H, погруженный в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды.

Решение. Конус, опущенный в воду, выталкивается вертикальной составляющей сил давления (рис. 12.58) $P_b=P\cos\alpha$.

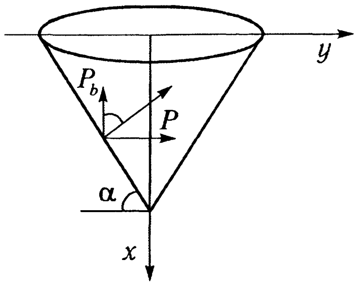


Рис. 12.58

Силы давления действуют на поверхность конуса. Выделим элементарное кольцо, площадь которого равна $dS = 2\pi y dl$, где $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$ — дифференциал образующей. Уравнение образующей имеет вид $\frac{x}{H} + \frac{y}{R} = 1$.

Отсюда $y = R\left(1 - \frac{x}{H}\right)$, а $dl = \frac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}dx$.

По формуле (1) при $\gamma = 1$ будем иметь

$$P = 2\pi R\int_0^H x\left(1-\frac{x}{H}\right)\frac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}dx =$$

$$= \frac{2\pi R}{H}\sqrt{H^2+R^2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3H}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi HR\sqrt{H^2+R^2}.$$

Поскольку $\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}$, то $P_b = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

8.5. Найти давление воды на поверхность шара радиса a, если его центр находится на глубине b от поверхности воды $(b > a)$.

Решение. Выделим двумя горизонтальными плоскостями элементарную поверхность шара (рис. 12.59), площадь которой $dS = 2\pi y dl$. Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = a^2$ найдем $y' = -\frac{x}{y}$ и $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx = \frac{a}{x}dx$. Поскольку элементарное кольцо отстоит от поверхности воды на расстоянии $b + x$, то пользуясь формулой (1) при $\gamma = 1$, получим

$$P = 2\pi\int_{-a}^{a}(b+x)y\frac{a}{y}dx = 2\pi a\left(bx+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = 4\pi a^2 b.$$

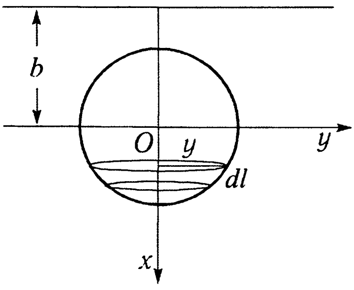


Рис. 12.59

8.6. Найти работу, которую необходимо затратить для запуска ракеты массы m с поверхности Земли на высоту h.

Решение. Сила притяжения тела землей, согласно закону всемирного тяготения, равна $F = k\frac{mM}{x^2}$, где M — масса земли, x — расстояние ракеты от центра земли, k — гравитационная постоянная. Поскольку на поверхности земли при $x = R$ сила равна $F = mg$, где g — ускорение свободного падения, то $mg = k\frac{mM}{R^2}$. Отсюда имеем, что $kM = gR^2$ и $F = mg\frac{R^2}{x^2}$.

Используя формулу (3), находим работу

$$A=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{x^2}dx=-mg\frac{R^2}{x}\bigg|_R^{R+h}=-mgR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=mgR\frac{h}{R+h}.$$

Если ракета уходит в бесконечность, т. е. $h\to\infty$, то работа

$$A=\lim_{h\to\infty} mgR\frac{h}{R+h}=mgR.$$

8.7. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания масла из корыта, имеющего форму полуцилиндра длиной a и радиусом R.

Решение. Выделим двумя горизонтальными плоскостями элементарный слой масла (рис. 12.60), находящийся на глубине x. Ширина элементарного слоя равна $2y=2\sqrt{R^2-x^2}$, объем $dV=2aydx=2a\sqrt{R^2-x^2}dx$.

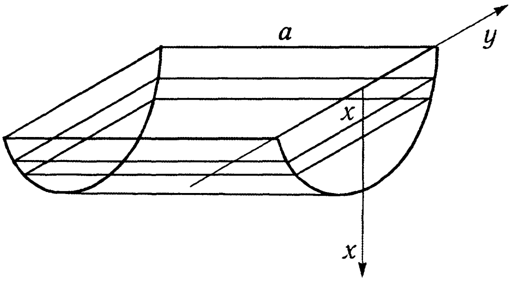


Рис. 12.60

Работа, необходимая для выкачивания этого элементарного слоя масла на высоту x, равна $dA=2\gamma ax\sqrt{R^2-x^2}dx$, где γ — удельный вес масла.

Искомую работу A находим интегрированием

$$A=\int_0^R 2\gamma ax\sqrt{R^2-x^2}dx=-\gamma a\frac{2}{3}\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^R=\frac{2}{3}\gamma aR^3.$$

8.8. Высота пирамиды с квадратным основанием H, сторона основания a, удельный вес материала γ. **Вычислить** работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

Решение. Выделим двумя плоскостями параллельными основанию элементарный объем пирамиды (рис. 12.61), находящийся на высоте x. Из подобия треугольников ΔABC и ΔMNB находим, что ширина выделенного сечения равна $\frac{MN}{AC} = \frac{H-x}{H}$, $2y = a\left(1 = \frac{x}{H}\right)$. Элементарный объем будет $dV = a^2\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 dx$. Работа, затраченная на поднятие элементарного объема на высоту x, будет $dA = \gamma a^2\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 xdx.$

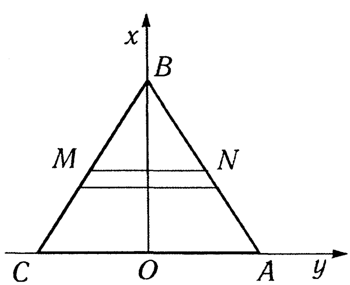


Рис. 12.61

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 до H, вычисляем работу, затраченную на преодоление силы тяжести при подъеме пирамиды

$$A = \gamma a^2 \int_0^H \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 xdx = \gamma a^2 \int_0^H \left(x - 2\frac{x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2}\right)dx =$$

$$= \gamma a^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{H} + \frac{x^4}{H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{12}\gamma a^2 H^2.$$

8.9. Шар радиуса R с удельным весом γ лежит на дне бассейна глубиной $H > R$. **Какую** работу необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды?

Решение. Поскольку сила подъема шара до поверхности постоянна и равна разности между силой веса шара и силой, выталкивающей шар из воды $P_1 = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$, то работа на этом участке определяется произведением силы P_1 на высоту подъема $H-2R$

$$A_1 = \frac{4}{3}\pi R^3(\gamma-1)(H-2R).$$

При извлечении шара из воды сила, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от величины надводной части шара, которая представляет шаровой сегмент (рис. 12.62) объема $V = \frac{1}{3}\pi x^2(3R-x)$, здесь x — высота сегмента. Определяя силу подъема как разность между силой веса шара и силой, выталкивающей шар из воды $P_2 = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3 - \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi x^2(3R-x)\right)$ и интегрируя по формуле (2) в пределах от 0 до $2R$, находим работу

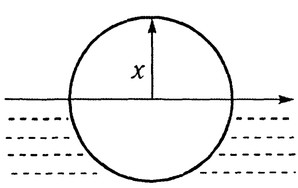


Рис. 12.62

$$A_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}(4R^3(\gamma-1)+3Rx^2-x^3)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(4R^3(\gamma-1)x + Rx^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\gamma-1).$$

Таким образом, вся работа по подъему шара равна $A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\pi R^3(R+(\gamma-1)H)$.

8.10. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого S = 4000 см^2, а высота H = 50 см, плавает на поверхности воды. **Какую** работу надо затратить, чтобы вытащить: а) поплавок из воды? б) погрузить поплавок в воду целиком, если удельный вес дерева $\gamma = 0,8$ г/см^2?

Решение. а) Вес поплавка равен $P_n = \gamma SH$. Из условия равенства силы веса поплавка и силы $P_v = Sh$, выталкивающей поплавок из воды, находим высоту погруженной части поплавка: $0,8\cdot 4000\cdot 50 = 4000h$; $h = 40$ см.

Сила, совершающая работу при подъеме поплавка, изменяется от высоты его подводной части и равна разности между его весом и силой, выталкивающей поплавок из воды $P = P_n - P_v = \gamma SH - S(h-x)$. Отсюда, работа при извлечении поплавка из воды равна

$$A = \int_0^{40} S(\gamma H - h + x)dx = S\left(\gamma Hx - hx + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{40} =$$

$$= 4000\left(0,8\cdot 50\cdot 40 - 40^2 + \frac{40^2}{2}\right) = 32\,\text{кГм}.$$

б) Надводная высота поплавка равна 10 см. Сила, которую необходимо приложить для погружения поплавка, равна разности между силой выталкивания его из воды $P_v = (h+x)S$ и силой веса поплавка $P_n = \gamma SH$. Следовательно, работа равна

$$A = \int_0^{10}((40+x)S - \gamma SH)dx = S\left(40x + \frac{x^2}{2} - \gamma Hx\right)\Bigg|_0^{10} = 4000\frac{100}{2} = 2\,\text{кГм}.$$

8.11. Вычислить работу при растяжении на 2 мм медного стержня длиной 0,5 м с радиусом сечения 4 мм.

Решение. Если совместить ось Ox со срединным волокном стержня, то растягивающая сила по закону Гука равна $F = E\dfrac{Sx}{l}$, где S — площадь поперечного сечения стержня, l — длина стержня, E — модуль упругости (для меди $E \simeq 12\cdot 10^4$ н/мм^2), x — удлинение в направлении оси Ox.

Подставляя растягивающую силу F в формулу (3), находим работу

$$A = \int_0^a E\frac{S}{l}xdx = \frac{12\cdot 10^4}{500}\pi 16\int_0^2 xdx = 7,68\pi \text{ нм}.$$

8.12. Два электрических заряда e_0 и e находятся на оси Ox, соответственно, в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = a$. **Найти** работу при перемещении второго заряда в точку $x_2 = b \quad (b > a)$.

Решение. По закону Кулона заряд e_0 отталкивает заряд e с силой, равной $F = \dfrac{e_0 e}{x^2}$, где x — расстояние между зарядами. Используя формулу (3), работа при перемещении заряда из точки x_1 в точку x_2 будет

$$A = e_0 e\int_a^b \frac{dx}{x^2} = e_0 e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

8.13. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. **Вычислить** работу при сжатии пружины на 10 см, если для сжатия на 1см нужна сила в 1кг.

Решение. По условию $F = ks$. Определим коэффициент пропорциональности k. При $s = 0{,}01$м, $F = 1$кг, откуда $k = \dfrac{F}{s} = 100$. Согласно формуле (2) имеем

$$A=\int_0^{0,1}100s\,ds=100\frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1}=0,5\,\text{кгм}.$$

8.14. Скорость движения тела определяется по формуле $v=3t^2-2t$ м/с. **Какой** путь пройдет тело за 5сек ?

Решение. Путь, пройденный телом, определяется по формуле (5)

$$s=\int_0^5(3t^2-2t)dt=(t^3-t^2)\Big|_0^5=100\,\text{м}.$$

8.15. Скорость падения парашютиста определяется по формуле $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{kt}{m}})$, где g — ускорение свободного падения, m — масса парашютиста, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров парашюта. Определить, с какой высоты прыгал парашютист, если падение продолжалось три минуты.

Решение. Поскольку закон изменения скорости известен, то, пользуясь формулой (5), получим

$$S=\int_0^{180}\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)dt=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right)\Bigg|_0^{180}=\frac{mg}{t}\left(180+\left(\frac{m}{k}e^{-\frac{180k}{m}}-1\right)\right).$$

8.16. Скорость движения точки $v=0,1te^{-0,01t}$ м/с. **Найти** путь, пройденный точкой от начала координат до полной остановки.

Решение. Пройденный путь определяем по формуле (5), учитывая, что полная остановка точки произойдет при $t\to\infty$

$$S=\int_0^{\infty}0,1te^{-0,01t}dt.$$

Интегрируя по частям: $t=u$, $e^{-0,01t}dt=dv$; $dt=du$, $v=-\frac{e^{-0,01t}}{0,01}$, получим

$$S = 0{,}1 \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{te^{-0{,}01t}}{0{,}01} - \frac{e^{-0{,}01t}}{0{,}01^2}\right)\Bigg|_0^\beta = 10\lim_{\beta\to\infty}\frac{t}{e^{0{,}01t}} + 0{,}1\frac{1}{0{,}01^2} = 10^3\ \text{м}.$$

8.17. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6-t)$ м/с. Найти наибольшее удаление точки от начала движения.

Решение. Путь пройденный точкой определяем по формуле (5) с переменным верхним пределом

$$S = \int_0^t 2(6-t)dt = 12t - t^2.$$

Наибольшее удаление точки находим, рассматривая путь в функции времени: $S' = 12 - 2t$, $S = 0$ при $t = 6$, следовательно, $S_{\max} = 12\cdot 6 - 6^2 = 36$ м.

8.18. Коническая воронка имеет размеры: высота H = 40см, радиус нижнего основания r = 0,3см и верхнего R = 6см. **За какое** время вода вытечет из воронки: а) полностью; б) если бы убыль воды постоянно возмещалась.

Решение. а) За время t уровень воды в воронке будет $H - x$. Найдем площадь поверхности воды при этом уровне. С целью упрощения вычислений считаем, что осевое сечение воронки представляет треугольник, вследствие малости r в сравнении с другими размерами воронки, а не трапецию (рис. 12.63).

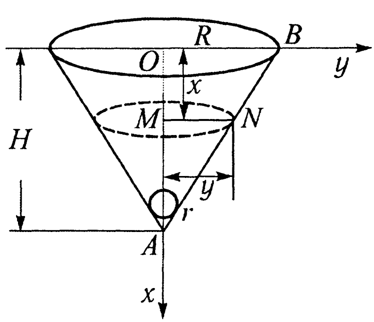


Рис. 12.63

Из подобия треугольников ABO и MNO имеем:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{MA}{MN}, \quad \frac{H}{R}=\frac{H-x}{y}, \quad y=R\left(1-\frac{x}{H}\right).$$

Площадь поверхности $S(x)=\pi R^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2$.

Учитывая, что $\mu=0,6$, $s=\pi r^2$, по формуле (6) находим время полного опорожнения воронки

$$T=\frac{1}{0,6\pi r^2\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{\pi R^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2dx}{\sqrt{H-x}}=\frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_H^0(H-x)^{\frac{3}{2}}d(H-x)=$$

$$=\frac{2R^2H^{\frac{5}{2}}}{3r^2H^2\sqrt{2g}}=\frac{2\cdot 36}{3\cdot 0,3^2}\sqrt{\frac{40}{2\cdot 9,81}}\simeq 3,8\text{с}.$$

б) В случае, если убыль воды постоянно возмещается, то есть при $x=0$, время истечения будет равно отношению объема воды, вмещающейся в воронке, к объему воды, вытекающей через отвеостие за одну секунду $0,6\pi r^2\sqrt{2gH}$, т. е.

$$T=\frac{{}^1\!/_3\,\pi R^2H}{0,6\pi r^2\sqrt{2gH}}=\frac{36}{3\cdot 0,6\cdot 0,3^2}\sqrt{\frac{40}{2\cdot 9,81}}=32\text{ с}.$$

8.19. Определить расход жидкости через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива h, ширина b.

Решение. Пусть водослив находится на расстоянии h_0 от поверхности воды (рис. 12.64). Выделим на глубине x элементарную полоску ширины dx. Поскольку площадь элементарной полоски равна bdx, а скорость истечения воды через нее $v=\mu\sqrt{2gx}$, то расход воды будет $dQ=\mu\sqrt{2gx}bdx$. Интегрируя дифференциал расхода воды по высоте водослива, получим

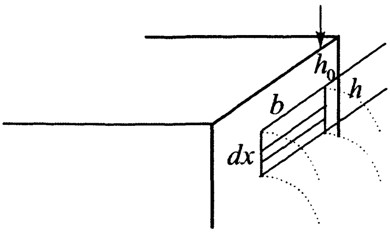


Рис. 12.64

$$Q=\mu b\int_{h_0}^{h+h_0}\sqrt{2gx}dx=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{h_0}^{h+h_0}=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left((h+h_0)^{\frac{3}{2}}-h_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

Если верхняя кромка водослива совпадает со свободной поверхностью воды, т. е. $h_0=0$, то расход воды через прямоугольный водослив определяется по формуле

$$Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}.$$

8.20. При устновившемся ламинарном течении **определить** расход жидкости через трубу круглого сечения радиуса a.

Решение. Скорость течения в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, определяется по формуле $v=\frac{P}{4\mu l}(a^2-r^2)$, где P — разность давлений жидкости на концах трубы длиной l, μ — коэффициент вязкости.

Разобъем трубу цилиндрическими поверхностями, оси которых совпадают с осью трубы, на элементарные цилиндрические части толщиной Δr.

Тогда через сечение, заключенное между цилиндрическими поверхностями площадью $2\pi r\Delta r$, элментарный расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекающей через поперечное сечение в единицу времени, будет равно $dQ=v\cdot\pi rdr$. Отсюда расход жидкости через всю трубу

$$Q=\int_0^a v\cdot 2\pi r dr=\frac{2\pi P}{4\mu l}\int_0^a (a^2-x^2)r dr=\frac{\pi P}{2\mu l}\left(a^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a=\frac{\pi P a^4}{8\mu l}.$$

8.21. В цилиндре под поршнем находится воздух объемом $V_0=0{,}1\,\text{м}^3$ при атмосферном давлении $P_0=10330\,\text{кг/м}^2$. **Какую работу** надо затратить, чтобы при неизменной температуре объем воздуха уменьшить в два раза?

Решение. Поскольку температура постоянна, то процесс изотермический и следует воспользоваться формулой (8). Из условия $c=V_0P_0=1033\,\text{кгм}$, $V_1=0{,}05\,\text{м}^3$.

Таким образом, учитывая, что по условию задачи у нас сжатие, работа будет равна

$$A=c\int_{V_1}^{V_0}\frac{dV}{V}=1033\ln V\Big|_{0{,}05}^{0{,}1}=1033\ln 2\,\text{кгм}.$$

8.22. Цилиндр с подвижным поршнем диаметра D = 20см и длины L = 1м заполнен паром при давлении $P_0=10\,\text{кг/см}^2$. **Найти** работу при адиабатическом сжатии, если поршень перемещается на l = 80см внутрь цилиндра.

Решение. Работа при движении поршня в цилиндре при адиабатическом сжатии определяется по формуле (11). Из условия задачи имеем: $c=P_0V_0^k=P_0(\pi R^2L)^k$, $k=1{,}4$. Таким образом,

$$A=\frac{c}{S^{k-1}}\int_0^l\frac{dx}{(L-x)^k}=\frac{P_0V_0^k}{S^{k-1}(k-1)}\left(\frac{1}{(L-l)^{k-1}}-\frac{1}{L^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{P_0V_0}{k-1}\left(\left(\frac{L}{L-l}\right)^{k-1}-1\right)=\frac{10\pi R^2L}{k-1}\left(\left(\frac{L}{L-l}\right)^{k-1}-1\right)=\frac{\pi 10^5}{0{,}4}(5^{0{,}4}-1).$$

8.23. Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса R и плотности γ, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

Решение. Разбиваем шар на элементарные цилиндрические трубки, осью которых является данный диаметр (рис. 12.65). Элементарный объем трубки равен $dV = 2\pi rhdr$, где r — радиус трубки. Высота трубки по теореме Пифагора равна $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

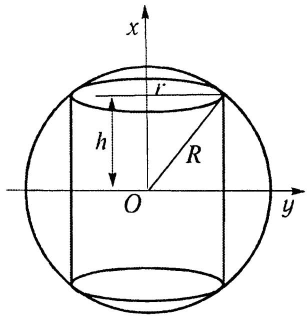


Рис. 12.65

Учитывая, что плотность шара равна γ, находим $dm = 4\pi\gamma r\sqrt{R^2 - r^2}dr$ и элементарный момент инерции $dI = r^2 dm$.

Таким образом, кинетическая энергия шара, вращающегося вокруг своего диаметра, равна

$$K = \frac{1}{2}\int_0^R \omega^2 dI = \frac{\omega^2}{2}\int_0^R r^2 dm = 2\pi\omega^2\gamma\int_0^R r^3\sqrt{R^2 - r^2}dr.$$

Делаем замену: $R^2 - r^2 = t^2, \quad rdr = tdt,$ тогда

$$K = 2\pi\omega^2\gamma\int_0^R (R^2 - t^2)t^2 dt = \frac{4}{15}\pi\omega^2\gamma R^5.$$

8.24. Пластинка в форме параболического сегмента вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотность материала γ. **Найти** кинетическую энергию пластинки.

Решение. Расположим координатные оси, как показано на рис. 12.66, тогда уравнение параболы будет $y = 2px^2$. Зная координаты точки $M\left(\dfrac{a}{2}, h\right)$, из уравнения параболы находим параметр параболы: $h = 2p\dfrac{a^2}{4}$, $p = \dfrac{2h}{a^2}$.

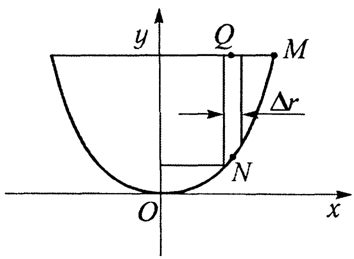


Рис. 12.66

Разобъем параболический сегмент на элементарные части плоскостями, параллельными оси Oy, перпендикулярными плоскости сегмента и отстоящими друг от друга на расстоянии Δr. Объем элементарной части будет $\Delta V = |QN| d\Delta r$. Переходя к дифференциалу, масса элементарной части равна $dm = \gamma |QN| ddr$. Подставляя сюда высоту элементарной части $|QN| = h - y = h - \dfrac{4hx^2}{a^2} = h\left(1 - \dfrac{4r^2}{a^2}\right)$, получим $dm = \gamma hd\left(1 - \dfrac{4r^2}{a^2}\right)dr$.

Элементарный момент инерции равен $dI = r^2 dm$. Таким образом, кинетическая энергия сегмента будет

$$K = \frac{\omega^2}{2}\int_{-a/2}^{a/2} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\int_{-a/2}^{a/2} r^2\left(1 - \frac{4r^2}{a^2}\right)dr =$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\left(\frac{r^3}{3} - \frac{4}{5}\frac{r^5}{a^2}\right)\Bigg|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\omega^2}{60}\gamma hda^3.$$

8.25. Определить количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током $I = I_0 \sin\omega t$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R.

Решение. По закону Джоуля-Ленца количество тепла, выделяемого постоянным током за время t, определяется по формуле $Q = 0,24I^2Rt$. Учитывая, что у нас ток переменный, количество тепла за промежуток времени $\Delta Q = 0,24I_0^2 \sin^2 \omega t R\Delta t$ или

$$dQ = 0,24RI_0^2 \sin^2 \omega t dt.$$

Таким образом, количество тепла за период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ равно

$$Q = \int_0^T dQ = 0,24RI_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt =$$

$$= 0,12RI_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1-\cos 2\omega t)dt = 0,24\frac{\pi RI_0^2}{\omega}.$$

8.26. Вертикальный вращающийся вал веса P и радиуса a опирается на подпятник. **Найти** работу силы трения между основанием вала и прилегающей к ней поверхностью опоры при одном обороте вала.

Решение. Сила трения между основанием вала (пятой) и прилегающей к ней поверхностью опоры (подпятником) равна $F = \mu ps$, где p — давление вала на поверхность опоры в рассматриваемой точке, отнесенное к единице площади опоры, μ — коэффициент трения. Поскольку вес вала P, то давление на единицу площади опоры равно $p = \dfrac{P}{\pi a^2}$.

Рассматривая p как функцию радиуса-вектора r при вычислении полного давления, воспользуемся методом суммирования бесконечно малых элементов.

Разобъем поверхность трения на элементарные концентрические кольца, так что все давление сложится из элементарных давлений, соответствующих отдельным кольцам. Рассмотрим кольцо, ограниченное окружностями r и $r+dr$. Площадь этого кольца приближенно равна $2\pi r dr$. Сила трения от кольца шириной dr, удаленного от центра вала на r, равна $\frac{2\mu P}{a^2} r dr$.

Работа силы трения на элементарном кольце при одном обороте $2\pi r$ равна $dA=\frac{4\pi\mu P}{a^2}\, r^2 dr$. Таким образом, полная работа силы трения будет

$$A=\int_0^a \frac{4\pi\mu P}{a^2} r^2 dr=\frac{4\pi\mu P}{a^2}\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi\mu Pa.$$

8.27. Найти силу притяжения, с которой действует материальный стержень длины l и массы M на материальную точку массы m, находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов.

Решение. Сила F взаимодействия двух точечных масс определяется законом Ньютона $F=\frac{kmM}{r^2}$, где r — расстояние между точками, m и M — массы точек, k — коэффициент пропорциональности.

Масса единицы длины стержня (линейная плотность) $\frac{M}{l}=const$ — величина постоянная. Выделим элемент стержня длиной dx, отстоящий от его конца на расстоянии x. Сила взаимодействия выделенного элемента с точечной массой m равна $dF=\frac{kmM}{(a+x)^2 l}dx$. Отсюда вся сила притяжения будет

$$F=\int_0^l \frac{kmM}{l(a+x)^2}dx=-\frac{kmM}{l}\frac{1}{a+x}\bigg|_0^l=\frac{kmM}{a(a+l)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия. М.: Наука, 1984. — 190с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984. — 431с.
3. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. — 400с.
4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1999. — 232с.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1983. — 317с.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Альфа, т. 1, 1998. — 687с., т. 2, 1998. — 584с.
7. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999. — 695с.
8. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984. — 320с.
9. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, т. 1, 2001. — 415с., т. 2, 2001. — 544с.