ВУЗ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

2

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

В трех томах

2

том

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2003

УДК 517 (07)
ББК 22.11
Ч-49

Рецензенты:
К. Ф. Черных, доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного университета,
Н. В. Югов, член-корреспондент Центра прикладной математики
и механики Академии наук РФ

Черненко В. Д.
Ч-49 Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 2.— СПб.: Политехника, 2003.— 477 с.: ил.

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0768-Х — Т. 2

Предлагаемое учебное пособие содержит краткий теоретический материал по рядам Фурье, двойным, тройным, криволинейным, поверхностным интегралам и их приложениям к задачам геометрии, механики и физики, векторному анализу, функциям комплексных переменных, операционному исчислению и методам интегрирования уравнений в частных производных, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные методы решения.

УДК 517(07)
ББК 22.11

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0768-Х — Т. 2

Оглавление

Глава 13
РЯДЫ

13.1. Числовые ряды. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости

1°. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образуют известную числовую последовательность. Здесь a_n — общий член ряда.

2°. Под *частичной суммой ряда* понимают сумму n первых его членов $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Числовой ряд называется *сходящимся,* если частичная сумма при $n \to \infty$ имеет предел. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S.$ Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся.*

3°. *Необходимым признаком сходимости* ряда является условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ Если предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ то ряд расходится — *достаточный признак расходимости ряда.*

1.1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; в) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots$

Решение. а) Найдем предел общего члена при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=0.$$

Так как предел общего члена равен нулю, то необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может сходиться.

б) Найдем предел общего члена при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Поскольку предел не равен нулю, то ряд расходится (см. достаточный признак расходимости ряда).

в) При исследовании на сходимость третьего ряда необходимо найти его общий член

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}.$$

Найдем предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}=0.$

Для первого и третьего рядов необходимый признак сходимости выполняется, поэтому они могут сходиться, но могут и расходиться, что можно установить только с помощью достаточных признаков сходимости.

13.2. Достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов

1°. *Интегральный признак Коши.* Предположим, что существует непрерывная и убывающая функция $f(x)$, причем при $x=1$ она равна первому члену ряда (1), при $x=2$ второму члену и т. д. При сделанных предположениях ряд (1) сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \tag{2}$$

где нижним пределом интеграла может быть любое положительное число из области определения функции. При исследовании рядов на сходимость интегральным признаком целесообразно пользоваться в том случае, когда достаточно легко находится значение несобственного интеграла (2).

2°. *Первый признак сравнения.* Пусть даны два положительных ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{3}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

Если все члены ряда (3) не превосходят соответствующих членов ряда (4), т. е. $a_n \le b_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, то из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3), а из расходимости ряда (3) следует расходимость ряда (4).

При использовании этого признака исследуемый ряд сравнивают с геометрической прогрессией

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, (a \ne 0), \tag{5}$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$, расходящимся гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6}$$

или рядом Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{7}$$

который при $p > 1$ сходится, а при $p \le 1$ расходится.

3°. *Второй признак сравнения.* Пусть даны два положительных ряда (3) и (4). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, то ряды одновременно сходятся или расходятся.

4°. *Радикальный признак Коши.* Пусть $a_n \ge 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, тогда ряд (1) сходится, если $K < 1$, и расходится, если $K > 1$.

В случае, когда $K = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым и следует пользоваться другими достаточными признаками.

5°. *Признак Даламбера.* Если существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то при $D < 1$ ряд (1) сходится, а при $D > 1$ расходится. При $D = 1$ признак Даламбера не дает возможности судить о сходимости ряда. В тех случаях, когда признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости, прибегают к более тонким и сложным признакам.

6°. *Признак Раабе.* Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = R,$$

то при $R > 1$ ряд (1) сходится, а при $R < 1$ ряд расходится.

7°. *Признак Куммера.* Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c_n \frac{a_n}{a_n + 1} - c_{n+1} \right) = K$, то при $K > 0$ ряд (1) сходится, а при $K < 0$ — расходится.

8°. *Признак Бертрана.* Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = B,$$

то при $B > 1$ ряд (1) сходится, а при $B < 1$ — расходится.

9°. *Признак Ермакова.* Пусть функция $f(x) = a_n$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = E$, тогда при $E < 1$ ряд (1) сходится, а при $E \geq 1$ — ряд расходится.

Функция e^x может быть заменена любой другой функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющей неравенству $\varphi(x) > 0$. Таким образом, из признака Ермакова может быть получен ряд других признаков, в зависимости от выбора функции $\varphi(x)$.

10°. *Признак Гаусса.* Представим для ряда (1) отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ в виде $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^2}$, где λ, μ — постоянные, а θ_n — ограниченная величина $|\theta_n| \leq L$; тогда ряд сходится, если $\lambda \geq 1$, $\mu > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$ или $\mu \leq 1$, $\lambda = 1$.

2.1. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)^2}$;
б) $\dfrac{1}{1+1^2} + \dfrac{1}{1+2^2} + \dfrac{1}{1+3^2} + \ldots$; в) $\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} + \ldots$.

Решение. а) Заменяем общий член ряда непрерывной функцией $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$ и исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{3x-1}\Bigg|_1^{\beta} = -\frac{1}{3} \lim_{\beta\to\infty} \left(\frac{1}{3\beta-1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

Интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и ряд.

б) Найдем сначала для ряда общий член

$$\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots$$

Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^\beta=\frac{\pi}{4}$.

Интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и ряд.

в) Найдем общий член ряда

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots=\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln n}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\beta\to\infty}\ln\ln x\Big|_2^\infty=\infty.$$

Нижний предел несобственного интеграла выбираем в соответствии с областью существования функции. Интеграл расходится, поэтому согласно интегральному признаку расходится и ряд.

2.2. Исследовать сходимость рядов: а) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{n-3}}$;

б) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{\ln x}$; в) $\displaystyle\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n+5}$.

Решение. а) Сравним данный ряд с расходящимся рядом Дирихле, когда $p=\dfrac{1}{3}$. Общий член ряда Дирихле будет $a_n=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

Так как $\sqrt[3]{n-3} < \sqrt[3]{n}$, то $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-3}} > \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Поскольку общий член нашего ряда больше общего члена расходящегося ряда Дирихле, то по первому признаку сравнения он тем более расходится.

б) Сравним данный ряд с гармоническим рядом. Так как $\ln n < n$, то общий член исследуемого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ и, соответственно, наш ряд согласно первому признаку сравнения расходится.

в) Найдем общий член ряда

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

$a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ и сравним с бесконечной геометрической прогрессией, знаменатель которой $q=\dfrac{2}{5}<1$. Эта убывающая геометрическая прогрессия представляет сходящийся ряд, а общий член исследуемого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии, т.к. делится еще на n. Отсюда следует, что наш ряд тем более сходится.

г) Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n+3}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+3)}.$$

Слева в скобках записан гармонический ряд, в котором отброшены первые три члена $\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$. Поскольку отбрасывание конечного числа первых членов ряда не влияет на сходимость или расходимость ряда, то вспомогательный ряд расходится.

Сравним общие члены заданного ряда с членами вспомогательного ряда. Для любого n имеет место $\frac{1}{2(n+3)} < \frac{1}{2n+5}$. Так как члены заданного ряда больше членов, расходящегося ряда, то он тем более расходится.

2.3. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$.

Решение. а) Сравниваем со сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Находим предел отношения общих членов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Так как ряд Дирихле сходится, то исследуемый ряд согласно второму признаку сравнения тоже сходится.

б) Сравниваем с бесконечно убывающей прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Пользуясь правилом Лопиталя, находим предел отношения их общих членов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{2^n \ln 2 - 1} = 1.$$

Так как предел существует и конечен, а бесконечно убывающая геометрическая прогрессия сходится, то исследуемый ряд согласно второму признаку сравнения тоже сходится.

в) Находим предел отношения общего члена исследуемого ряда и гармонического

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Поскольку предел существует и гармонический ряд расходится, то исследуемый ряд также расходится.

2.4. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

Решение. а) Воспользуемся радикальным признаком Коши.

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}=K.$

Так как предел $K<1$, то ряд сходится.

б) Находим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}.$$

Так как предел больше 1, то ряд расходится.

2.5. Исследовать на сходимость: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$; г) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\ldots+\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(4n-4)(4n-2)}$.

Решение. а) Воспользуемся признаком Даламбера. Зная общий член ряда, заменяем n на $n+1$ и находим член ряда

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)}.$$

Далее находим предел

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n+3)3^n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}.$$

Так как предел больше 1, то ряд расходится.

б) Находим член ряда: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$;

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Здесь $D < 1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

в) Находим: $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^n}{n!}$. Воспользуемся признаком Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}\dfrac{(n-1)!}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 0$; $D < 1$ ряд сходится.

г) Находим a_{n+1} член ряда $a_{n+1} = \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 4n(4n+2)}$.

По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{4n(4n+2)} = 0$, $D < 1$. Следовательно, ряд сходится.

2.6. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}$.

Решение. Воспользуемся признаком Раабе. Находим a_{n+1} член ряда: $a_{n+1} = \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}$; вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right)n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Здесь $R > 1$, следовательно, ряд сходится.

2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\frac{1}{2n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости Куммера.

Возьмем $c_n = n$, такой выбор возможен, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\frac{(2n-1)!(2n+3)!(2n+2)}{(2n+1)!2n(2n+1)!}-(n+1)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1}-(n+1)\right]=1$$

Здесь $K > 0$, следовательно, ряд сходится.

2.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{n^n}{e^n}$.

Решение. Находим $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$.

Воспользуемся признаком сходимости Бертрана. Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{n^n}{n!e^n}\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}-1\right)-1\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right)-1\right]=-\lim_{n\to\infty}\ln n=-\infty.$$

Здесь $B < 1$, следовательно ряд расходится.

2.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости Ермакова. Составляем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$ и находим предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x\ln\ln x\cdot e^x}{e^x\ln e^x\ln\ln e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\ln x=\infty.$

Здесь $E>1$, следовательно ряд расходится.

2.10. Исследовать на сходимость:

а) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+\ldots$

б) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}=F(\alpha,\beta,\gamma,1)$

— гипергеометрический ряд.

Решение. а) Найдем отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ и воспользуемся формулой Тейлора

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n}{2n-1}=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-1}=1+\frac{1}{2n}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}\frac{1}{(2n)^2}=1+\frac{1/2}{n}+\frac{1/4}{n^2},$$

$\theta_n=\dfrac{1}{4}$ — величина ограниченная, а $\mu=\dfrac{1}{2}<1$, следовательно ряд расходится.

б) Применим признак Гаусса

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)\left(1+\dfrac{\beta}{n}\right)}.$$

Пользуясь разложениями

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{n^2}; \qquad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{n^2}$$

представим отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ в виде $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$. Здесь θ_n — ограничена и ряд сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$.

13.3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Ряд с членами разных знаков называется *знакопеременным рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{1}$$

Ряд называется *знакочередующимся,* если знаки членов этого ряда строго чередуются

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-\ldots \tag{2}$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = |a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots \tag{3}$$

Сходящийся знакопеременный ряд (1) называется *условно сходящимся,* если ряд (3), составленный из абсолютных значений его членов, расходится.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд (2) сходится, если его члены при $n\to\infty$ монотонно убывают по абсолютной величине стремясь к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

При исследовании рядов (1), (2) на абсолютную сходимость следует использовать достаточные признаки сходимости.

Оценка погрешности. Если в сходящемся знакочередующемся ряде ограничиться первыми n членами, то остаток R_n ряда $R_n = S - S_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \ldots$ имеет знак первого отброшенного члена и будет меньше его по абсолютной величине $|R_n| < u_{n+1}$. В силу этого свойства знакочередующиеся ряды весьма удобны для вычислений с заданной степенью точности.

3.1. Исследовать на сходимость ряды: а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Решение. а) Данный ряд знакочередующийся. Найдем a_n член ряда: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Члены ряда убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Для выяснения сходимости ряда, составленного из абсолютных значений его членов, воспользуемся интегральным признаком

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to\infty} \ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \ln(2\beta - 1) = \infty$$

Так как интеграл расходится, то расходится и ряд, составленный из абсолютных значений его членов. Следовательно, исходный ряд — условно сходящийся ряд.

б) Ряд знакопеременный. При любом α предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \alpha n}{n^2} = 0$, следовательно, ряд может сходиться, т.к. члены его стремятся к нулю не монотонно. Рассмотрим теперь ряд, составленный из абсолютных значений его членов $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{|\sin \alpha n|}{n^2}$.

Сравнивая его со сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, убеждаемся $\frac{|\sin \alpha n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ по первому признаку сравнения в его сходимости. Отсюда следует, что исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

в) Запишем разложение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n} = -\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\ldots$$

Отсюда видно, что ряд знакопеременный. Исследуем на сходимость по признаку Даламбера ряд, составленный из абсолютных значений его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}, \quad D<1.$$

Так как ряд сходится, то искомый ряд сходится абсолютно.

г) Ряд знакочередующийся. По признаку Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ряд сходится. Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин. Воспользуемся интегральным признаком сходимости

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_2^{\beta}\ln x\, d\ln x=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\ln^2 x\Big|_2^{\beta}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\ln^2\beta-\ln^2 2\right)=\infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд. Таким образом, исходный ряд есть ряд условно сходящийся.

3.2. Найти сумму ряда $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\ldots$ с точностью до $0{,}01$.

Решение. Согласно свойствам сходимости знакочередующихся рядов абсолютная величина первого отброшенного члена должна быть меньше 0,01. Поскольку $\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}<\frac{1}{100}$, то достаточно найти сумму первых трех членов ряда, чтобы обеспечить заданную точность $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}=0,541$. Сумма отброшенного ряда $-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{10!}+\ldots$ по абсолютной величине меньше $\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$. Следовательно, вычисление выполнено с точностью до $\frac{1}{720}$.

13.4. Степенные ряды

1°. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, ... — постоянные числа, называется *степенным рядом* расположенным по степеням x.

Если степени x заменить степенями разности $x-x_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots, \tag{2}$$

который также называется степенным рядом.

2°. Число R называется *радиусом сходимости ряда* (1), если при $|x|<R$ ряд сходится абсолютно и расходится при $|x|>R$. Радиус сходимости ряда (1) находят по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Интервал $(-R,\ R)$ — называется *интервалом сходимости ряда.* Интервалом сходимости для ряда (2) служит интервал

$|x-x_0|<R$ с центром в точке $x = x_0$, внутри которого ряд сходится абсолютно; при $|x-x_0|>R$ — ряд расходится.

3°. Под областью сходимости рядов (1), (2) понимают один интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ для ряда (1) и точки $x = x_0$ для ряда (2), который может быть закрытым, открытым и полуоткрытым. Область сходимости степенных рядов обычно определяют с помощью признака Даламбера, применяя его к ряду, членами которого являются абсолютные величины членов исследуемого ряда. Граничные точки x, для которых признак Даламбера не решает вопрос о сходимости ряда ($D = 1$), исследуются особо, с помощью других достаточных признаков сходимости.

4.1. Найти область сходимости рядов: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n (n+1)\sqrt{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

Решение. а) Используем признак Даламбера:

$$a_n = \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}; \qquad a_{n+1} = \frac{(n+2)^5 x^{2n+2}}{2n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^{2n+2}\right|}{\left|x^{2n}\right|}\frac{(n+2)^5 (2n+1)}{(2n+3)(n+1)^5} = x^2$$

и определяем, при каких значениях x этот предел меньше 1; $x^2 < 1$, отсюда $-1 < x < 1$. В этом интервале ряд сходится абсолютно. При $|x| > 1$ ряд расходится. Граничные точки $x = \pm 1$ исследуем особо.

Пусть $x = -1$, тогда получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}$, который расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{2n+1}=\infty$. При $x = 1$ ряд имеет тот же вид и также расходится, следовательно, областью сходимости является открытый интервал $-1 < x < 1$.

б) Используем признак Даламбера

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n};\qquad a_{n+1}=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{n}{n+1}\right|=|x|$$

и определяем, при каких значениях x этот предел меньше единицы $|x| < 1$; $-1 < x < 1$. В этом интервале ряд сходится абсолютно.

При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. При $x=-1$ получим расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}}{n}$, все числа которого отрицательны. Таким образом, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый интервал $-1<x\le 1$.

в) По признаку Даламбера

$$a_n=\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n(n+1)\sqrt{n+1}};\qquad a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{3^{n+1}(n+2)\sqrt{n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{x^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+2}}=\frac{x^2}{3}.$$

Ряд сходится абсолютно при $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$. На границах $x=\pm\sqrt{3}$ ряд примет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$, который сходится по признаку Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}=0$. Следовательно, областью сходимости будет закрытый интервал $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$.

г) По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+2)!}\frac{|x+5|^{2n+3}(n+1)!}{n^5|x+5|^{2n+1}}=(x+5)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1.$$

Так как ряд сходится при любом значении x, то его интервал сходимости есть вся числовая ось $-\infty<x<\infty$.

д) По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}n5^n}{(n+1)5^{n+1}(x-3)^n}\right|=\frac{|x-3|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-3|}{5}.$$

Ряд сходится абсолютно при $\frac{|x-3|}{5}<1$ или $-5<x-3<5$, откуда $-2<x<8$.

Граничные точки исследуем особо. При $x=8$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и расходится. При $x=-2$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ и по признаку Лейбница сходится $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Таким образом, областью сходимости является полуоткрытый интервал $-2\le x<8$.

13.5. Функциональные ряды

1°. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+\dots,\qquad(1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, ... — некоторые функции переменной x, *называется функциональным.*

Под областью сходимости понимают множество значений аргумента x, при которых ряд (1) сходится. При определении области сходимости обычно используют признак Даламбера, а граничные точки в которых $D = 1$ исследуют с помощью других достаточных признаков сходимости рядов.

2°. *Равномерная сходимость.* Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ называется суммой ряда (1), а разность $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ — остатком ряда. Ряд (1) сходится *равномерно* на промежутке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$, можно найти такое N, что при $n > N$ для всех x из данного промежутка выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Функциональный ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на промежутке $[a, b]$, если существует такой сходящийся положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, что $|a_n(x)| \le c_n$ при $a \le x \le b$ (признак Вейерштрасса).

Если $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, ... — непрерывные функции в области их определения и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его сумма $f(x)$ есть функция непрерывная. Если ряд из непрерывных функций сходится, но неравномерно, то его сумма может оказаться разрывной функцией.

5.1. Определить область сходимости: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^{\ln x}}$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$; в) $\lg(x-4)+\lg^2(x-4)+\ldots+\lg^n(x-4)+\ldots$

Решение. а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln n}}$, и для определения сходимости сравним его со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. При $x > e$; $p = \ln x > 1$, следовательно, наш ряд на основании признака Вейерштрасса сходится абсолютно.

При $x = e$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ и является по признаку Лейбница условно сходящимся рядом. При $1 < x < e$; $0 < \ln x < 1$ и ряд по признаку Лейбница сходится, а сравнивая ряд с членами из абсолютных величин с рядом Дирихле убеждаемся, что он сходится неабсолютно. При $0 < x \le 1$; $\ln x \le 0$ и ряд расходится, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln x}} = \infty$. Следовательно, при $x > e$ ряд сходится абсолютно, при $1 < x \le e$ сходится условно, при $0 < x \le 1$ расходится.

б) Используем признак Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\sin\frac{x}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{x}{3^n}}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x}{3^{n+1}}\frac{x}{3^n}\sin\frac{x}{3^{n+1}}}{\frac{x}{3^n}\frac{x}{3^{n+1}}\sin\frac{x}{3^n}}\right| = \frac{2}{3} < 1.$$

Предел D меньше 1 и ряд сходится при любом значении x, область сходимости $-\infty < x < \infty$.

в) Логарифмическая функция $\lg(x-4)$ определена для $x - 4 > 0$, то есть $4 < x < \infty$. Данный ряд представляет геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \lg(x-4)$. Ряд сходится при условии $|q| < 1$, то есть $|\lg(x-4)| < 1$ или $-1 < \lg(x-4) < 1$.

Отсюда $\lg\frac{1}{10} < \lg(x-4) < \lg 10$ или $\frac{1}{10} < x - 4 < 10$, $4{,}1 < x < 14$.

Следовательно, данный ряд сходится для значений x из интервала $x \in \,]4{,}1;14[$, который содержится в промежутке $]4;\infty[$.

5.2. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ сходится равномерно на отрезке [0, 1). При каких n и любом x на этом отрезке остаток ряда $|R_n(x)| < 0{,}1$?

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. По признаку Даламбера

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\dfrac{n}{x^n}\right|=|x|$. Для всех значений x из полуоткрытого промежутка [0, 1) этот предел меньше 1, следовательно, в промежутке [0, 1) ряд сходится абсолютно. Поскольку $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\right|\le\dfrac{x^n}{n}$, то исследуемый ряд для x из промежутка [0, 1) сходится абсолютно и равномерно.

Остаток знакочередующегося ряда имеет знак своего первого отброшенного члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. $|R_n(x)|<a_{n+1}(x)$. Отсюда $|R_n(x)|<\dfrac{x^{n+1}}{n+1}<\dfrac{1}{n+1}\le 0{,}1$; $n+1\ge 10$; $n\ge 9$ для всех x на отрезке [0, 1).

5.3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ равномерно сходится в интервале $0<x<\infty$. При каком n сумма ряда может быть вычислена с точностью до 0,001 для любых $x\ge 0$.

Решение. При любом $x>0$ члены данного ряда меньше членов числового сходящегося ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,$$

следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно для всех значений x в интервале $0<x<\infty$. Остаток функционального ряда меньше остатка числового ряда, который представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, т. е.

$$R_n(x)<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}<0{,}001.$$

Отсюда $2^{n-1}>1000$ и сумма ряда может быть вычислена с заданной точностью при $n=11$.

5.4. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$.

Решение. При любом значении x данный ряд представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{1+x^2}<1$.

Ряд сходится и имеет сумму $f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$.

Найдем частичную сумму $S_n(x)$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n=\frac{x^2-x^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Отсюда остаток ряда $R_n(x)=\left|f(x)-S_n(x)\right|=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$.

При $x\to 0$ нельзя указать такое число N, при котором остаток ряда стремился бы к нулю, так как при любом n остаток равен единице. Следовательно, какое бы ε мы ни выбрали, будет $\left|f(x)-S_n(x)\right|>\varepsilon$ при $x\to 0$. Ряд сходится неравномерно.

13.6. Числовые и степенные ряды с комплексными членами

1°. *Числовым рядом с комплексными членами* называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n+\ldots, \tag{1}$$

где $c_n=a_n+b_ni$ — комплексные числа; a_n, b_n — действительные числа; $i^2=-1$.

Ряд с комплексными членами сходится, если одновременно сходятся ряды с действительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (2)$$

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся рядом, если сходится ряд, составленный из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Исследование комплексного ряда сводится к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами, причем, если хотя бы один из рядов расходится, то и комплексный ряд также расходится. При исследовании рядов на сходимость иногда целесообразно применять признаки Даламбера или Коши.

2°. *Степенным рядом с комплексными членами* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots, \qquad (3)$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная; $c_n = a_n + ib_n$ — комплексные постоянные.

Если степени z заменить степенями разности $z - z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_0 (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots, \qquad (4)$$

который также называется *степенным рядом с комплексными членами.* Здесь $z_0 = x_0 + iy_0$.

Поскольку комплексные числа на комплексной плоскости xOy представляются точкой, то область сходимости степенного ряда представляет круг с центром в начале координат для ряда (3) и с центром в точке $z = z_0$ для ряда (4).

Число R называется *радиусом круга сходимости ряда* (3),если $|z| < R$. Для ряда (4) $|z - z_0| < R$. Внутри круга сходимости ряды сходятся абсолютно; при $|z| > R$ или $|z - z_0| > R$ ряды расходятся. В точках, лежащих на границе круга сходимости, ряды могут как сходиться, так и расходиться.

6.1. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

Решение. а) Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2+i)^{n+1}2^n}{2^{n+1}n(2+i)^n}\right| = \frac{|2+i|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{|2+i|}{2} = \frac{\sqrt{4+1}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Поскольку предел больше 1, то данный ряд расходится.

б) Представим ряд по формуле (2) в виде суммы двух рядов с действительными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} - i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Сравнивая каждый ряд с гармоническим рядом, убеждаемся в их расходимости, следовательно, исходный ряд также расходится.

в) Представим исследуемый ряд в виде суммы двух знакочередующихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Оба числовых ряда с действительными членами согласно признаку Лейбница сходятся. Ряд же, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится, следовательно, исходный ряд сходится условно.

г) Используем радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1-in}{3n-(2n+3)i}\right|=$$

$$=\left|\frac{2-i}{3-2i}\right|=\left|\frac{(2-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}\right|=\frac{|8+i|}{13}=\sqrt{\frac{5}{13}}<1.$$

Поскольку предел меньше 1, то ряд сходится абсолютно.

6.2. Определить круг сходимости: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n!+i)z^{3n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(1-i)}{(2n-1)!}z^{2n}$.

Решение. а) Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{i^{n+1}z^{n+1}}{i^n z^n}\right|=|z|.$$

Согласно признаку Даламбера ряд сходится при всех значениях $|z|<1$. Вне этого круга, т. е. при $|z|>1$, ряд расходится. На границе этого круга ряд расходится, т.к. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n$ не удовлетворяет признаку сходимости Лейбница.

б) По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2i)^{n+1}n3^n}{(n+1)3^{n+1}(z-2i)^n}\right|=\frac{|z-2i|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|z-2i|}{3}.$$

Следовательно, радиус круга сходимости $|z-2i|<3$, вне этого круга $|z-2i|>3$ ряд расходится. На границе круга сходимости $|z-2i|=3$ ряд расходится, так как во всех точках этой границы расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

в) По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!+i)z^{3n+3}}{(n!+i)z^{3n}}\right| = |z|^3 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)+i}{n!+i}\right| = \infty.$$

Радиус круга сходимости данного комплексного степенного ряда $R = 0$ и ряд сходится только в одной точке (0,0).

г) По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(1-i)z^{2n+2}(2n-1)!}{(2n+1)!n!(1-i)z^{2n}}\right| = z^2 \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)!}{(2n-1)!2n(2n+1)} = 0.$$

Радиус круга сходимости данного степенного ряда $R = \infty$ и ряд сходится во всех точках комплексной плоскости.

13.7. Алгебраические действия над рядами

1°. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{2}$$

Под суммой (разностью) этих рядов понимают ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \ldots \tag{3}$$

Если ряды (1), (2) сходятся, то сходится и их сумма (разность).

2°. Под произведением рядов (1),(2) понимают ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n + \ldots \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 b_1, \\
c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\
c_3 &= a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n &= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.
\end{aligned}$$

Если ряды (1), (2) сходятся абсолютно, то ряд (4) сходится также абсолютно и его сумма равна произведению сумм рядов (1) и (2).

3°. Конечный или бесконечный предел S частичной суммы S_n ряда (1) при $n \to \infty$ называется суммой ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если в ряде (1) отбросить первые n членов, то получим ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots = S - S_n = R_n, \qquad (5)$$

который называется *остатком ряда.*

7.1. Составить сумму рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{2^n}$. **Сходится ли** эта сумма?

Решение. Сумму рядов находим по формуле (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(-1)^n - n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2^n}.$$

Сравнивая общий член полученного ряда по первому признаку сравнения со сходящейся геометрической прогрессией $\frac{1+(-1)^n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ убеждаемся в его сходимости.

7.2. Составить разность рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и **исследовать** ее на сходимость.

Решение. Разность рядов находим по формуле (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1-n}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(2n-1)}.$$

Сравнивая общий член полученного ряда по второму признаку сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2}$, убеждаемся в его расходимости.

7.3. Перемножить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$. **Сходится ли** это произведение?

Решение. Раскроем перемножаемые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Пользуясь схемой (4), находим произведение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^{3/2}}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{3/2}}\frac{1}{3^{n-3}}+\ldots+\frac{1}{n^{3/2}}\right)+\ldots$$

Для доказательства сходимости перегруппируем члены

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots\right)+\frac{1}{2^{3/2}}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-2}}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{3^{3/2}}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-3}}+\ldots\right)+\ldots$$

Выражения в скобках представляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем равным $\frac{1}{3}$. Находя сумму этой прогрессии и вынося ее за скобки, получим ряд Дирихле $\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{n^{3/2}}+\ldots\right)$, который сходится. Члены же исследуемого ряда меньше, поэтому он тем более сходится.

7.4. Оценить ошибку, допускаемую при замене ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

суммой его первых n членов.

Решение. Запишем остаток членов ряда после n членов

$$R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots>\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots=\frac{1}{n+1},$$

следовательно, $R_n>\frac{1}{n+1}$.

С другой стороны $R_n<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots=$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, остаток ряда, а следовательно, и ошибка заключена в пределах $\frac{1}{n+1}<R_n<\frac{1}{n}$.

7.5. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Решение. Первый из отброшенных членов ряда равен

$$\frac{n+1}{(2n+3)5^{n+1}}=\frac{1+\frac{1}{n}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)5^{n+1}}<\frac{1}{2\cdot 5^{n+1}}<0{,}001.$$

Отсюда $5^{n+1}>500$ и для заданной точности достаточно взять $n=3$ членов ряда.

13.8. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов

1°. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому замкнутому промежутку $[a,b]$, лежащему внутри интервала сходимости ряда $[-R,R]$, т. е.

$$\int_a^b a_0dx + a_1\int_a^b xdx + \ldots + a_n\int_a^b x^n dx + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{n+1}.$$

2°. Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать в любой точке, причем при почленном дифференцировании степенного ряда радиус сходимости не уменьшается и его можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

8.1. Найти сумму ряда: а) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$;

б) $1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \ldots$

Решение. а) Дифференцируя ряд почленно, получим

$$x^2 + x^6 + x^{10} + \ldots + x^{4n-2} + \ldots = \frac{x^2}{1-x^4}$$

геометрический ряд, который сходится при $|x| < 1$.

Интегрируя почленно этот ряд и его сумму, получим сумму ряда $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$

б) Интегрируя почленно ряд, имеем

$$x - x^3 + x^5 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-1} + \ldots = \frac{x}{1+x^2}$$

геометрический ряд, который сходится при $|x| < 1$.

Дифференцируя этот ряд почленно, получим исходный ряд и его сумму

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \ldots = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

13.9. Разложение функций в степенные ряды

1°. Если существует предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, то функциональный ряд сходится к некоторой функции $f(x)$, то есть $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=f(x)$.

Если функция $f(x)$ известна, то

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

выражает разложение функции $f(x)$ в ряд по функциям $f_i(x)$. Если функции $f_i(x)$ — степенные, то говорят, что функция $f(x)$ разложена в степенной ряд.

2°. Представление функции в виде степенного ряда называется *разложением функции в степенной ряд*. Общее правило разложения функции в ряд по степеням $(x-x_0)$ дается *рядом Тейлора*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{1}$$

а по степеням x *рядом Маклорена*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{2}$$

сходящимся к $f(x)$ для всех значений x, при которых остаточный член $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Остаточный член в форме Лагранжа для ряда (1) имеет вид

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}\left[x_0+(x-x_0)\theta\right];\quad (0\le\theta<1), \tag{3}$$

а для ряда (2)

$$r_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x\theta). \tag{4}$$

Ряд (1) служит для аналитического представления функции в окрестности точки $x = x_0$, а ряд (2) — в окрестности точки $x = 0$.

3°. Во многих случаях разложение функции в степенной ряд просто получить, если использовать стандартные разложения

I. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty),$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty),$

IV. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$ $(-1 < x < 1),$

V. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1),$

VI. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1),$

VII. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \ (-1 \le x \le 1),$

VIII. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(-1 < x < 1),$

IX. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty),$

X. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty).$

Следует помнить, что при разложении тригонометрических функций в ряд Маклорена или Тэйлора, аргумент x берется в радианной, а не в градусной мере.

9.1. Разложить в ряд по степеням x функции: а) $\operatorname{tg} x$; б) $e^{\cos x}$; в) $x^5+2x^4-x^2+x+1$ — по степеням $x+1$.

Решение. а) В соответствии с видом ряда Маклорена отыскиваем последовательные производные функции и находим их значения при $x=0$

$$f(x)=\operatorname{tg} x; \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}; \qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}; \qquad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=2\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}; \qquad f'''(0)=2,$$

$$f^{IV}(x)=8\frac{2\sin x\cos^2 x+3\sin^3 x}{\cos^5 x}; \qquad f^{IV}(0)=2,$$

$$f^{V}(x)=8\frac{\cos^2 x\left(2+3\sin^2 x\right)+5\sin^2 x\left(3-\cos^2 x\right)}{\cos^6 x}; \quad f^{V}(0)=16.$$

Подставляя найденные производные в ряд Маклорена (2), получим $\quad f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\ldots$

б) Находим последовательные производные и их значения при $x=0$

$$f(x)=e^{\cos x}; \qquad f(0)=e,$$

$$f'(x)=-e^{\cos x}\sin x; \qquad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=\left(\sin^2 x-\cos x\right)e^{\cos x}; \qquad f''(0)=-e,$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\sin 2x(3+\cos x)e^{\cos x}; \qquad f'''(0)=0,$$

$$f^{IV}(x)=\left(3\cos 2x+\cos x-9\cos x\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)e^{\cos x};\quad f^{IV}(0)=4e.$$

Подставляя найденные значения в ряд (2), получим

$$f(x)=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right).$$

в) Находим производные и их значения при $x=-1$

$f(x)=x^5+2x^4-x^2+x+1;$ $\qquad f(-1)=0,$

$f'(x)=5x^4+8x^3-2x+1;$ $\qquad f'(-1)=0,$

$f''(x)=20x^3+24x^2-2;$ $\qquad f''(-1)=2,$

$f'''(x)=60x^2+48x;$ $\qquad f'''(-1)=12,$

$f^{IV}(x)=120x+48;$ $\qquad f^{IV}(-1)=-72,$

$f^{V}(x)=120;$ $\qquad f^{V}(-1)=120.$

Подставляя найденные значения в ряд (1), получим

$$f(x)=(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5.$$

9.2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ функции: а) e^{-x^2}; б) $\cos^2 x$; в) $\sin^2 x\cos^2 x$; г) $\ln\frac{1+x}{1-x}$; д) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; е) $(\arcsin x)^2$; ж) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; з) $\operatorname{ch}^3 x$.

Решение. а) Заменяя в ряде (I) x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

б) Ряд можно получить умножением ряда (III) самого на себя или с помощью преобразования $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и разложения $\cos 2x$ по формуле (III) и замены x на $2x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

в) Преобразуем сначала это произведение $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$. Раскладывая $\cos 4x$ с помощью стандартного ряда (III) и заменяя x на $4x$, получим

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{4^2 x^2}{2!} + \frac{4^4 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{4^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^5 x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

г) Представим $\ln \frac{1+x}{1-x}$ в виде $\ln(1+x) - \ln(1-x)$. Первый логарифм дан разложением (VI), а второй может быть получен из него заменой x на $-x$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Вычитая этот ряд из ряда (VI), получим

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right).$$

д) Преобразуем данную функцию в произведение $x(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Далее используем биноминальный ряд IV, полагая в нем $m = -\frac{1}{2}$

$$x(1+x)^{-\frac{1}{2}}=x\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{1!}+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^n}{2^n n!}+\ldots\right)=$$

$$=x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1!}+\frac{3}{2^2}\frac{x^3}{2!}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\frac{x^4}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{n+1}}{2^n n!}+\ldots$$

е) Представим функцию в виде произведения $\arcsin x\arcsin x$ и воспользуемся стандартным рядом (VIII)

$$(\arcsin x)^2=\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\ldots\right)\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Перемножая ряды по схеме (7.2°), имеем

$$(\arcsin x)^2=x^2+\frac{2}{3}\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{(2n-2)!!x^{2n}}{(2n-1)!!n}+\ldots$$

ж) Заменяя в ряде (VII) x на $\sqrt{x}$, имеем

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2n-1}+\ldots$$

з) Представим гиперболический косинус в виде

$$\operatorname{ch}^3x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}+3\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{4}(\operatorname{ch}3x+3\operatorname{ch}x).$$

При разложении в ряд воспользуемся стандартным рядом X, заменяя в первой функции x на $3x$

$$\operatorname{ch}^3x=\frac{1}{4}\left[1+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}+\ldots+\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right].$$

Складывая почленно, будем иметь

$$\operatorname{ch}^3 x = 1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3^{2n-1}+1\right)x^{2n}}{(2n)!}.$$

13.10. Вычисление приближенных значений функций

Представление элементарных функций в виде стандартных рядов позволяет использовать эти ряды для вычисления приближенных значений функций.

10.1. Вычислить с помощью биноминального ряда $\sqrt[3]{130}$, ограничиваясь двумя членами ряда. Оценить погрешность.

Решение. Применяя биноминальный ряд (IV), представим данный корень в виде $\sqrt[3]{125+5} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$. Полагая $x=\frac{1}{25}$, $m=\frac{1}{3}$, запишем три члена разложения

$$\sqrt[3]{130} = 5\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{25}-\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{625}+\ldots\right).$$

Первые два члена дают результат $\sqrt[3]{130} = 5\frac{1}{15}$. Поскольку сходящийся ряд знакочередующийся, то погрешность приближенного значения суммы меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов, т. е. третьего члена разложения равного 0,0002.

10.2. Вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $0{,}001$. Сколько для этого нужно взять членов ряда?

Решение. Приведем аргумент к радианной мере и подставим получаемое число вместо x в разложение косинуса (III), тогда получим

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = 1-\frac{\pi^2}{100\cdot 2!}+\frac{\pi^4}{10000\cdot 4!}-\ldots = 1-0{,}0493+0{,}0004-\ldots$$

Для обеспечения требуемой точности достаточно взять первые два члена разложения $\cos 18^\circ = 0{,}951$, т.к. третий член по абсолютной величине меньше 0,001.

10.3. Вычислить ln 1,1 с точностью 0,0001.

Решение. Представим логарифм в виде ln (1 + 0,1) и воспользуемся рядом (VI), заменяя x на 0,1

$$\ln(1+0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} - \frac{0{,}0001}{4} + \ldots$$

Четвертый член можно отбросить, т.к. по абсолютной величине он меньше требуемой точности, таким образом ln (1 + 0,1) = 0,0953.

10.4. Вычислить lg 5 с точностью 0,001.

Решение. Перейдем от десятичного логарифма к натуральным $\lg = \dfrac{\ln 5}{\ln 10}$. Для разложения функции в ряд воспользуемся разложением в ряд $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (9.2,г):

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots\right).$$

Полагая $x = \dfrac{1}{2n+1}$, получим $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$ и

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right].$$

При $n = 1$, получим разложение для ln 2

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\frac{1}{9^2} + \ldots\right).$$

Ограничиваясь первыми тремя членами, можно найти ln 2 с тремя правильными десятичными знаками. Действительно, рассмотрим поправку, начиная с четвертого члена

$$\Delta=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{7}\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\frac{1}{9^5}+\ldots\right)<\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 7\cdot 9^2}<\frac{1}{1000}.$$

Отсюда $\ln 2 = 0{,}693$. Полагая $n = 4$, получим

$$\ln 5=2\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{9^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^4}+\ldots\right)=1{,}609.$$

Пользуясь вычисленными значениями $\ln 2$ и $\ln 5$, находим $\ln 10=\ln 2+\ln 5=2{,}302$. Таким образом, $\lg 5=\dfrac{1{,}609}{2{,}302}=0{,}699.$

13.11. Интегрирование функций

Разложение подынтегральных функций в ряды и вычисление интегралов почленным интегрированием рядов целесообразно в тех случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде с помощью известных приемов интегрирования.

11.1. Определить в виде рядов интегралы: а) $\int\frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\frac{e^x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^x\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$; г) $\int\limits_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ и указать область сходимости полученных рядов.

Решение. а) Раскладывая $\sin x$ в ряд и деля на x, получим

$$\int\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}+\ldots$$

Для определения области сходимости рядов воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}(2n+1)(2n+1)!}{(2n+3)(2n+3)!x^{2n+1}}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(2n+3)^2(2n+2)}=0.$$

Отсюда следует, что ряд сходится при $-\infty<x<\infty$.

б) Раскладывая e^x в ряд и деля на x, получим

$$\int\left(\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots\right)dx=C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$$

Для определения области сходимости воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n\cdot n!}{(n+1)(n+1)!x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=0.$$

Так как при $x=0$ первый член обращается в бесконечность, то область сходимости полученного ряда будет $(-\infty<x<0$ и $0<x<\infty)$.

в) Пользуясь разложением в ряд $\operatorname{arctg} x$ и интегрируя в пределах от 0 до x, будем иметь

$$\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+\ldots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots$$

По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}(2n-1)^2}{(2n+1)^2x^{2n-1}}\right|=x^2$ и ряд сходится в интервале $-1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда на границах интервала. При $x=1$ ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)^2}$, а при $x=-1$ вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$, которые по признаку Лейбница сходятся. Следовательно, область сходимости ряда будет $(-1 \le x \le 1)$.

г) Раскладывая в ряд $\ln(1+x)$ и интегрируя в пределах от 0 до x, будем иметь

$$\int_0^x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1} n^2}{(n+1)^2 x^n} \right| = |x|$ и ряд сходится в интервале ($-1 < x < 1$).

Граничные точки исследуем особо. При $x = 1$ ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, а при $x = -1$ вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{n^2}$. Поскольку из сравнения второго ряда с рядом Дирихле находим, что он сходится, то первый ряд, как знакочередующийся, тем более сходится. Таким образом, область сходимости ряда будет $(-1 \le x \le 1)$.

11.2. Вычислить: а) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ с точностью до 0,001;

б) $\int\limits_0^{1/4} \left(1 + x^3\right) dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. а) Раскладывая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, будем иметь

$$\int_0^1 \left(x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{3!} + \frac{x^{9/2}}{5!} - \frac{x^{13/2}}{7!} + \ldots \right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{7/2}}{7 \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{2x^{11/2}}{11 \cdot 5!} - \frac{2x^{15/2}}{15 \cdot 7!} + \ldots \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{7 \cdot 3!} + \frac{2}{11 \cdot 5!} - \frac{2}{15 \cdot 7!} + \ldots = 0{,}621.$$

При вычислении интеграла с заданной точностью достаточно ограничиться первыми тремя членами, т.к. четвертый член знакочередующегося ряда по абсолютной величине равен 0,00002 и, следовательно, остаток ряда меньше 0,001.

б) Пользуясь биноминальным разложением и интегрируя, имеем

$$\int_0^{1/4}\left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{2!}x^6+\ldots\right)dx = x+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2^2\cdot 7\cdot 2!}+\ldots\Bigg|_0^{1/4} =$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 4^4}-\frac{1}{2^2\cdot 7\cdot 2!4^7}+\ldots=0,2505.$$

Третий член этого знакочередующегося ряда, равный 0,000001, меньше требуемой точности, поэтому для вычисления исходного приближенного значения достаточно суммы первых двух членов.

11.3. Вычислить приближенные значения интегралов, взяв для: а) $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ три члена; б) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3\operatorname{arctg} x\,dx$ два члена разложения подынтегральной функции в ряд и указать погрешность.

Решение. а) Разложим подынтегральную функцию в ряд, взяв первые три члена

$$\int_0^{1/4}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}\right)\Bigg|_0^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{10\cdot 4^5}=0,24489.$$

Четвертый член знакочередующегося ряда по абсолютной величине равен 0,0000014, поэтому погрешность суммы первых трех членов равна 0,00001.

б) Разложим подынтегральную функцию в ряд, взяв первые два члена, и проинтегрируем

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3^5}}{3^5\cdot 5}-\frac{\sqrt{3^7}}{3^7\cdot 21}=0,012.$$

Третий член по абсолютной величине равен 0.00016, поэтому погрешность суммы первых двух членов 0,001.

Глава 14
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

14.1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка

1°. При рассмотрении физического явления или технологического процесса исследователи стараются выявить закономерности его протекания и описать данный процесс математически, т. е. найти функциональную зависимость между переменными параметрами этого процесса. В большинстве случаев, рассматривая некоторое явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости между переменными x и y, зато можем установить зависимость между величинами x, y и производными от y по x: $y', y'', ..., y^{(n)}$, т. е. написать обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F\left(x, y, y', y'', ... y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция своих аргументов; x — независимая переменная; y — функция переменной x, подлежащая определению.

При рассмотрении другого физического процесса замечаем, что ряд пока неизвестных параметров, которые удобно принять за функции, зависит от одной переменной x, тогда данный процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} &F_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'\right) = 0, \\ &F_2\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'\right) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'\right) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

2°. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Наивысшая производная в уравнении (1) n-го порядка, значит и уравнение n-го порядка. Любой же из остальных аргументов функции F может в этом соотношении явно и не участвовать.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т. е. обращающая его в тождество, называется *решением (или интегралом)* этого уравнения.

3°. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \qquad (3)$$

Если это уравнение разрешить относительно производной, то оно примет вид

$$y' = f\left(x, y\right). \qquad (4)$$

Для уравнения (4) справедлива теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема. Если в уравнении $y' = f\left(x, y\right)$ функция $f\left(x, y\right)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в некоторой области D на плоскости Oxy, содержащей некоторую точку $\left(x_0, y_0\right)$, то существует единственное решение этого уравнения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее условию: $y=y_0$ при $x=x_0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y=\varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

4°. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y=\varphi(x,C), \tag{5}$$

которая зависит от одной произвольной постоянной интегрирования C и удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной.

С геометрической точки зрения общий интеграл представляет собой семейство плоских кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C. Эти кривые называются *интегральными кривыми* данного дифференциального уравнения.

Например, общим решением уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \tag{6}$$

будет семейство функций

$$y=\frac{C}{x}, \tag{7}$$

зависящее от параметра C (рис. 14.1).

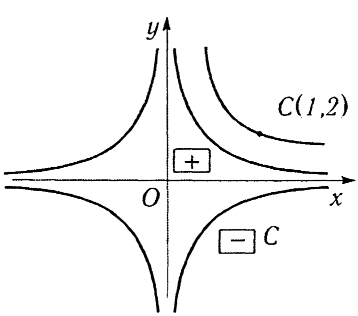

Рис. 14.1

5°. Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются *частными решениями (интегралами)* этого уравнения.

Отыскание частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию вида $y = y_0$ при $x = x_0$, называется *задачей Коши.*

Для уравнения (6) частное решение при начальных условиях $y_0 = 1$ при $x_0 = 2$ находится следующим образом.

Подставляем в решение (7) начальные условия, тогда $1 = \frac{C}{2}$, отсюда $C = 2$. Искомым частным решением будет функция

$$y = \frac{2}{x}, \tag{8}$$

график которой проходит через точку с координатами $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

6°. Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие особые решения. *Особым решением* называется решение, которое не содержится в общем решении ни при каком численном значении C, включая $\pm\infty$. Особое решение является результатом нарушения единственности решения задачи Коши.

Геометрически особому решению соответствует интегральная кривая, которая является огибающей семейства интегральных кривых, определяемых общим решением.

14.2. Уравнения с разделяющимися переменными

1°. Рассмотрим уравнение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{1}$$

в котором коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy — только от y. Такое уравнение называется *уравнением с разделенными переменными.*

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием первого слагаемого по x, а второго слагаемого по y

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C. \tag{2}$$

2°. Уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной

$$p(x)\cdot p(y)dx + q(x)\cdot q(y)dy = 0. \tag{4}$$

В таком уравнении путем деления его членов на $q(x)p(y)$ переменные разделяются

$$\frac{p(x)}{q(x)}dx + \frac{q(y)}{p(y)}dy = 0. \tag{5}$$

После разделения переменных, когда каждый член уравнения будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx + \int \frac{q(y)}{p(y)}dy = C. \tag{6}$$

3°. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c), \quad b \neq 0 \tag{7}$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $u = ax + by + c$, где u — новая неизвестная функция.

2.1. Найти общее решение уравнения $xdx + ydy = 0$.

Решение. Поскольку уравнение с разделенными переменными, то интегрируя, получим общее решение

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_0 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=2C_0=C_1=C^2.$$

Не трудно заметить, что решение на плоскости x, y представляет семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C.

2.2. Решить дифференциальные уравнения:

а) $\mathrm{tg}x\sin^2 y dx+\cos^2 x\,\mathrm{ctg}y dy=0$; б) $y'\sin x=y\ln y$; в) $xy'+y=y^2$.

Решение. а) Делим уравнение на $\cos^2 x\sin^2 y$, тогда получим

$$\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx+\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy=0.$$

Интегрируем

$$\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy,$$

откуда $\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 y=C$.

б) Представим уравнение в виде $\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$ и разделим переменные

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}.$$

Проинтегрируем, полагая, что $C_1=\ln|C|$, тогда

$$\int\frac{d\ln y}{\ln y}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C_1; \quad \ln|\ln y|=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln|C|.$$

Пропотенцируем $\ln|\ln y|=\ln\left|C\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\right|$, откуда

$$\ln y=C\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2} \quad \text{или} \quad y=e^{C\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

в) Запишем уравнение в дифференциальной форме $x\frac{dy}{dx}=y^2-y$ и разделим переменные $\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x}; \quad -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + C.$$

Произвольной постоянной целесообразнее придать форму логарифма $C_1 = \ln C$, тогда $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln C$. Потенцируя, находим общее решение уравнения $\frac{y-1}{y} = xC$.

2.3. Найти частное решение уравнения $y'\text{tg}x + y = 0$, удовлетворяющее начальному условию: $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Представим уравнение в виде $\frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}dx$ и проинтегрируем $\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$, откуда

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right| \quad \text{или} \quad y = \frac{C}{\sin x}.$$

Подставим в общее решение начальные условия $1 = \frac{C}{\sin\frac{\pi}{2}}$, откуда $C = 1$. Частное решение будет $y = \operatorname{cosec} x$.

2.4. Найти общий интеграл: а) $y' = x - y + 1$; б) $y' = \cos(x+y)$.

Решение. а) Используя подстановку $u = x - y + 1$; $u' = 1 - y'$, будем иметь

$$1 - u' = u \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = 1 - u.$$

Откуда $\frac{du}{u-1} = -dx$; $\ln|u-1| = -x + \ln|C|$ или

$$x = \ln\left|\frac{C}{u-1}\right|; \quad e^x = \frac{C}{u-1}; \quad u - 1 = Ce^{-x}.$$

Делая обратную подстановку, получим $Ce^{-x} = x - y$.

Общий интеграл примет вид $y = x - Ce^{-x}$.

б) Делаем замену переменной $u = x + y$; $u' = 1 + y'$. Подставляем в уравнение

$$u' - 1 = \cos u; \quad \frac{du}{dx} = \cos u + 1.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{\cos u + 1} = dx; \quad \int \frac{d\frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} = x; \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = x + C.$$

Отсюда общий интеграл $\operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2} = x + C$.

14.3. Однородные уравнения первого порядка

1°. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *однородным*, если P и Q — однородные функции от x и y, одной и той же степени (одинакового измерения).

Функция $F(x, y)$ называется однородной, если $F(ax, ay) = a^q F(x, y)$, где q — степень однородности.

Однородное уравнение можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad y' = \varphi\left(\frac{x}{y}\right). \tag{2}$$

Однородное уравнение с помощью подстановки $y = ux$ или $x = uy$, где u — некоторая функция от x или y, приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

2°. Уравнения, приводящиеся к однородным. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{3}$$

приводятся к однородным уравнениям с помощью подстановки $x = u + x_0$; $y = v + y_0$, если $ab_1 - a_1 b \neq 0$. Здесь x_0, y_0 координаты точки пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$.

Если же $ab_1 - a_1 b = 0$, то уравнение решается с помощью подстановки $u = ax + by + c$.

3°. Если в дифференциальном уравнении считать x и dx — величинами первого измерения, а y и dy — измерения q, то с помощью подстановки

$$y = ux^q \tag{4}$$

уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Уравнения, позволяющие подобрать q таким образом, называются *обобщенными однородными дифференциальными уравнениями.*

3.1. Проинтегрировать уравнения: а) $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$; б) $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$; в) $\left(x^2 + xy + y^2\right)dx = x^2 dy$; г) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$, $y = 0$ при $x = 1$.

Решение. а) Разрешим данное уравнение относительно производной

$$y' = \frac{y\cos\frac{y}{x} - x}{x\cos\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}.$$

Правая часть уравнения функция однородная нулевой степени, следовательно, данное уравнение однородное.

Поскольку правая часть уравнения является функцией отношения $\frac{y}{x}$, то делаем замену $y = ux$. Производная $y' = u + x\frac{du}{dx}$. Подставляя значения y' и $\frac{y}{x}$ в предыдущее уравнение приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{1}{\cos u} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\cos u}.$$

Разделим переменные $\cos u du=-\frac{dx}{x}$ и проинтегрируем $\sin u=-\ln|x|+C$. Подставляя вместо u его значение, окончательно получим

$$\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=C.$$

б) Полагая $x=uy$; $x'=u+y\frac{du}{dy}$, запишем уравнение в виде

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{uy-y}{uy+y} \quad \text{или} \quad y\frac{du}{dy}=\frac{u-1}{u+1}-u,$$

откуда

$$y\frac{du}{dy}=-\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dy}{y}; \qquad \operatorname{arctg}u+\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)=-\ln|y|+C.$$

Произведя обратную подстановку, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)+\ln|y|=C.$$

Окончательно общий интеграл может быть представлен в виде $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=C$.

в) Поскольку уравнение однородное, то полагая $y=ux$, $y'=u+x\frac{du}{dx}$ будем иметь

$$x^2+x^2u+x^2u^2=x^2\left(u+x\frac{du}{dx}\right); \qquad x\frac{du}{dx}=1+u^2;$$

$$\frac{du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}; \qquad \operatorname{arctg}u=\ln|x|+\ln|C|; \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|Cx|.$$

г) Разделим правую и левую часть на dx и сделаем замену $y = ux$

$$x\left(u + x\frac{du}{dx}\right) - ux = \sqrt{x^2 + u^2x^2}; \qquad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|Cx|; \qquad y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

Найдем частное решение. Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = 0$, находим постоянную интегрирования $C = 1$.

Таким образом, окончательно получим

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2.$$

3.2. Решить уравнения: а) $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0$; б) $(x-2y+5)dx + (2x-y+4)dy = 0$.

Решение. а) Разделив правую и левую часть уравнения на dx, преобразуем уравнение к виду

$$y' = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y-5}.$$

Так как коэффициенты пропорциональны $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$; $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, то используем подстановку $u = 2x+3y-1$; $u' = 2+3y'$.

Подставляя u и u' в уравнение, получим

$$\frac{u'-2}{3} = -\frac{u}{2u-3} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{u-6}{2u-3}.$$

Разделим переменные $\frac{2u-3}{u-6}du = dx$ и проинтегрируем

$$\int\left(2 + \frac{9}{u-6}\right)du = x; \quad 2u + 9\ln|u-6| = x + C.$$

Переходя к старым переменным, общее решение примет вид

$$x + 2y + 3\ln(2x+3y-7) = C.$$

б) Представим уравнение в виде

$$y' = -\frac{x-2y+5}{2x-y+4}.$$

Так как $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$, то из решения системы $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$ находим точку пересечения этих прямых $x_0 = -1, \quad y_0 = 2$.

Делаем замену $x = u-1, \quad y = v+2$, тогда $dx = du, \quad dy = dv$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$. Переходя к новым переменным, уравнение сводится к однородному $\frac{dv}{du} = \frac{u-2v}{2u-v}$.

Если сделать замену $v = ut, \quad v'_u = t + u\frac{dt}{du}$, то уравнение примет вид $t + u\frac{dt}{du} = \frac{u-2ut}{2u-ut}$ или $u\frac{dt}{du} = \frac{1-4t+t^2}{2-t}$.

Разделим переменные $\frac{2-t}{1-4t+t^2}dt = \frac{du}{u}$ и проинтегрируем

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2-4t+1\right)}{t^2-4t+1} = \ln|u|, \quad -\frac{1}{2}\ln\left|t^2-4t+1\right| = \ln\left|\frac{u}{C_1}\right|,$$

отсюда $t^2 - 4t + 1 = \frac{C_1^2}{u^2}$.

Заменяя переменную t и учитывая, что $C_1^2 = C$, получим $\frac{v^2}{u^2} - 4\frac{v}{u} + 1 = \frac{C}{u^2}, \quad v^2 - 4uv + u^2 = C$.

Переходя к переменным x, y, общий интеграл запишем в виде $(y-2)^2 - 4(y-2)(x+1) + (x+1)^2 = C$ или $(y-x-3)^2 - 2(y+2)(x+1) = C$.

3.3. Проинтегрировать уравнение $\left(x^2y^2-1\right)y' + 2xy^3 = 0$.

Решение. Если считать, что x и dx величины первого измерения, а y, dy — измерения $q = -1$, то исходное уравнение можно отнести к обобщенному однородному дифференциальному уравнению.

Воспользуемся заменой $y=\frac{u}{x}$; $y'=-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}$, тогда

$$\left(x^2\frac{u^2}{x^2}-1\right)\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}\right)=-2x\frac{u^3}{x^3};$$

$$\left(u^2-1\right)\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=-\frac{u^3}{x^2}-\frac{u}{x^2};\qquad \frac{u^2-1}{u\left(u^2+1\right)}du=-\frac{dx}{x}.$$

Представим дробь в левой части в виде суммы дробей и проинтегрируем $\int\frac{2udu}{u^2+1}-\int\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$;

$$\ln\left(u^2+1\right)-\ln|u|=-\ln|x|+\ln|C|;\qquad \frac{u^2+1}{u}=\frac{C}{x}.$$

Переходя к переменной y, окончательно получим

$$x^2y^2+1=Cy.$$

14.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

1°. *Линейным дифференциальным уравнением* первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной

$$y'+P(x)y=Q(x),\qquad (1)$$

где $P(x),Q(x)$ — известные функции от x.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y = uv$; $y'=u'v+v'u$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций

$$u'v+v'u+P(x)uv=Q(x) \text{ или } u'v+u\left[v'+P(x)v\right]=Q(x). \quad (2)$$

Выберем функцию v такой, чтобы $v'+P(x)v=0$, тогда

$$\frac{dv}{v}=-P(x)dx$$

и частное решение этого уравнения имеет вид

$$v=e^{-\int P(x)dx}.$$

Поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю, то получим $u'v=Q(x)$, откуда

$$u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C.$$

Произведение найденных решений u и v является общим решением исходного уравнения

$$y=v(x)\left(\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C\right). \quad (3)$$

2°. Уравнение вида

$$y'+P(x)y=y^nQ(x), \quad (4)$$

где $P(x),Q(x)$ — известные функции от x, а $n\neq 0$ и $n\neq 1$, называется *уравнением Бернулли.* Уравнение Бернулли отличается от линейного только тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y. Уравнение Бернулли с помощью подстановки $y=uv$; $y'=u'v+v'u$ также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

3°. *Метод Лагранжа.* Если в уравнении (1) $Q(x)\neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным, а если $Q(x)=0$ — линейным однородным.

Рассмотрим решение линейного однородного уравнения. Для этого разделим переменные

$$\frac{dy}{y}=-P(x)\,dx;\quad \ln|y|=-\int P(x)\,dx+\ln|C|,$$

откуда $y=Ce^{-\int P(x)dx}$, где C — постоянная интегрирования.

Варьируя постоянную интегрирования, т. е. считая $C(x)$ — некоторой дифференцируемой функцией от x, подлежащей определению, имеем

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставляя y в неоднородное уравнение (1), получим

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

откуда $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$

Таким образом, искомое общее решение неоднородного линейного уравнения примет вид

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right), \tag{5}$$

где C — постоянная интегрирования.

Метод Лагранжа (или вариации произвольной постоянной) может быть применен и к уравнению Бернулли (4).

4°. В ряде случаев уравнения приводятся к линейным или уравнению Бернулли, если принять y за независимую переменную, а x — за функцию.

4.1. Решить уравнения: а) $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$; б) $(x^2+1)y'+4xy=3$, найти решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Решение. а) Производя замену $y=uv$; $y'=u'v+uv'$, получим $u'v+uv'-uv\operatorname{ctg}x=\sin x$, или

$$u'v+u(v'-v\operatorname{ctg}x)=\sin x, \tag{6}$$

Выберем v так, чтобы $\dfrac{dv}{dx}-v\operatorname{ctg}x=0$. Разделяя переменные, находим $\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x dx$, откуда $v = \sin x$. Подставляя в уравнение (6) значение v, получим

$$\sin x \frac{du}{dx} = \sin x \text{ или } du = dx; \quad u = x + C.$$

Общее решение будет $y = (x + C)\sin x$.

б) Приведем уравнение к виду $y' + \frac{4x}{x^2+1} y = \frac{3}{x^2+1}$ и сделаем замену $y = uv$, тогда

$$u'v + v'u + \frac{4x}{x^2+1} uv = \frac{3}{x^2+1}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{4xv}{x^2+1}\right) = \frac{3}{x^2+1}. \qquad (7)$$

Приравниваем выражение в скобках нулю

$$\frac{dv}{dx} + \frac{4x}{x^2+1} v = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{4xdx}{x^2+1}; \quad \ln|v| = -2\ln(x^2+1); \quad v = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Подставляя частное решение v в выражение (7), получим

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2+1); \quad u = 3\int (x^2+1) dx = x^3 + 3x + C.$$

Общее решение примет вид

$$y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2+1)^2}.$$

Для нахождения постоянной интегрированиастроидользуемся начальным условием $y = 0$ при $x = 1$, тогда $C = -4$. Окончательно будем иметь

$$y = \frac{x^3 + 3x - 4}{(x^2+1)^2}.$$

4.2. Найти общий интеграл уравнения:

а) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$; б) $xy' + 3y = x^2$.

Решение. а) Уравнение сводится к линейному, если считать y за независимую переменную, а x — за функцию. Запишем исходное уравнение в виде

$$2y\frac{dx}{dy}=-y^2+6x \quad \text{или} \quad x'-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}.$$

Используя замену $x=uv;\ \ x'=u'v+v'u$, получим

$$u'v+v'u-\frac{3}{y}uv=-\frac{y}{2}, \quad u'v+u\left(v'-\frac{3v}{y}\right)=-\frac{y}{2}, \quad v'=\frac{3v}{y},$$

$$\frac{dv}{v}=3\frac{dy}{y}, \quad v=y^3. \tag{8}$$

Подставляя частное решение v в выражение (8), будем иметь $u'y^3=-\frac{y}{2}, \quad du=-\frac{1}{2}\frac{dy}{y^2}, \quad u=\frac{1}{2y}+C.$

Таким образом, окончательно получим

$$x=\left(\frac{1}{2y}+C\right)y^3.$$

б) Воспользуемся методом Лагранжа. Найдем сначала решение однородного уравнения $xy'+3y=0$. Разделим переменные $\frac{dy}{y}=-\frac{3dx}{x}, \quad \ln|y|=-3\ln|x|+\ln|C|, \quad y=\frac{C}{x^3}.$

Пусть постоянная интегрирования зависит от x, т. е.

$$y=\frac{C(x)}{x^3}, \tag{9}$$

тогда $y'=\frac{1}{x^3}\frac{dC}{dx}-3Cx^{-4}.$

Подставим y' и y в исходное уравнение

$$x\left(\frac{1}{x^3}\frac{dC}{dx}-3Cx^{-4}\right)+\frac{3C}{x^3}=x^2, \quad \frac{dC}{dx}=x^4, \quad C(x)=\frac{x^5}{5}+C_1.$$

Таким образом, из выражения (9) имеем

$$y=\frac{\frac{x^5}{5}+C_1}{x^3}=\frac{x^2}{5}+\frac{C}{x^3}.$$

4.3. Найти решение уравнений: а) $y'-y\operatorname{ctg}x=\frac{y^3}{\sin x}$;
б) $x^2y^2y'+xy^3=1$; в) $\left(x^2+2y+y^2\right)y'+2x=0$.

Решение. а) Данное уравнение есть уравнение Бернулли. Для его решения используем подстановку $y = uv$, тогда

$$u'v+v'u-uv\operatorname{ctg}x=\frac{(uv)^3}{\sin x},\qquad u'v+u\left(v'-v\operatorname{ctg}x\right)=\frac{(uv)^3}{\sin x},$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{\cos x dx}{\sin x},\quad \ln|v|=\ln|\sin x|,\quad v=\sin x. \tag{10}$$

Подставляя частное решение в уравнение (10), получим

$$u'\sin x=u^3\sin^2 x,\qquad \frac{du}{u^3}=\sin x dx,$$

$$\frac{1}{2u^2}=\cos x+C_1,\qquad u=\frac{1}{\sqrt{2\cos x+2C_1}}.$$

Таким образом, полагая $2C_1=C$, имеем

$$y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}.$$

б) Разделим на x^2y^2 правую и левую часть уравнения

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2y^2}. \tag{11}$$

Теперь видно, что это уравнение Бернулли. Для его решения воспользуемся методом Лагранжа.

Найдем сначала решение однородного уравнения

$$y'+\frac{y}{x}=0,\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},\quad \ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|,\quad y=\frac{C}{x}.$$

Считаем, что $C(x)$ — зависит от x, т. е.

$$y=\frac{C(x)}{x}. \qquad (12)$$

Подставим y и y' в исходное уравнение (11)

$$\frac{1}{x}C'-\frac{C}{x^2}+\frac{C}{x^2}=\frac{x^2}{x^2C^2}, \qquad C^2dC=xdx,$$

$$\frac{C^3}{3}=\frac{x^2}{2}+C_1, \qquad C(x)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+3C_1}.$$

Таким образом, из выражения (12), полагая $3C_1 = C$, получим $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}$.

в) Принимаем y за независимую переменную, а x — за функцию. Тогда

$$2x\frac{dx}{dy}+x^2=-2y-y^2, \qquad x'+\frac{x}{2}=-\frac{2y+y^2}{2x}.$$

Последнее уравнение есть уравнение Бернулли. Воспользовавшись заменой $x=uv$, $x'=u'v+v'u$, получим

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{2}\right)=-\frac{2y+y^2}{2uv}. \qquad (13)$$

Откуда

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{2}, \qquad \ln|v|=-\frac{1}{2}dy, \qquad v=e^{-\frac{y}{2}}.$$

Подставляя частное решение в уравнение (13), будем иметь

$$\frac{du}{dy}e^{-\frac{y}{2}}=-\frac{2y+y^2}{2ue^{-\frac{y}{2}}}, \qquad 2udu=-\int\left(2y+y^2\right)e^ydy, \qquad u^2=C-y^2e^y.$$

Таким образом, $x=\sqrt{C-y^2e^y}\,e^{-\frac{y}{2}}$ или $x^2=\left(C-y^2e^y\right)e^{-y}$, $x^2+y^2=Ce^{-y}$.

14.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1°. Если для дифференциального уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

справедливо равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

то уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах* и может быть записано в виде $du(x,y)=0$.

а) Общий интеграл находится по одной из формул

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C, \tag{3}$$

или

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C,$$

где x_0, y_0 — координаты некоторой фиксированной точки, причем $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)\neq 0$.

б) Поскольку полный дифференциал функции u равен сумме частных дифференциалов $\frac{\partial u}{\partial x}dx=Pdx$, $\frac{\partial u}{\partial y}dy=Qdy$, то интегрируя их по отдельности, считая в первом случае y постоянной, а во втором x, найдем два вырциклоидфункции

$$u=\int Pdx+\varphi(y);\quad u=\int Qdy+\psi(x), \tag{4}$$

здесь $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — некоторые функции.

Общее решение находится подстановкой в первое выражение вместо $\varphi(y)$ всех членов из второго выражения, зависящциклоидко от y, или наоборот.

2°. Пусть левая часть уравнения (1) не является полным дифференциалом, однако можно найти такую функцию

$\mu=\mu(x,y)$, что умножая уравнение на нее, произведение $\mu(Pdx+Qdy)$ будет полным дифференциалом

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{5}$$

Функция μ называется *интегрирующим множителем* и легко находится в двух случаях:

а) если $\mu=\mu(x)$, то из выражения (5) следует

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx. \tag{6}$$

б) если $\mu=\mu(y)$, то из выражения (5) следует

$$P\frac{d\mu}{dy}+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy. \tag{7}$$

Признаком существования интегрирующего множителя является отсутствие в выражении (6) переменной y, а в выражении (7) переменной x.

5.1. Решить уравнения: а) $(x+y)dx+(x-2y)dy=0$;

б) $\left(x-e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0.$

Решение. а) Вначале надо убедиться, что данное уравнение в полных дифференциалах. Полагая $P=x+y$; $Q=x-2y$, подставляем их значения в выражение (2)

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(x-2y)}{\partial x}=1.$$

Так как равенство справедливо, то общий интеграл находим по формуле (3), считая, что $x_0=0$, $y_0=0$

$$u=\int_0^x(x+y)dx-\int_0^y 2ydy=\frac{x^2}{2}+xy-y^2.$$

Отсюда общее решение $\frac{x^2}{2}+xy-y^2=C$.

б) Полагая $P=x-e^{\frac{x}{y}}$, $Q=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$, подставляем их в выражение (2) и убеждаемся, что это уравнение в полных дифференциалах.

$$\frac{\partial\left(x-e^{\frac{x}{y}}\right)}{\partial y}=\frac{\partial e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)}{\partial x}=\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}.$$

Для нахождения функции u интегрируем ее частные дифференциалы по формулам (4), считая в первом случае y постоянной величиной, а во втором — x

$$\int Pdx=\int\left(x-e^{\frac{x}{y}}\right)dx=\frac{x^2}{2}-ye^{\frac{x}{y}}+\varphi(y),$$

$$\int Qdy=\int e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=-ye^{\frac{x}{y}}+\psi(x).$$

Подставляя из первого выражения все члены, зависящие от x, во второе и приравнивая постоянной интегрирования, получим $\frac{x^2}{2}-ye^{\frac{x}{y}}=C$.

5.2. Решить уравнения: а) $\left(x^2+y\right)dx-xdy=0$;
б) $\left(xy^2+y\right)dx-xdy=0$ при условии $y(1)=1$.

Решение. а) Здесь $P=x^2+y$; $Q=-x$. Подставляя P и Q в выражение (6), получим

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2dx}{x};\quad \ln|\mu|=-2\ln|x|;\quad \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Умножим на интегрирующий множитель левую часть уравнения $\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$.

Проверим по условию (5) — является ли это уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial\left(1+\frac{y}{x^2}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{x}\right)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}.$$

Находим неопределенные интегралы

$$\int \mu P dx=\int\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx=x-\frac{y}{x}+\varphi(y),$$

$$\int \mu Q dy=-\int\frac{1}{x}dy=-\frac{y}{x}+\psi(x).$$

Так как во втором выражении нет членов, зависящих только от y, то есть $\varphi(y)=0$, то общее решение получается из первого результата $x-\frac{y}{x}=C$.

б) Здесь $P=xy^2+y$, $Q=-x$. Подставляя P и Q в выражение (7), получим $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{xy^2+y}(-1-2xy-1)dy=-\frac{2dy}{y}$,

$\ln|\mu|=-2\ln|y|$, $\mu=\frac{1}{y^2}$.

Умножим на интегрирующий множитель левую часть уравнения $\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$.

Проверим, является ли это уравнение в полных дифференциалах по условию (5)

$$\frac{\partial\left(x+\frac{1}{y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Поскольку равенство выполнено, то частный интеграл находим по формуле (3), считая, что $x_0=1$, $y_0=1$, $C=0$.

$$\int_1^x \left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\int_1^y \frac{1}{y^2}dy=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right)\Bigg|_1^x+\frac{1}{y}\Bigg|_1^y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}-\frac{3}{2}=0,$$

$$x^2y+2x=3y.$$

14.6. Уравнение Лагранжа и Клеро

1°. Дифференциальное уравнение вида

$$y=x\varphi(y')+\psi(y') \tag{1}$$

называется *уравнением Лагранжа.*

Если положить $y'=p$ и принять x за функцию, то после дифференцирования уравнение (1) сводится к линейному относительно x

$$[\varphi(p)-p]\frac{dx}{dp}+\varphi'(p)x+\psi'(p)=0, \tag{2}$$

где p — независимая переменная.

Интегрируя уравнение (2) и подставляя найденное значение x в уравнение (1), получим общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде. Общее решение в обычном виде можно получить исключением параметра p. Кроме того, из условия $\varphi(p)-p=0$, уравнение (1) может иметь особые и частные решения вида

$$y=x\varphi(p)+\psi(p). \tag{3}$$

2°. Если в уравнении Лагранжа $\varphi(y')=y'$, то получим *уравнение Клеро*

$$y=xy'+\psi(y'). \tag{4}$$

Полагая $y'=p$ и дифференцируя, находим, что $p = C$ и $x=-\psi'(p)$.

Отсюда общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y = Cx + \psi(C), \tag{5}$$

а особое решение получается исключением параметра p из уравнений

$$y = px + \psi(p); \quad x = -\psi'(p). \tag{6}$$

Общее решение представляет собой семейство прямых, а особое является огибающей этого семейства.

6.1. Решить уравнения: а) $y = 2xy' - \sqrt{1 + y'^2}$;

б) $y = xy' + \dfrac{1}{y'^2}$.

Решение. а) Данное уравнение есть уравнение Лагранжа. Полагаем $y' = p$, тогда уравнение примет вид $y = 2xp - \sqrt{1 + p^2}$. Продифференцируем его

$$dy = 2pdx + 2xdp - \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Так как $dy = pdx$, то

$$pdx + 2xdp = \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Таким образом, решение свелось к линейному уравнению. Используя замену $x = uv$; $x' = u'v + v'u$, где u, v — функции от p, будем иметь

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{p}v\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Отсюда $\dfrac{dv}{v} = -2\dfrac{dp}{p}$; $v = \dfrac{1}{p^2}$ и

$$\frac{du}{dp} = \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}}; \quad u = \int \frac{p^2 + 1}{\sqrt{1 + p^2}}dp - \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим

$$u=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|+C.$$

Окончательно общий интеграл в параметрической форме примет вид

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{2p}-\dfrac{1}{2p^2}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|; \\ y=2px-\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

б) Это уравнение Клеро. Полагаем $y'=p$, тогда уравнение примет вид $y=px+\frac{1}{p^2}$. Дифференцируем его

$$dy=pdx+xdp-\frac{2}{p^3}dp.$$

Так как $dy=pdx$, то

$$xdp-\frac{2}{p^3}dp=0 \quad \text{или} \quad dp\left(x-\frac{2}{p^3}\right)=0.$$

Отсюда, либо $dp=0$, либо $x=\frac{2}{p^3}$. Если положить, что $dp=0$, то $p=C$ и $y=Cx+\frac{1}{C^2}$ будет общим решением данного уравнения.

Если положить, что $x=\frac{2}{p^3}$, то $y=\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^2}=\frac{3}{p^2}$, и получим особое решение $x=\frac{2}{p^3}$, $y=\frac{3}{p^2}$. Исключая отсюда параметр p, находим особое решение в явном виде $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$.

Докажем, что семейство прямых, определяемых общим решением, представляет собой семейство касательных к особой интегральной кривой, т. е. особое решение является огибающей этого семейства.

Уравнение касательной к особой кривой в некоторой точке (x_0, y_0) имеет вид $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, где производная y_0', найденная из уравнения кривой в точке x_0, равна $y_0' = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x_0}}$. Подставляя сюда значение $y_0 = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x_0^2}$ и упрощая, находим $y = x\sqrt[3]{\dfrac{2}{x_0}} + \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2x_0^2}$.

Если считать, что $C = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x_0}}$, то уравнение семейства касательных к особой интегральной кривой в произвольной точке (x_0, y_0) примет вид $y = Cx + \dfrac{1}{C^2}$, т. е. особое решение является огибающей этого семейства.

14.7. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1°. Если дифференциальное уравнение является уравнением высшей степени относительно производной

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

то, разрешая его относительно y', например, для случая второй степени, получим два уравнения

$$y' = f_1(x, y) \quad \text{и} \quad y' = f_2(x, y). \tag{2}$$

Геометрически это означает, что через каждую точку M некоторой плоской области проходят две интегральные кривые. Общее решение уравнения (1) в этом случае примет вид

$$F_1(x, y, C) = 0; \quad F_2(x, y, C) = 0. \tag{3}$$

Кроме того, уравнение (1) может иметь особое решение, которое может быть получено в результате исключения $y' = p$ из системы уравнений

$$f(x, y, p) = 0; \quad f'_p(x, y, p) = 0. \tag{4}$$

Геометрически особый интеграл представляет огибающую семейства кривых (3)

$$F(x, y, C) \equiv F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) = 0 \tag{5}$$

и может быть получен еще исключением C из системы уравнений

$$F(x, y, C) = 0; \quad F'_c(x, y, C) = 0. \tag{6}$$

Следует заметить, что кривые (4), (6), не всегда являются решениями уравнения (1) и в каждом конкретном случае необходима проверка.

2°. Если уравнение имеет вид

$$x = \varphi(y'), \tag{7}$$

то, полагая $y' = p$, получим $x = \varphi(p)$. Дифференцируя по x, считая p функцией x, получим $dx = \varphi'(p)dp$. Так как $dy = y'dx = pdx$, то $dy = p\varphi'(p)dp$.

Интегрируя последнее выражение, запишем решение уравнения (7) в параметрическом виде

$$x = \varphi(p); \quad y = \int p\varphi'(p)dp + C. \tag{8}$$

3°. Если уравнение имеет вид

$$y = \varphi(y'), \tag{9}$$

то, полагая $y' = p$, получим $x = \varphi(p)$.

Дифференцируя, будем иметь $dy = \varphi'(p)dp$. Учитывая, что $dy = pdx$, получим $pdx = \varphi'(p)dp$, откуда $dx = \dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$. Интегрируя последнее выражение, общее решение примет вид

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C; \quad y = \varphi(p). \tag{10}$$

Если есть возможность, то в решениях (8), (10) следует исключить параметр p.

4°. Если дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$y=\varphi(x,y'), \tag{11}$$

то, полагая $p=y'$, получим уравнение

$$y=\varphi(x,p). \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по x, считая p функцией x, получим

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{13}$$

Система уравнений (12), (13) является общим решением уравнения (11) в параметрическом виде. Определяя из (13) параметр p и подставляя в (12), если это возможно, находим общее решение уравнения (11) в явном виде.

5°. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$x=\psi(y,y'), \tag{14}$$

то, полагая $p=y'$, решение его находим из решения системы уравнений

$$x=\psi(y,p); \quad \frac{1}{p}=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{15}$$

7.1. **Решить** уравнения: а) $y=xy'^2+y'^2$; б) $xyy'^2+\left(x^2+y^2\right)y'+xy=0$.

Решение. а) Найдем решения, отличные от нуля. Решим уравнение относительно y'

$$y'^2=\frac{y}{x+1}; \qquad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1}}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\pm\frac{dx}{\sqrt{x+1}}; \qquad \int y^{-1/2}dy=\pm\int(x+1)^{-1/2}\,d(x+1).$$

Откуда

$$2y^{1/2} = \pm 2(x+1)^{1/2} + C \quad \text{или} \quad \sqrt{y} = \pm\sqrt{x+1} + C.$$

Общий интеграл (5) примет вид

$$\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+1} + C\right)\left(\sqrt{y} - \sqrt{x+1} - C\right) = y - \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2 = 0$$

или $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$.

Для нахождения особого интеграла воспользуемся системой (4), тогда получим

$$p^2 = \frac{y}{x+1}; \quad 2p = 0,$$

откуда $y = 0$. Проверка показывает, что $y = 0$ является также решением исходного уравнения.

б) Полагая $y' = t$, решаем уравнение вида $xyt^2 + \left(x^2 + y^2\right)t + xy = 0$ относительно t

$$t_{1,2} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2 - 1} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy} \pm \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$$

Откуда

$$t_1 = \frac{-x^2 - y^2 + x^2 - y^2}{2xy} = -\frac{y}{x}; \qquad t_2 = \frac{-x^2 - y^2 - x^2 + y^2}{2xy} = -\frac{x}{y}$$

или $y' = -\dfrac{y}{x}$ и $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Решение первого уравнения имеет вид $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$; $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$; $y = \dfrac{C}{x}$ — семейство гипербол.

Решение второго уравнения будет $ydy = -xdx$; $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C$; $x^2 + y^2 = C^2$ — семейство окружностей.

7.2. Решить уравнения: а) $\dfrac{x}{2} + y' = \ln y'$; б) $y = y'^2 e^{y'}$.

Решение. а) Приведем уравнение к виду $x=2(\ln y'-y')$ и положим $y'=p$, тогда $x=2(\ln p-p)$.

Продифференцируем это равенство

$$dx=2\left(\frac{dp}{p}-dp\right)=2\left(\frac{1}{p}-1\right)dp.$$

Так как $dy=pdx$, то получим $dy=2(1-p)dp$. Интегрируя, будем иметь $y=2p-p^2+C$.

Таким образом, общее решение в параметрическом виде будет $x=2(\ln p-p)$; $y=2p-p^2+C$.

б) Полагаем $y'=p$. Тогда $y=p^2e^p$. Дифференцируя это выражение по x, будем иметь $p=2pp'e^p+p^2e^p p'$. Откуда

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{e^p(2+p)};\quad p=0.$$

Разделяя переменные в первом уравнении, получим

$$(2+p)e^p dp=dx;\quad e^p(1+p)=x+C.$$

Общее решение имеет вид

$$x=e^p(1+p)+C;\quad y=p^2e^p.$$

Особое решение (4) легко получить, подставляя $p=0$ в уравнение $y=p^2e^p$, т. е. $y=0$.

7.3. Решить уравнения:

$$\text{а) } y=x(1+y')+y'^2;\quad \text{б) } x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}.$$

Решение. а) Полагая $y'=p$, будем иметь $y=x(1+p)+p^2$. Дифференцируем по x, тогда $pdx=(1+p)dx+xdp+2pdp$ или $\frac{dx}{dp}+x=-2p.$ Полученное уравнение, является линейным. Используя подстановку $x=uv$, имеем $u'v+u(v'+v)=-2p$. Откуда

$$v=e^{-p};\quad \frac{du}{dp}=-2pe^p;\quad u=2\left(e^p-pe^p\right)+C.$$

Следовательно, $x = 2(1-p) + Ce^{-p}$.

Таким образом, общее решение уравнения в параметрическом виде будет

$$x = 2(1-p) + Ce^{-p}; \qquad y = x(1+p) + p^2.$$

б) Полагая $y' = p$, будем иметь $x = \frac{y}{p} + \frac{1}{p^2}$. Воспользуемся вторым из выражений (15)

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dy}\left(\frac{y}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) = 0.$$

Приравнивая нулю первый множитель в последнем уравнении, находим

$$\frac{dp}{dy} = 0; \qquad p = \frac{1}{C} \qquad \text{и} \qquad x = Cy + C^2.$$

Из равенства нулю второго множителя получим

$$y = -\frac{2}{p}; \qquad yy' = -2.$$

Интегрируя последнее уравнение, будем иметь $y^2 = -4x$.

Таким образом, общий интеграл будет $x = Cy + C^2$; а особый $y^2 = -4x$.

14.8. Другие уравнения, разрешенные относительно производной

1°. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного

$$d(xy) = xdy + ydx; \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}; \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

легко решаются, если, соответственно, положить

$$xy = u; \qquad \frac{y}{x} = u; \qquad \frac{x}{y} = u.$$

2°. Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{1}$$

где P и Q — однородные функции степени r, а R — однородная функция степени $l(l \neq r-1)$, *называется уравнением Дарбу.*

При помощи подстановки $y = zx$ уравнение Дарбу приводится к линейному уравнению или уравнению Бернулли, если $Q \equiv 0$, то к уравнению с разделяющимися переменными.

3°. Уравнение вида

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{2}$$

называется уравнением Риккати.

Уравнение Риккати имеет решение только в некоторых случаях. Если известно какое-либо частное решение y_1, то подстановка $y = y_1 + \frac{1}{z}$ приводит уравнение Риккати к линейному виду.

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \tag{3}$$

где A, B, C — некоторые постоянные, имеет частное решение $y_1 = \frac{a}{x}$, если $(B+1)^2 \geq 4AC$. Произвольное число a определяется подстановкой y_1 в уравнение (3).

8.1. Решить уравнения: а) $y\cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx$; б) $ydx - (x - y^3)dy = 0$.

Решение. а) Левая часть уравнения напоминает дифференциал функции $u = y\sin x$. Действительно, $du = y\cos x dx + \sin x dy$. Отсюда имеем

$$du = \cos 2x dx, \quad u = \frac{1}{2}\sin 2x + C, \quad y \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

или $y = \cos x + \dfrac{C}{\sin x}$.

б) Преобразуем уравнение к виду

$$ydx - xdy = -y^3 dy, \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = -ydy.$$

Поскольку в левой части дифференциал частного $d\left(\dfrac{x}{y}\right)$, то, используя замену $\dfrac{x}{y} = u$, имеем $du = -ydy$. Отсюда $u = -\dfrac{y^2}{2} + C$. Следовательно, $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{y^2}{2} + C$ или $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y^2}{2} = C$.

8.2. Решить уравнения:

а) $\left(x^2 + 2y^2\right)dx - xydy - \left(xdy - ydx\right) = 0$; б) $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Решение. а) Исходное уравнение есть уравнение Дарбу. Полагаем $y = zx$, тогда

$$\left(x^2 + 2z^2x^2\right)dx - zx^2\left(xdz + zdx\right) - \left(x^2dz + zxdx - zxdx\right) = 0.$$

Отсюда $\left(1 + z^2\right)dx - \left(zx + 1\right)dz = 0$ или $x' - \dfrac{z}{1+z^2}x = \dfrac{1}{1+z^2}$.

Таким образом, уравнение свелось к линейному уравнению. Делаем замену $x = uv$, тогда получим $u'v + u\left(v' - \dfrac{zv}{1+z^2}\right) = \dfrac{1}{1+z^2}$. Откуда $v = \sqrt{1+z^2}$;

$$u = \int \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C; \quad x = z + C\sqrt{1+z^2}.$$

Исключая z с помощью замены $z = \dfrac{y}{x}$, будем иметь

$$x - \frac{y}{x} = C\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \ \text{или} \ \left(x^2 - y\right)^2 = C\left(x^2 + y^2\right).$$

б) Исходное уравнение есть уравнение Риккати вида (3). Частное решение ищем в виде $y_1 = \frac{a}{x}$. Подставляя y_1 в исходное уравнение, получим

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^2}; \quad a^2 + 2a + 1 = 0; \quad a = -1.$$

Следовательно, $y_1 = -\frac{1}{x}$. Делая замену $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$; $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$, получим

$$-\frac{1}{z^2} z' = \left(\frac{x-z}{xz}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{x-z}{xz}\right); \quad z' - \frac{z}{x} + 1 = 0,$$

т. е. решение свелось к линейному уравнению. Интегрируя его, находим $z = x(C - \ln x)$. Таким образом, окончательно будем иметь $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C - \ln x)}$.

14.9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1°. Пусть уравнение разрешено относительно старшей производной, а правая часть является функцией только от аргумента x, т. е. $y^{(n)} = f(x)$. Это уравнение решается последовательным интегрированием. Умножая обе части на dx и интегрируя, получим уравнение $(n - 1)$ – го порядка

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1.$$

Снова умножая на dx и интегрируя, получим уравнение $(n - 2)$ - го порядка

$$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(x) + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

После n – кратного интегрирования получим общий интеграл в виде функции от x и n произвольных постоянных интегрирования

$$y=\varphi_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n.$$

Для отыскания частного решения необходимо найти постоянные интегрирования (задача Коши). Для этого требуется n начальных условий $y=y_0, y'=y'_0,\ldots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ при $x=x_0$. Иногда для нахождения частного решения начальные условия задаются не в одной точке $x=x_0$, а на концах некоторого промежутка $x\in[x_1,x_2]$. Такие условия принято называть *граничными условиями.*

При нахождении частных решений постоянные интегрирования $C_1,C_2,\ldots,C_n$ находятся из системы уравнений

$$y_0=\varphi_n(x_0)+C_1x_0^{n-1}+C_2x_0^{n-2}+\ldots+C_n;$$
$$y'_0=\varphi_{n-1}(x_0)+C_1x_0^{n-2}+C_2x_0^{n-3}+\ldots+C_{n-1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_0^{(n-1)}=\varphi_1(x_0)+C_1$$

или непосредственно после того, как они появляются в процессе решения.

2°. Уравнение второго порядка вида $f(x,y',y'')=0$ не содержит явным образом искомой функции y. Обозначим $\frac{dy}{dx}=p$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид $f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0.$

Это уже уравнение первого порядка. Интегрируя его, найдем $p=p(x,C_1)$, откуда

$$y=\int p(x,C_1)dx+C_2.$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для определения значений постоянных C_1, C_2, при нахождении частного решения, используем начальные условия $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$. Первое условие означает, что из семейства интегральных линий выделяется такая линия, которая проходит через данную точку. Второе условие определяет направление линии заданием угла наклона касательной в этой точке.

3°. Уравнения второго порядка вида $f(y, y', y'') = 0$ не содержат явным образом независимого переменного x. Сделаем замену $\frac{dy}{dx} = p$, но теперь будем считать p функцией y, т. е. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Подставляя в исходное уравнение, получим $f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$. Интегрируя его, найдем $p = p(y, C_1)$. Откуда $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$ или $\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$. Интегрируя еще раз, получим общее решение $y = y(x, C_1, C_2)$.

4°. В ряде случаев понизить порядок уравнений можно с помощью подстановок:

1. Если уравнение не содержит явно искомую функцию, т. е. имеет вид $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, то с помощью подстановки $y' = p(x)$ порядок уравнения понижается на единицу $F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0$.

2. Если уравнение не содержит явно независимую переменную, т. е. имеет вид $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, то с помощью подстановки $y' = p(y)$, где за новый аргумент принимается y и $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)$ и т. д., порядок уравнения понижается на единицу.

3. Если уравнение имеет вид $y^{(n)} = f\left(y^{(k)}\right)$, то с помощью подстановки $y^{(k)} = p(x)$ порядок уравнения понижается на k единиц $p^{(n-k)} = f(p(x))$.

4. Если уравнение $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ является однородным относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, то при замене $y' = ty$, где $t(x)$ — новая неизвестная функция, порядок уравнения понижается на единицу.

9.1. Решить уравнения: а) $y^{(4)} = e^{2x}$; б) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$ при $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 2$.

Решение. а) Поскольку правая часть зависит только от x, то интегрируем правую и левую части последовательно четыре раза. Будем иметь

$$y''' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1,$$

$$y'' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2,$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 + C_2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

$$y = \int\left(\frac{1}{8}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx = \frac{1}{16}e^{2x} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

б) Поскольку правая часть зависит только от x, то решение находится непосредственным интегрированием правой и левой части. Постоянные интегрирования будем определять сразу же после интегрирования. Интегрируя по частям, будем иметь

$$y'' = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1 \quad \text{при } x = 1,\ \ 2 = -1 + C_1,\ \ C_1 = 3.$$

Интегрируя еще раз, получим

$$y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + 3x + C_2 \text{ при } x = 1,\ 1 = 3 + C_2,\ \ C_2 = -2.$$

Наконец, интегрируя по частям, окончательно решение примет вид

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C_3 \text{ при } x = 1,\ 0 = \frac{3}{2} - 2 + C_3,\ \ C_3 = \frac{1}{2};$$

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

9.2. Проинтегрировать уравнения: а) $x(y''+1)+y'=0$; б) $xy''=\sqrt{1+y'^2}$, $y(1)=0$, $y(e^2)=1$.

Решение. а) Данное уравнение не содержит y, следовательно, понизить его порядок можно с помощью подстановки $y'=p(x)$, тогда $y''=p'(x)$. Отсюда

$$x(p'+1)+p=0 \quad \text{или} \quad p'+\frac{p}{x}=-1.$$

Это линейное уравнение, поэтому делаем замену $p = uv$; $p'=u'v+v'u$ и интегрируем $u'v+u\left(v'+\dfrac{v}{x}\right)=-1$; $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x}$; $v=\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{u'}{x}=-1$; $du=-xdx$; $u=-\dfrac{x^2}{2}+C_1$; $p=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{C_1}{x}$.

Но $p=\dfrac{dy}{dx}$, поэтому имеем $dy=\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{C_1}{x}\right)dx$, откуда, интегрируя, находим $y=-\dfrac{x^2}{4}+C_1\ln|x|+C_2$.

б) Поскольку уравнение не содержит y, то делаем замену $y'=p$, $y''=p'$. Тогда $xp'=\sqrt{1+p^2}$ или $\dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{dx}{x}$.

Отсюда $\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|=\ln|x|+\ln C_1$; $p+\sqrt{1+p^2}=C_1x$; $\sqrt{1+y'^2}=C_1x-y'$; $2C_1xy'=C_1^2x^2-1$; $dy=\left(\dfrac{1}{2}C_1x-\dfrac{1}{2C_1x}\right)dx$; $y=\dfrac{x^2}{4}C_1-\dfrac{1}{2C_1}\ln|x|+C_2$.

Используя граничные условия, получим систему

$$\begin{cases} 0=\dfrac{C_1}{4}+C_2, \\ 1=\dfrac{e^4}{4}C_1-\dfrac{1}{C_1}+C_2, \end{cases}$$

решая которую, будем иметь

$$C_1=\frac{2}{e^2-1},\quad C_2=-\frac{1}{2\left(e^2-1\right)}\quad \text{и}\quad C_3=-\frac{2}{e^2+1},\quad C_4=\frac{1}{2\left(e^2+1\right)}.$$

Решения системы C_3 и C_4 следует отбросить, так как C_3 величина сугубо отрицательная и $\ln C_3$ не существует. Таким образом, частный интеграл

$$y=\frac{x^2-1}{2\left(e^2-1\right)}-\frac{e^2-1}{4}\ln|x|.$$

9.3. Проинтегрировать уравнения: а) $y''+2y\left(y'\right)^3=0$; б) $y''=\sqrt{1-\left(y'\right)^2}$.

Решение. а) Уравнение не содержит x, поэтому делаем замену $y'=p,\quad y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Тогда

$$p\frac{dp}{dy}+2yp^3=0\quad \text{или}\quad p\left(\frac{dp}{dy}+2yp^2\right)=0.$$

Отсюда $p=0$ и $\dfrac{dp}{dy}+2yp^2=0$.

Решение первого уравнения: $\dfrac{dy}{dx}=0,\quad y=C$. При отыскании решения второго уравнения разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dp}{dy}=-2yp^2,\quad \frac{dp}{p^2}=-2ydy,\quad -\frac{1}{p}=-y^2-C_1,\quad p=\frac{1}{y^2+C_1}.$$

Так как $p=\dfrac{dy}{dx}$, то

$$dy=\frac{dx}{y^2+C_1},\qquad \left(y^2+C_1\right)dy=dx,\qquad \frac{y^3}{3}+C_1y=x+C_2.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{y^3}{3}-x=C_2-C_1y\quad \text{и}\quad y=C.$$

б) Уравнение не содержит x и y, поэтому можно делать любую из двух выше рассмотренных подстановок. Естественно, целесообразно делать подстановку, которая ведет к более простому решению. Поэтому полагаем $y' = p$, $y'' = p'$, тогда $p' = \sqrt{1-p^2}$. Интегрируя, получим $\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = dx$, $\arcsin p = x + C_1$ откуда $p = \sin(x + C_1)$.

Но $p = \frac{dy}{dx}$, поэтому $dy = \sin(x + C_1)dx$ или $y = -\cos(x + C_1) + C_2$.

9.4. Проинтегрировать уравнения: а) $x^2y''' - (y'')^2 = 0$; б) $yy'' - (y')^2 = 0$; в) $y'''y'' = 1$; г) $y'y''' = 2(y'')^2$.

Решение. а) Уравнение не содержит явно функцию, поэтому делаем замену $y'' = p$, тогда $x^2p' = p^2$. Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2}, \quad -\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{C_1}, \quad p = \frac{C_1x}{x + C_1}.$$

Переходя к старой переменной, получим уравнение второго порядка с правой частью, зависящей только от x, т. е.

$$y'' = \frac{C_1x}{x + C_1}.$$

Интегрируем его два раза $y' = C_1(x - C_1\ln|x + C_1|) + C_2$;

$y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_1^2x + C_2x + C_3$; $C_2' = C_2 + C_1^2$;

$y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3$.

б) Уравнение является однородным относительно y, y' и y'', поэтому делаем замену $y' = ty$, $y'' = t'y + t^2y$.

Тогда получим $t'y + t^2y = \frac{t^2y^2}{y}$; $t' = 0$; $t = C_1$; $\frac{dy}{dx} = C_1y$; $\frac{dy}{y} = C_1dx$; $\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = C_1x$. Откуда $y = C_2e^{C_1x}$.

в) Делая замену $y'' = p(x)$; $y''' = \frac{dp}{dx}$, понизим порядок уравнения $\frac{dp}{dx} p = 1$. Разделяем переменные и интегрируем $pdp = dx$, тогда $\frac{p^2}{2} = x + C_1$, $p = \pm\sqrt{2x + C_1}$. Отсюда $y'' = \pm\sqrt{2x + C_1}$. Так как правая часть зависит только от x, то интегрируя дважды, получим

$$y' = \pm\int (2x + C_1)^{\frac{1}{2}}\, dx + C_2 = \pm\frac{1}{3}(2x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2;$$

$$y = \pm\frac{1}{15}(2x + C_1)^{\frac{5}{2}} + C_2 x + C_3.$$

г) Уравнение не содержит явно независимую переменную. Делаем замену

$$y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}, \qquad y''' = p\left(p\frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right),$$

тогда уравнение примет вид

$$p^2\left(p\frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) = 2p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Откуда

$$p^2 = 0, \quad y' = 0, \quad y = C \quad \text{и} \quad p\frac{d^2 p}{dy^2} - \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Поскольку последнее уравнение не содержит в явном виде y, то полагая $\frac{dp}{dy} = t$, $\frac{d^2 p}{dy^2} = t\frac{dt}{dp}$, получим $pt\frac{dt}{dp} - t^2 = 0$, откуда $t = 0$, $\frac{dp}{dy} = 0$, $p = C_1$, $y = C_1 x + C_2$ и $p\frac{dt}{dp} - t = 0$, $\frac{dt}{t} = \frac{dp}{p}$, $\ln|t| = \ln|C_1' p|$, $t = C_1' p$.

Интегрируем последнее уравнение

$$\frac{dp}{dy}=C_1'p,\quad \frac{dp}{p}=C_1'dy,\quad \ln|p|=C_1'y+\ln C_2',\quad p=C_2'e^{C_1'y}.$$

Наконец

$$\frac{dy}{dx}=C_2'e^{C_1'y},\qquad \frac{dy}{e^{C_1'y}}=C_2'dx,$$

$$-\frac{1}{C_2'}\int e^{-C_1'y}d\left(-C_1'y\right)=C_2'x+C_3',\quad -\frac{1}{C_1'}e^{C_1'y}=C_2'x+C_3'.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$y=C,\quad y=C_1x+C_2,\quad \frac{1}{C_1'}e^{-C_1'y}+C_2'x+C_3'=0.$$

14.10. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

1°. *Линейным однородным уравнением* называется уравнение

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}y'+P_ny=0, \tag{1}$$

все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — постоянные величины.

Общий интеграл линейного уравнения n-го порядка имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{2}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения этого уравнения.

Если искать частные решения в виде $y=e^{kx}$, то получим характеристическое уравнение $k^n+P_1k^{n-1}+\ldots+P_{n-1}k+P_n=0$. Порядок характеристического уравнения совпадает с порядком дифференциального уравнения. В зависимости от значений корней характеристического уравнения возможны следующие общие решения дифференциального уравнения:

1. Если все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения действительные и различные, то общий интеграл имеем вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}; \qquad (3)$$

2. Если действительный корень k_1 имеет кратность $r\left(k_1 = k_2 = \ldots = k_r\right)$, то в решении соответствующие члены заменяются слагаемым

$$e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1}\right);$$

3. Если характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то в решении соответствующая пара членов заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right);$$

4. Если пара комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ имеет кратность r, то соответствующие r пар членов в решении заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1}\right)\cos\beta x + \left(C_{r+1} + C_{r+2} x + \ldots + C_{2r} x^{r-1}\right)\sin\beta x\right].$$

2°. Если решением характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = 0$ является пара комплексно-сопряженных корней, то общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \qquad (4)$$

Приведем еще одну форму записи этого решения. Пусть $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$, где A и φ новые произвольные постоянные. Подставляя вместо C_1, C_2 их значения, общее решение примет вид

$$y = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi). \qquad (5)$$

Если в дифференциальном уравнении $p = 0$, то оно имеет вид $y'' + qy = 0$ и называется *дифференциальным уравнением свободных гармонических колебаний.* Корни его характеристического уравнения чисто мнимые $k_1 = \sqrt{q}i$; $k_2 = -\sqrt{q}i$, поэтому общее решение будет $y = A\sin\left(\sqrt{q}x + \varphi\right)$.

10.1. Найти решение уравнений: а) $y'' - 5y' - 6y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 6y' + 13y = 0$; г) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. а) Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 5k - 6 = 0$ и находим его корни. По теореме Виета $k_1 = 6$, $k_2 = -1$. Поскольку корни действительные и разные, то общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}.$$

б) Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ и находим его корни $k_1 = k_2 = 3$. Поскольку корни действительные и кратные, то общее решение имеет вид

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

в) Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 13 = 0$ и находим его корни $k_{1,2} = -3 \pm 2i$. В этом случае корни комплексно-сопряженные $\alpha = -3$, $\beta = 2$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

или, согласно равенству (5)

$$y = Ae^{-3x}\sin(2x + \varphi).$$

г) Составим характеристическое уравнение $k^2 + 16 = 0$ и находим его корни $k_{1,2} = \pm 4i$. В этом случае корни чисто мнимые $\alpha = 0$, $\beta = 4$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x \quad \text{или} \quad y = A\sin(4x + \varphi).$$

Решим теперь задачу Коши. Согласно первому начальному условию имеем $1 = C_1 + C_2 \cdot 0$, $C_1 = 1$. Находим производную $y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$. Согласно второму начальному условию $2 = -4C_1 \cdot 0 + 4C_2$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим частное решение $y = \cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x$.

10.2. Найти решение уравнений: а) $y''' - 6y'' + 13y' = 0$; б) $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0$; в) $y^{VI} + 4y^{IV} + 4y'' = 0$; г) $y^{V} - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 2$.

Решение. а) Составляем характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 13k = 0$ и находим его корни $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 3 \pm 2i$. Поскольку один корень действительный, а два комплексно-сопряженные, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 + e^{3x}\left(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x\right).$$

б) Составляем характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ и находим его корни $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Два корня действительные и разные, а два корня мнимые, следовательно, решение имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

в) Данному дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение $k^6 + 4k^4 + 4k^2 = 0$ или $k^2\left(k^4 + 4k^2 + 4\right) = 0$. Находим корни: два действительных кратных корня $k_1 = k_2 = 0$ и два двукратных мнимых сопряженных корня $k_{3,4} = i\sqrt{2}$, $k_{5,6} = -i\sqrt{2}$.

Таким образом, решение, согласно пунктам 2, 4, примет вид

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)\cos\sqrt{2}x + (C_5 + C_6 x)\sin\sqrt{2}x.$$

г) Составим характеристическое уравнение $k^5-k=0$ и найдем его корни $k_1=0$, $k_{2,3}=\pm 1$, $k_{4,5}=\pm i$. Общее решение примет вид

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4\cos x+C_5\sin x.$$

Для нахождения частного решения вычисляем производные

$$y'=C_2e^x-C_3e^{-x}-C_4\sin x+C_5\cos x,$$

$$y''=C_2e^x+C_3e^{-x}-C_4\cos x-C_5\sin x,$$

$$y'''=C_2e^x-C_3e^{-x}+C_4\sin x-C_5\cos x,$$

$$y^{IV}=C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4\cos x+C_5\sin x.$$

Используя начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2+C_3+C_4, \\ 1=C_2-C_3+C_5, \\ 0=C_2+C_3-C_4, \\ 1=C_2-C_3-C_5, \\ 2=C_2+C_3+C_4, \end{cases}$$

решая которую, находим: $C_1=-2$, $C_2=1$, $C_3=0$, $C_4=1$, $C_5=0$.

Таким образом, частное решение будет $y=e^x+\cos x-2$.

14.11. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно функции и ее производных

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}y'+P_ny=q(x). \qquad (1)$$

Это уравнение отличается от однородного уравнения наличием в правой части некоторой известной функции q от независимой переменной x.

Общий интеграл y линейного неоднородного уравнения равен сумме какого-либо его частного интеграла y_1 и общего интеграла u, соответствующего однородного уравнения (получающегося из неоднородного при $q = 0$), т. е. $y = u + y_1$.

1°. Для некоторых специальных видов функции $q(x)$ частный интеграл y_1 можно найти методом неопределенных коэффициентов. По виду правой части $q(x)$ можно заранее указать вид частного интеграла y_1, где неизвестны лишь числовые коэффициенты. Рассмотрим эти случаи:

1) $q(x) = e^{mx}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен. В частности, если $m = 0$, то $q(x) = P(x)$, а если $P(x)$ есть постоянная величина C (многочлен нулевой степени), то $q(x)$ — показательная функция Ce^{mx}.

2) $q(x) = e^{ax}\left(A\cos bx + B\sin bx\right)$.

3) $q(x) = P(x)\cos bx + f(x)\sin bx$; $P(x)$ и $f(x)$ — многочлены.

4) $q(x)$ — есть сумма рассмотренных выше случаев.

В этих случаях y_1 есть функция, подобная $q(x)$, т. е. отличающаяся от $q(x)$ только числовыми коэффициентами. Если число m (для первого случая) или числа $a \pm bi$ (для второго случая) являются корнями характеристического уравнения кратности r (соответствующего однородного уравнения), то y_1 отличается от $q(x)$ множителем x^r.

Написав по виду правой части $q(x)$ выражение функции y_1 с неопределенными буквенными коэффициентами, находят производные y_1', y_1'' и т. д. и подставляют $y_1, y_1', y_1'', \ldots$ в данное неоднородное уравнение. Сравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей, составляют систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов, решение которой и определяет частное решение неоднородного уравнения.

2°. Если по виду правой части $q(x)$ указать вид частного интеграла y_1 затруднительно, то его можно найти с помощью n квадратур по формуле

$$y_1 = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\int e^{(k_3-k_2)x}\ldots\int e^{(k_n-k_{n-1})x}\int q(x)e^{-k_n x}dxdx\ldots dxdx, \quad (2)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корни характеристического уравнения.

В частности, если уравнение второго порядка, то

$$y_1 = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\int q(x)e^{-k_2 x}dxdx, \quad (3)$$

если третьего порядка, то

$$y_1 = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\int e^{(k_3-k_2)x}\int q(x)e^{-k_3 x}dxdxdx. \quad (4)$$

В случае комплексных сопряженных корней бывает удобнее выражать тригонометрические функции через показательные по формулам Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha; \quad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad (5)$$

или

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right); \quad \sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right). \quad (6)$$

3°. *Метод вариации произвольных постоянных.* Пусть требуется решить неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = q(x). \quad (7)$$

Запишем решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

где y_1 и y_2 — частные решения однородного уравнения. Будем считать C_1 и C_2 неизвестными функциями x. Для их определения необходимо решить систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = q(x). \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему относительно C_1' и C_2' найдем $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$. Откуда

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \bar{C}_2.$$

Подставляя C_1 и C_2 в выражение (8), получим общее решение.

Если неоднородное уравнение n-го порядка и известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения (1) берем в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n, \tag{10}$$

где $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y^{(n-2)}{}_1 + C_2'y^{(n-2)}{}_2 + ... + C_n'y^{(n-2)}{}_n = 0, \\ C_1'y^{(n-1)}{}_1 + C_2'y^{(n-1)}{}_2 + ... + C_n'y^{(n-1)}{}_n = q(x). \end{cases}$$

11.1. Найти решение уравнений: а) $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 - 1$; б) $y'' - 2y' = 2 - 5x^2$; в) $y'' + 6y' + 5y = 8e^{3x}$; г) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$; д) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^x$; е) $y'' + 4y' - 5y = 3x - 8e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{4}{3}$.

Решение. а) Найдем решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ и находим его корни $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. Общее решение имеет вид $u = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$.

Поскольку правая часть неоднородного уравнения представляет многочлен второй степени, то частное решение y_1 следует искать в полной форме многочлена второй степени $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C — неопределенные коэффициенты. Так как предположили, что y_1 есть решение заданного уравнения, то подставив y_1, y_1', y_1'' в это уравнение, получим тождество относительно x

$$2A-4Ax-2B-3Ax^2-3Bx-3C=3x^2-1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой части

$$\begin{array}{ll} x^2 & 3=-3A, \\ x & 0=-4A-3B, \\ x^0 & -1=2A-2B-3C. \end{array}$$

Отсюда $A=-1,\ \ B=\frac{4}{3},\ \ C=-\frac{11}{3}$. Следовательно, имеем

$$y_1=-x^2+\frac{4x}{3}-\frac{11}{9}.$$

Общее решение исходного уравнения примет вид

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x^2+\frac{4x}{3}-\frac{11}{9}.$$

б) Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y''-2y'=0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2-2k=0$ и находим его корни $k_1=0,\ \ k_2=2$. Общее решение получаем в форме $u=C_1+C_2e^{2x}$.

Определяем форму частного решения y_1. Поскольку в правой части неоднородного уравнения $m=0$ и m совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение y' в форме многочлена второй степени умножается на x, т. е. $y_1=x\left(Ax^2+Bx+C\right)$.

Находим $y_1'=3Ax^2+2Bx+C,\ \ y_1''=6Ax+2B$ и подставляем y_1, y_1', y_1'' в заданное уравнение

$$6Ax+2B-6Ax^2-4Bx-2C=2-5x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{ll} x^2 & -6A=-5, \\ x & 6A-4B=0, \\ x^0 & 2B-2C=2. \end{array}$$

Решая эту систему уравнений, находим $A=\frac{5}{6}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=\frac{1}{4}$. Следовательно, $y_1=x\left(\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)$, а общее решение заданного уравнения примет вид

$$y=C_1+C_2e^{3x}+\frac{x}{2}\left(\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right).$$

в) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+6y'+5y=0$. Составим характеристическое уравнение $k^2+6k+5=0$ и найдем его корни $k_1=-1$, $k_2=-5$. Тогда общее решение примет вид $u=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}$.

Поскольку правая часть уравнения представляет показательную функцию, то частное решение ищем в подобном виде только с неопределенным коэффициентом $y_1=Ae^{3x}$. Находим производные $y_1'=3Ae^{3x}$, $y_1''=9Ae^{3x}$ и подставляем y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение $9Ae^{3x}+18Ae^{3x}+5Ae^{3x}=8e^{3x}$, откуда $A=\frac{1}{4}$.

Следовательно, $y_1=\frac{1}{4}e^{3x}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{4}e^{3x}.$$

г) Найдем решение соответствующего однородного уравнения $y''-6y'+9y=0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ и находим его корни $k_{1,2}=3$. Так как корни кратные, то решение имеет вид $u=\left(C_1+C_2x\right)e^{3x}$.

Поскольку в правой части $m=3$ и совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_1=Ax^2e^{3x}$. Находим производные $y_1'=A\left(2x+3x^2\right)e^{3x}$, $y_1''=A\left(2+12x+9x^2\right)e^{3x}$ и подставляем в исходное уравнение. После приведения подобных членов получим $2Ae^{3x}=4e^{3x}$, откуда $A=2$. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left(C_1 + C_2 x + 2x^2\right)e^{3x}.$$

д) Составляем характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $k^2 - 3k + 2 = 0$. Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Решение однородного уравнения будет

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Поскольку правая часть уравнения представляет произведение многочлена второй степени на показательную функцию и $m = 1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_1 = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x$. Находя производные y_1' и y_1'' и подставляя их в исходное уравнение, будем иметь

$$\left(6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C + 3Ax^2 + 2Bx + C + Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x -$$
$$-\left(9Ax^2 + 6Bx + 3C + 3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx\right)e^x + \left(2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx\right)e^x =$$
$$= \left(x^2 + x\right)e^x.$$

Приведя подобные члены и сравнивая неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему относительно A, B и C, решая которую, будем иметь $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = -3$. Следовательно, частное решение примет вид

$$y_1 = -x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}x + 3\right)e^x.$$

Окончательно решение будет

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}x + 3\right)e^x.$$

е) Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$ составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4k - 5 = 0$. Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -5$. Общее решение однородного уравнения примет вид

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Поскольку правая часть исходного уравнения равна сумме двучлена и показательной функции и $m = 1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение запишем также в виде суммы двучлена и показательной функции, причем показательную функцию умножаем на x, то есть $y_1 = Ax + B + Cxe^x$.

Находя производные y_1' и y_1'' и подставляя их в исходное уравнение, будем иметь

$$Ce^x + Ce^x + Cxe^x + 4\left(A + Ce^x + Cxe^x\right) - 5\left(Ax + B + Cxe^x\right) = 3x - 8e^x.$$

Приравнивая неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях x и при показательной функции, находим, что $A = -\frac{3}{5}$, $B = -\frac{12}{25}$, $C = -\frac{4}{3}$.

Таким образом, частное решение будет

$$y_1 = -\frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{3}xe^x,$$

а общее решение исходного уравнения примет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{3}xe^x.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. Находя производную

$$y' = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x} - \frac{3}{5} - \frac{4}{3}e^x - \frac{4}{3}xe^x$$

и значения y и y' при $x = 0$, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{12}{25}, \\ C_1 - 5C_2 = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{50}$.

Следовательно, частное решение исходного уравнения будет

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{50}e^{-5x} - \frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{3}xe^x.$$

11.2. Найти общее решение уравнений:

а) $y'' - 2y' + 10y = 2\sin 3x + 5\cos x$; б) $y'' - 3y = \sin 2x$;

в) $y'' + y = \cos x$; г) $y'' - y = \sin x - e^{-x}$; д) $y'' - 7y' + 6y = e^x \sin x$;

е) $y'' - 2y' = x\cos x$.

Решение. а) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + 10y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 10 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Так как $\alpha = 1$, а $\beta = 3$, то общее решение имеет вид

$$u = e^x\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Правая часть неоднородного уравнения представляет тригонометрический многочлен с разными аргументами у тригонометрических функций, поэтому частное решение ищем в полной форме двух тригонометрических многочленов

$$y_1 = A\cos 3x + B\sin 3x + C\cos x + D\sin x.$$

Находим производные

$$y_1' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - C\sin x + D\cos x,$$
$$y_1'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x - C\cos x - D\sin x.$$

Подставляем y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение и приравниваем неопределенные коэффициенты у одинаковых тригонометрических функций

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - C\cos x - D\sin x + 6A\sin 3x -$$
$$-6B\cos 3x + 2C\sin x - 2D\cos x + 10A\cos 3x + 10B\sin 3x +$$
$$+10C\cos x + 10D\sin x = 2\sin 3x + 5\cos x;$$

$$
\begin{array}{ll}
\cos 3x & 0=-9A-6B+10A, \\
\sin 3x & 2=-9B+6A+10C, \\
\cos x & 5=-C-2D+10C, \\
\sin x & 0=-D+2C+10D.
\end{array}
$$

Из решения системы имеем $A=\frac{12}{37}$, $B=\frac{2}{37}$, $C=\frac{9}{17}$, $D=-\frac{2}{17}$. Общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y=e^x\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+\frac{2}{37}\left(6\cos 3x+\sin 3x\right)+\frac{1}{17}\left(9\cos x-2\sin x\right).$$

б) Найдем общее решение однородного уравнения $y''-3y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-3=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{3}$. Общее решение будет $u=C_1e^{\sqrt{3x}}+C_2e^{-\sqrt{3x}}$.

Несмотря на то, что правая часть неоднородного уравнения одна тригонометрическая функция, частное решение ищем в полной форме тригонометрического многочлена

$$y_1=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Находим производные

$$y_1'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\quad y_1''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставляем y_1 и y_1'' в исходное уравнение, тогда

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-3A\cos 2x-3B\sin 2x=\sin 2x.$$

Приравниваем коэффициенты у одинаковых тригонометрических функций

$$
\begin{array}{ll}
\cos 2x & -4A-3A=0, \\
\sin 2x & -4B-3B=1.
\end{array}
$$

Отсюда $A=0$, $B=-\frac{1}{7}$ и общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2e^{-\sqrt{3}x}-\frac{1}{7}\sin 2x.$$

в) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Корни характеристического уравнения $k^2 + 1 = 0$ чисто мнимые и имеют вид $k_{1,2} = \pm i$, т. е. $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Общее решение однородного уравнения будет

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Поскольку правая часть неоднородного уравнения задана в виде тригонометрической функции и числа $a = 0$, $b = 1$ совпадают с корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения, которое ищем в полной форме тригонометрического многочлена, следует умножить на x, т. е. $y_1 = Ax \cos x + Bx \sin x$.

Находим производную

$$y_1'' = -2A \sin x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \sin x.$$

Подставим y_1, y_1'' в исходное уравнение $-2A \sin x + 2B \cos x = \cos x$ и приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, тогда получим, что $A = 0$, $B = \dfrac{1}{2}$. Отсюда решение неоднородного линейного уравнения будет

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

г) Для соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$ составим характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$. Его корни $k_{1,2} = \pm 1$. Общее решение однородного уравнения будет

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Поскольку правая часть исходного уравнения равна сумме тригонометрической и показательной функций, причем $m = -1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение также запишем в виде суммы

$$y_1 = A \cos x + B \sin x + Cxe^{-x}.$$

Находя y'' и подставляя все в исходное уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x - Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} - A\cos x - B\sin x - Cxe^{-x} = \sin x - e^{-x}.$$

Приравнивая неопределенные коэффициенты при одинаковых тригонометрических и показательной функциях, находим, что $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом, частное решение примет вид $y_1 = \frac{1}{2}\left(xe^{-x} - \sin x\right)$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left(xe^{-x} - \sin x\right).$$

д) Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ составим характеристическое $k^2 - 7k + 6 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $k_1 = 1$, $k_2 = 6$. Общее решение однородного уравнения будет $u = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

В соответствии с видом правой части частное решение исходного уравнения будет $y_1 = e^{x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$. Находя производные y_1', y_1'' и подставляя их в заданное уравнение, получим

$$e^{x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + e^{x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) + e^{x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) +$$
$$+ e^{x}\left(-A\cos x - B\sin x\right) - 7e^{x}\left(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x\right) +$$
$$+ 6e^{x}\left(A\cos x + B\sin x\right) = e^{x}\sin x.$$

Сокращая на e^{x} и приравнивая неопределенные коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, находим, что $A = \frac{5}{26}$, $B = -\frac{1}{26}$.

Частное решение примет вид

$$y_1 = \frac{1}{26} e^{x}\left(5\cos x - \sin x\right).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{1}{26}(5\cos x - \sin x)e^x.$$

е) Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' = 0$ составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$. Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения будет $u = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Правая часть неоднородного уравнения суть произведение двучлена на тригонометрическую функцию, поэтому частное решение представим в виде $y_1 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$.

Находя производные y_1', y_1'' и подставляя их в исходное уравнение, будем иметь

$$-A\sin x - A\sin x - (Ax + B)\cos x + C\cos x + C\cos x - (Cx + D)\sin x -$$

$$-2\big(A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x\big) = x\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты

$$\begin{array}{ll} \sin x & -A - A - D + 2B - 2C = 0, \\ \cos x & -B + C + C - 2A - 2D = 0, \\ x\sin x & -C + 2A = 0, \\ x\cos x & -A - 2C = 1. \end{array}$$

Из решения этой системы находим, что $A = -\frac{1}{5}$, $B = -\frac{14}{25}$, $C = -\frac{2}{5}$, $D = \frac{2}{25}$.

Таким образом, частное решение будет

$$y_1 = -\frac{1}{5}\left(x + \frac{14}{5}\right)\cos x - \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{5}\right)\sin x.$$

Отсюда общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}\left(x + \frac{14}{5}\right)\cos x - \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{5}\right)\sin x.$$

11.3. Решить уравнения: а) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$; б) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{-2x}$. $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Решение. а) Для соответствующего однородного уравнения $y^{IV}+5y''+4y=0$ составляем характеристическое уравнение $k^4+5k^2+4=0$. Находим его корни $k_{1,2}=\pm i$, $k_{3,4}=\pm 2i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет

$$u=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Поскольку число $a\pm bi$ совпадает с корнями характеристического уравнения $k_{1,2}$, то частное решение примет вид $y_1=Ax\cos x+Bx\sin x$. Находя производные y_1^{IV}, y'' и подставляя их в исходное уравнение, будем иметь $4A\sin x+Ax\cos x-$ $-4B\cos x+Bx\sin x+5(-2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x)+$ $+4(Ax\cos x+Bx\sin x)=3\sin x$. Приводя подобные члены и сравнивая коэффициенты у одинаковых тригонометрических функций, находим, что $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения будет $y_1=-\frac{1}{2}x\cos x$.

Окончательно, общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

б) Для соответствующего однородного уравнения $y'''+2y''+y'=0$ составляем характеристическое уравнение $k^3+2k^2+k=0$. Находим его корни $k_1=0$, $k_{2,3}=-1$. Учитывая кратность корней $k_{2,3}$, общее решение однородного уравнения запишем в виде $u=C_1+(C_2+C_3x)e^{-x}$.

Частное решение неоднородного уравнения по виду правой части будет $y_1=Ae^{-2x}$. Находя производные y_1', y_1'', y_1''' и подставляя их в исходное уравнение, будем иметь

$$-8Ae^{-2x}+8Ae^{-2x}-2Ae^{-2x}=2e^{-2x}.$$

Отсюда неопределенный коэффициент равен $A=-1$ и частное решение будет $y_1=-e^{-2x}$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{-x} - e^{-2x}.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. Находим сначала производные

$$y' = C_3 e^{-x} - (C_2 + C_3 x)e^{-x} + 2e^{-2x},$$
$$y'' = -C_3 e^{-x} - C_3 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)e^{-x} - 4e^{-2x}.$$

Подставляя в эти уравнения y, y' и y'' при $x = 0$, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ -C_2 + C_3 = -1, \\ C_2 - 2C_3 = 5, \end{cases}$$

решая которую, получим $C_1 = 6$, $C_2 = -3$, $C_3 = -4$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения примет вид

$$y = 6 - (3 + 4x)e^{-x} - e^{-2x}.$$

11.4. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}\cos x$; б) $y'' - 3y' + 2y = \left(\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right)^2$;

в) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$; г) $y''' + 4y' = \sin^2 x \cos x$.

Решение. а) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения. Поскольку корни характеристического уравнения равны $k_{1,2} = -1$, то общее решение имеет вид

$$u = (C_1 + xC_2)e^{-x}.$$

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (3) $y_1 = e^{-x}\int\left(\int xe^{-x}\cos x e^x dx\right)dx = e^{-x}\int\left(\int x\cos x dx\right)dx =$ $= e^{-x}\int(x\sin x + \cos x)dx = e^{-x}(2\sin x - x\cos x).$

Таким образом, $y=(C_1+xC_2+2\sin x-x\cos x)e^{-x}$.

б) Характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения, имеет корни $k_1=2$, $k_2=1$. Тогда общее решение однородного уравнения будет $u=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$.

Частное решение находим по формуле (3)

$$y_1=e^{2x}\int e^{-x}\left(\int\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2 e^{-x}dx\right)dx=-e^{2x}\int\frac{e^{-x}}{e^x+1}dx=$$

$$=-e^{2x}\left(\int\frac{dx}{e^x}-\int\frac{dx}{e^x+1}\right)=e^x+e^{2x}\int\frac{dx}{e^x+1}=\left|\begin{matrix}e^x+1=t\\ dx=\dfrac{dt}{t(t-1)}\end{matrix}\right|=$$

$$=e^x+e^{2x}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=e^x+e^{2x}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right).$$

Таким образом, $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+e^{2x}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)$.

в) Характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения, имеет кратные корни $k_{1,2}=-2$. Общее решение однородного уравнения будет $u=(C_1+xC_2)e^{-2x}$.

Частное решение находим по формуле (3)

$$y=e^{-2x}\iint e^{-2x}\ln xe^{2x}dxdx=e^{-2x}\iint\ln xdx=e^{-2x}\int(x\ln x-x)\,dx=$$

$$=e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}\right).$$

Таким образом, $y=\left(C_1+xC_2+\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3x^2}{4}\right)e^{-2x}$.

г) Характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения, имеет корни $k_1=0$, $k_2=2i$, $k_3=-2i$.

Общее решение однородного уравнения будет

$$u=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$$

Частное решение находим по формуле (4)

$$y_1 = \int e^{2ix} \int e^{-4ix} \int \sin^2 x \cos x e^{2ix} dx dx dx.$$

Тригонометрические функции по формулам (6) выражаем через показательные

$$y_1 = -\frac{1}{8} \int e^{2ix} \int e^{-4ix} \int \left(e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \int e^{2ix} \int e^{-4ix} \left(\frac{e^{5ix}}{5i} - \frac{e^{3ix}}{3i} - \frac{e^{ix}}{i} - \frac{e^{-ix}}{i} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \int e^{2ix} \left(\frac{e^{ix}}{5} - \frac{e^{-ix}}{3} - \frac{e^{-3ix}}{3} - \frac{e^{-5ix}}{5} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \left(-\frac{e^{3ix}}{15i} + \frac{e^{-3ix}}{15i} - \frac{e^{ix}}{3i} + \frac{e^{-ix}}{3i} \right).$$

Пользуясь формулами (5), выразим результат через тригонометрические функции $y_1 = \frac{1}{60} \sin 3x + \frac{1}{12} \sin x.$

Таким образом,

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{60} \sin 3x + \frac{1}{12} \sin x.$$

11.5. Решить методом вариации произвольных постоянных уравнения: а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$; б) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$; в) $y''' + y' = \sec x \operatorname{tg} x$.

Решение. а) Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$, корни которого $k_{1,2} = 1$. Общее решение однородного уравнения будет $u = \left(C_1 + C_2 x\right) e^x$.

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, решение будем искать в виде $y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$, где $C_1(x)$, $C_2(x)$ находятся из системы уравнений (9). Обозначая $y_1 = e^x$ и $y_2 = x e^x$, получим

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0, \\ C_1'e^x + C_2'(1+x)e^x = \dfrac{e^x}{x^2+1}, \end{cases}$$

откуда $C_1' = -\dfrac{x}{x^2+1}$, $C_2' = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Интегрируя последние выражения, находим

$$C_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \bar{C}_1; \quad C_2 = \operatorname{arctg} x + \bar{C}_2.$$

Подставляя в общее решение, окончательно будем иметь

$$y = \left(C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + x\operatorname{arctg} x\right)e^x.$$

б) Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ составляем характеристическое $k^2 + 1 = 0$ и находим его корни $k = \pm i$. Общее решение однородного уравнения будет

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, решение ищем в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Обозначая $y_1 = \cos x$; $y_2 = \sin x$, из системы (9) будем иметь

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}, \end{cases}$$

откуда $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; $C_2' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Интегрируя последние выражения, находим $C_1 = -\dfrac{1}{2\cos^2 x} + \bar{C}_1$; $C_2 = \operatorname{tg} x + \bar{C}_2$.

Подставляя C_1, C_2 в общее решение, будем иметь

$$y=\left(\bar{C}_1-1\right)\cos x+\bar{C}_2\sin x-\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{\cos x}$$

или

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2\cos x}.$$

в) Для соответствующего однородного уравнения $y'''+y'=0$ составляем характеристическое $k^3+k=0$ и находим его корни $k_1=0$, $k_{2,3}=\pm i$. Общее решение однородного уравнения будет

$$u=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, решение имеем в виде $y=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x$.

Обозначая $y_1=1$; $y_2=\cos x$; $y_3=\sin x$, из системы (10) будем иметь

$$\begin{cases} C_1'+C_2'\cos x+C_3'\sin x=0,\\ -C_2'\sin x+C_3'\cos x=0,\\ -C_2'\cos x-C_3'\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, \end{cases}$$

откуда $C_1'=\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$, $C_2'=-\operatorname{tg}x$, $C_3'=-\operatorname{tg}^2 x$. Интегрируя последние выражения, получим

$$C_1=\frac{1}{\cos x}+\bar{C}_1;\quad C_2=\ln\left|\cos x\right|+\bar{C}_2;\quad C_3=x-tgx+\bar{C}_3.$$

Подставляя C_1, C_2 и C_3 в решение, будем иметь

$$y=\frac{1}{\cos x}+\bar{C}_1+\cos x\ln\left|\cos x\right|+\bar{C}_2\cos x+\left(x-\operatorname{tg}x\right)\sin x+\bar{C}_3\sin x$$

или окончательно

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\frac{1}{\cos x}+\cos x\ln\left|\cos x\right|+\left(x-\operatorname{tg}x\right)\sin x.$$

14.12. Дифференциальные уравнения Эйлера

1°. Линейное уравнение с переменными коэффициентами вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где $a, b, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные, *называется уравнением Эйлера.*

Если для области $ax+b>0$ по формуле $ax+b=e^t$ ввести новую независимую переменную t, то $y'_x = ae^{-t} y'_t$; $y''_{xx} = a^2 e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$; $y'''_{xxx} = a^3 e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$ и т. д. и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

2°. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad (2)$$

есть частный случай уравнения Эйлера (1).

Решение уравнения (2) ищем с помощью подстановки $x = e^t$ $(x > 0)$. Тогда $y'_x = e^{-t} y'_t$; $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$; $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$ и т. д. и уравнение (2) преобразуется в линейное с постоянными коэффициентами. Если $x < 0$, то используют подстановку $x = -e^t$.

3°. Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (3)$$

при $x > 0$ можно найти в виде $y = x^r$, где r — постоянное число. Для нахождения r подставляем $y, y', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (3) и решаем полученное характеристическое уравнение относительно r.

Если r — действительный корень характеристического уравнения кратности k, то ему соответствует k линейно независимых решений

$$y_1 = x^r, \quad y_2 = x^r \ln x, \quad y_3 = x^r (\ln x)^2, \ \ldots, \ y_k = x^r (\ln x)^{k-1}.$$

Если корни комплексные $r=\alpha\pm\beta i$ кратности k, то им соответствует k пар линейно независимых решений

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{k-1}\cos(\beta\ln x),$$
$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\sin(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{k-1}\sin(\beta\ln x).$$

12.1. Решить уравнения: а) $x^2y''+xy'+y=0$; б) $x^3y'''+xy'-y=0$; в) $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{x}$; г) $(x+1)^2y''-3(x+1)y'+4y=(x+1)^3$.

Решение. а) Уравнение однородное, полагаем $y=x^r$. Тогда $y'=rx^{r-1}$ и $y''=r(r-1)x^{r-2}$. Подставляя y, y', y'' в заданное уравнение, получим характеристическое уравнение $r(r-1)+r+1=0$ или $r^2+1=0$. Корни мнимые $r_{1,2}=\pm i$. Следовательно, общее решение будет $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$.

б) Полагая $y=x^r$, находим характеристическое уравнение $r(r-1)(r-2)+r-1=0$ или $(r-1)^3=0$. Корни действительные и кратные кратности $k=3$. Следовательно, общее решение будет $y=x\left(C_1+C_2\ln x+C_3\ln^2 x\right)$.

в) Полагая $x=e^t$, получим $x^2e^{-2t}\left(y''_{tt}-y'_t\right)+3xe^{-t}y'_t+y=\frac{1}{x}$ или $y''_{tt}+2y'_t+y=e^{-t}$, т. е. линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$u=(C_1+tC_2)e^{-t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_1=At^2e^{-t}$. Находим производные $y_1'=A\left(2te^{-t}-t^2e^{-t}\right)$, $y_1''=A\left(2e^{-t}-4te^{-t}+t^2e^{-t}\right)$. Подставляя y_1, y_1', y_1'' в неоднородное уравнение, будем иметь

$$A\left(2e^{-t}-4te^{-t}+t^2e^{-t}+4te^{-t}-2t^2e^{-t}+t^2e^{-t}\right)=e^{-t},$$

откуда $A=\frac{1}{2}$. Таким образом, $y=(C_1+tC_2)e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$.

Переходя к переменной x, будем иметь

$$y=\left(C_1+C_2\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x\right)\frac{1}{x}.$$

г) Полагая $x+1=e^t$, находим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y''_{tt}-y'_t-3y'_t+4y=e^{3t} \text{ или } y''-4y'+4y=e^{3t}.$$

Характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения, имеет кратные корни $k_{1,2}=2$. Следовательно, общее решение будет $u=\left(C_1+tC_2\right)e^{2t}$.

Частное решение неоднородного уравнения представим в виде $y_1=Ae^{3t}$. Тогда $9Ae^{3t}-12Ae^{3t}+4Ae^{3t}=e^{3t}$, откуда $A=1$.

Общее решение неоднородного уравнения будет

$$y=\left(C_1+tC_2\right)e^{2t}+e^{3t}.$$

Переходя к переменной x, окончательно получим

$$y=\left(C_1+C_2\ln(x+1)\right)(x+1)^2+(x+1)^3.$$

14.13. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Рассмотрим некоторые приемы составления дифференциальных уравнений.

1°. При составлении дифференциальных уравнений в геометрических задачах обычно используется геометрический смысл производной как тангенса угла, образованного касательной к кривой с положительным направлением оси Ox. Устанавливая соотношение между x, y и y', приходим к дифференциальному уравнению $y'=f(x,y)$.

2°. Задача об ортогональных траекториях. Ортогональной траекторией семейства кривых $\Phi(x,y,a)=0$ называется кривая, пересекающая все кривые этого семейства под углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Для отыскания ортогональной траектории составляют дифференциальное уравнение семейства $f(x, y, y') = 0$, исключают параметр a из полученного и данного уравнений и заменяют в полученном уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$ (условие ортогональности). Затем уравнение $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ следует проинтегрировать.

Если семейство кривых задано в полярных координатах $\Phi(\rho, \varphi, a) = 0$, то при отыскании ортогональных траекторий в дифференциальном уравнении семейства $f(\rho, \rho', \varphi) = 0$ следует ρ' заменить на $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ и полученное уравнение $f\left(\rho, -\frac{\rho^2}{\rho'}, \varphi\right) = 0$ проинтегрировать.

3°. Если исследуемый процесс $y = f(x)$ протекает так, что его скорость относительно независимой переменной x пропорциональна текущему значению самого процесса y, то он может быть описан уравнением

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad \text{откуда} \quad y = Ce^{kx}.$$

Если коэффициент пропорциональности $k > 0$, то с возрастанием x процесс y нарастает. Например, процесс увеличения давления при погружении тела в воде, размножения бактерий, увеличение вклада в банке и т. д.

Если $k < 0$, то с возрастанием x процесс y убывает. Например, процесс радиоактивного распада, убывания атмосферного давления с увеличением высоты, разрядки конденсатора через сопротивление и ряд других.

4°. Основным законом динамики точки является второй закон Ньютона, который в проекциях на неподвижные оси координат имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{1}$$

где m — масса точки; $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ — проекции ускорения на оси координат; X, $У$, Z — проекции силы на те же оси.

Силы сопротивления среды принимают часто пропорциональными скорости, то есть первой производной. Упругие и квазиупругие силы пропорциональны положению движущейся точки, то есть ее соответствующей координате. Поскольку силы сопротивления и упругие силы направлены в сторону, противоположную движению, в уравнения движения они входят со знаком минус. Полагая силы действующие на точку зависящими от времени, запишем основное уравнение динамики в проекции, например, на ось x

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\beta\frac{dx}{dt}-cx+X(t), \tag{2}$$

где β — коэффициент пропорциональности скорости движения; c — коэффициент жесткости.

Уравнение движения (2) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $X(t)=0$, то есть на точку не действуют внешние силы, то точка находится под действием сил, связанных со средой.

5°. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Зависимость между радиусом кривизны изогнутой оси балки $\rho(x)$, изгибающим моментом $M(x)$ и жесткостью балки EI имеет вид

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}. \tag{3}$$

Подставляя в формулу (3) значение радиуса кривизны и пренебрегая квадратом угла поворота сечения балки $\frac{dy}{dx}$, приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки примет вид

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M(x). \tag{4}$$

6°. Рассмотрим составление дифференциальных уравнений, описывающих изменение токов и напряжений в электрических цепях в зависимости от времени. Для этого воспользуемся законом Ома и правилами Кирхгофа.

Закон Ома. Падение напряжения U на индуктивности L, емкости C и активном сопротивлении R выражается формулами

$$U_L=L\frac{di}{dt},\quad U_C=\frac{1}{C}\int idt,\quad U_R=Ri$$

или

$$i=\frac{1}{L}\int U_L dt,\quad i=C\frac{dU_C}{dt},\quad i=\frac{U_R}{R},$$

где i — сила тока; t — время; L, C, R — коэффициенты индуктивности, емкости, активного сопротивления.

Правила Кирхгофа. 1. Алгебраическая сумма токов в точке разветвления цепи равна нулю.

2. Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления (включая и внутреннее) равна алгебраической сумме эдс, действующих в замкнутом контуре. Токи и эдс, совпадающие с произвольно выбранным направлением обхода контура, считаются положительными.

13.1. Найти уравнения кривых, если известно, что любая касательная, проведенная к кривой, отсекает на оси Ox отрезок, длина которого равна половине абсциссы точки касания.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 14.2). Пусть $y=f(x)$ — уравнение кривой, а $M(x,y)$ — точка касания. Касательная MN наклонена под углом α к оси Ox. MP — перпендикуляр к оси Ox. Тогда из прямоугольного треугольника MNP имеем

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MP}{NP}$. Поскольку $MP = y$, а $NP = \dfrac{x}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2y}{x}$. Из геометрического смысла производной $y' = \operatorname{tg}\alpha$; таким образом $y' = \dfrac{2y}{x}$.

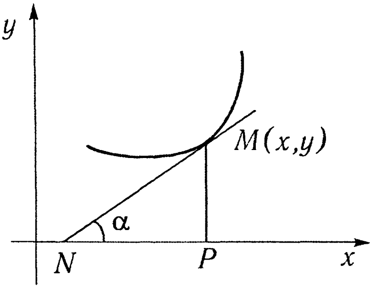

Рис. 14.2

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x}$; $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$, откуда $y = Cx^2$. Общее решение в данном случае представляет семейство парабол.

13.2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 3) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 14.3).

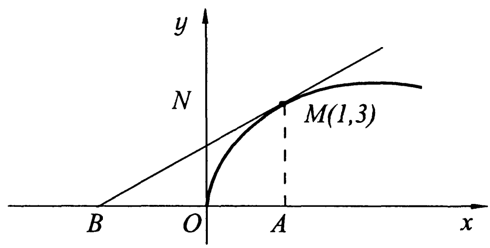

Рис. 14.3

Пусть $y = f(x)$ — уравнение кривой, а $M(x, y)$ — точка касания. По условию отрезок ON, отсекаемый касательной на оси ординат, равен $OA = x$, т. е. абсциссе точки касания. Из треугольника OBN следует, что $\dfrac{ON}{OB} = \operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{OB}$. Из треугольника ABM имеем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{y}{x - OB}$. Откуда $\dfrac{x}{OB} = \dfrac{y}{x - OB}$; $OB = \dfrac{x^2}{x + y}$. Из геометрического смысла производной имеем $y' = \dfrac{x}{OB}$; $y' - \dfrac{y}{x} = 1$. Уравнение однородное, делаем замену $y = xt$; $y' = t + xt'$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$; $t = \ln|x| + C$. Общее решение имеет вид $y = x(\ln|x| + C)$. Кривая проходит через точку M с координатами (1, 3). Подставляя координаты этой точки в общее решение, находим $3 = 1 + C$; $C = 2$. Таким образом, уравнение искомой кривой примет вид $y = x(\ln|x| + 2)$.

13.3. Найти линию, для которой сумма нормали и поднормали пропорциональна абсциссе.

Решение. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, длина нормали равна $\left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|$, а длина поднормали $|y\,y'|$. Таким образом, искомая линия удовлетворяет уравнению

$$y\sqrt{1 + y'^2} + yy' = kx \quad \text{или} \quad 2kxyy' = k^2x^2 - y^2.$$

Это однородное уравнение. Используя подстановку $y = xz$, $y' = z + xz'$, будем иметь $2kxz\dfrac{dz}{dx} = k^2 - z^2 - 2kz^2$ или, разделяя переменные, $\dfrac{zdz}{k^2 - z^2(1 + 2k)} = \dfrac{dx}{2kx}$.

Интегрируя последнее выражение и переходя к старым переменным, получим $\dfrac{x^2k^2 - (1 + 2k)y^2}{x^2} = (xC)^{-\left(\frac{1}{k} + 2\right)}$.

После несложных упрощений уравнение искомой линии примет вид $y^2 = Cx^{-\frac{1}{k}} + \dfrac{x^2k^2}{1 + 2k}$.

13.4. Найти ортогональные траектории семейства: а) окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; б) логарифмических спиралей $\rho=ae^{\varphi}$.

Решение. а) Дифференциальное уравнение семейства окружностей будет $2(x-a)+2(y-b)y'=0$ или $x-a+(y-b)y'=0$. Заменяя y' на $-\dfrac{1}{y'}$, получим $x-a=(y-b)\dfrac{1}{y'}$ или $\dfrac{dy}{y-b}=\dfrac{dx}{x-a}$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\ln|y-b|=\ln|x-a|+\ln|C|$, $y-b=C(x-a)$, т. е. ортогональными траекториями будут прямые.

б) Найдем дифференциальное уравнение семейства логарифмических спиралей $\rho'=ae^{\varphi}$. Исключая параметр a, будем иметь $\rho'=\rho$. Заменяя ρ' на $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$, получим $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}=\rho$ или $\rho'=-\rho$. Откуда $\dfrac{d\rho}{d\varphi}=-\rho$ или $\ln|\rho|=-\varphi+\ln C$, $\rho=Ce^{-\varphi}$.

13.5. Тело падает с высоты h при начальной скорости $v_0=0$. **Найти** зависимость между скоростью и пройденным путем, если сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

Решение. На тело при падении действуют две силы: сила веса P и сила сопротивления $-\rho v^2$. Пользуясь вторым законом Ньютона (масса, умноженная на ускорение, равна сумме приложенных сил), можем записать

$$m\frac{dv}{dt}=P-\rho v^2.$$

Поскольку $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dv}{dy}v$ и $m=\dfrac{P}{g}$, то $\dfrac{P}{g}\dfrac{dv}{dy}v=P-\rho v^2$ или $v\dfrac{dv}{dy}=g\left(1-kv^2\right)$, где $k=\dfrac{\rho}{P}$.

Разделяем переменные и интегрируем $\frac{vdv}{1-kv^2}=gdy$, $-\frac{1}{2k}\ln\left|1-kv^2\right|=gy+C$.

В начале движения $v_0=0$, $y=0$. Подставляя начальные условия в общее решение, находим, что $C=0$. Отсюда, зависимость скорости v от пройденного пути имеет вид

$$\ln\left|1-kv^2\right|=-2kgy \text{ или } v=\sqrt{\frac{1}{k}\left(1-e^{-2kgy}\right)}.$$

13.6. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству в данный момент времени. **Определить** количество цинка к концу 200 суток, если период полураспада T = 300 суток, а в начале исследования имелось $N_0=8$ гр. цинка.

Решение. Поскольку скорость процесса есть первая производная от количества вещества N по времени, то по условию задачи $\frac{dN}{dt}=kN$. Интегрируя это уравнение, получим $N=Ce^{kt}$. При $t=0$, $N_0=8$. Отсюда $8=Ce^{k0}$ или $C=8$ и $N=8e^{kt}$.

Период полураспада $t=T$ это то время, за которое распадается половина начального количества вещества, т. е. $4=8e^{kT}$, $\frac{1}{2}=e^{kT}$. Отсюда коэффициент пропорциональности $k=-\frac{\ln 2}{T}=-\frac{\ln 2}{300}$.

Таким образом, количество вещества через 200 суток будет $N=8e^{-\frac{\ln 2}{300}200}=4\sqrt[3]{2}$ гр.

13.7. За сколько времени тело, нагретое до 100°, в комнате с температурой $T_0=20^\circ$ охладится до 25°, если до 60° оно охладится за 10 мин.?

Решение. По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур $\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_0\right)$. Откуда

$\frac{dT}{T-20}=kdt;\ \ln|T-20|=kt+\ln C.$

При $t=0$, $T=100^\circ$, таким образом $\ln 80=\ln C;\ C=80$. За время $t=10$ мин. температура стала $T=60^\circ$, следовательно, $\ln 40=10k+\ln 80;\quad k=-\frac{1}{10}\ln 2$. Таким образом, $T-20=80e^{kt}$ или $T=20+80e^{-\frac{t}{10}\ln 2}=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$. Отсюда находим время, за которое тело охладится до 25°: $25=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}};$ $t=40$, т. е. тело охладится за 40 мин.

13.8. В коническую воронку высотой H и углом при вершине конуса 2α налита вода. **Найти** зависимость между переменной высотой уровня воды h в воронке и временем истечения t, если площадь отверстия s *см*^{2}. Определить полное время истечения.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли, определяющей скорость v истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на h, *м* ниже свободной поверхности жидкости

$$v=\sigma\sqrt{2gh},$$

где g = 9,81 *м/с*^{2} — ускорение силы тяжести; σ — постоянный коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma\simeq 0,6$).

Объем воды, вытекший через отверстие площадью s за dt после начала истечения, равен объему цилиндра высотой vdt, т. е.

$$dV=svdt=s\sigma\sqrt{2gh}dt,$$

С другой стороны, учитывая, что радиус основания уровня воды в воронке равен $h\operatorname{tg}\alpha$, объем воды за время dt уменьшился на величину $dv\simeq\frac{1}{3}\pi h^3\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{3}\pi\left(h-|dh|\right)^3\operatorname{tg}^2\alpha\simeq\pi\operatorname{tg}^2\alpha h^2|dh|.$

Поскольку уровень воды при истечении понижается, то $dh < 0$.

Приравнивая выражения для этих объемов, получим

$$-\pi \operatorname{tg}^2\alpha h^2 dh = s\sigma\sqrt{2gh}dt \quad \text{или} \quad dt = -\frac{\pi \operatorname{tg}^2\alpha h^{\frac{3}{2}}}{s\sigma\sqrt{2g}}dh.$$

Интегрируя, имеем $t = C - \dfrac{2\pi \operatorname{tg}^2\alpha}{5s\sigma\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}$.

При $t = 0$, $h = H$; тогда $C = \dfrac{2}{5}\dfrac{\pi \operatorname{tg}^2\alpha}{s\sigma\sqrt{2g}}H^{\frac{5}{2}}$.

Следовательно, зависимость между временем истечения и переменной высотой уровня примет вид

$$t = \frac{2}{5}\frac{\pi \operatorname{tg}^2\alpha}{s\sigma\sqrt{2g}}\left(H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right).$$

Полное время истечения T найдем, полагая в последней формуле $h = 0$, т. е.

$$T = \frac{2}{5}\frac{\pi \operatorname{tg}^2\alpha}{s\sigma\sqrt{2g}}H^{\frac{5}{2}}.$$

Замечание. Решение задачи выполнено при условии, что размер выпускного отверстия мал в сравнении с остальными размерами воронки.

13.9. Определить время, необходимое для установления одинакового уровня жидкости в сообщающихся сосудах, если в начальный момент уровень жидкости в первом сосуде находился на высоте h_1 от отверстия, а во втором — на высоте h_2 ($h_1 > h_2$). Площадь горизонтального сечения первого сосуда равна S_1, второго — S_2, а площадь отверстия — s.

Решение. Количество жидкости, теряемое первым сосудом, равно количеству жидкости, получаемому вторым сосудом, т. е. $-S_1dz_1 = S_2dz_2$, где dz_1, dz_2 — изменение уровней жидкости через время dt. За время dt через отверстие пройдет объем жидкости $\sigma s\sqrt{2g(z_1 - z_2)}dt$, где σ — постоянный коэффициент. Так как объемы равны, то отсюда $-S_1dz_1 = \sigma s\sqrt{2g(z_1 - z_2)}dt$ или $-\frac{dz_1}{\sqrt{z_1 - z_2}} = \frac{\sigma s\sqrt{2g}}{S_1}dt.$

Полагая $z_1 - z_2 = u$, получим $dz_1 - dz_2 = du = \frac{S_1 + S_2}{S_2}dz_1$ или $dz_1 = \frac{S_2du}{S_1 + S_2}$. Таким образом, $-\frac{S_2du}{(S_1 + S_2)\sqrt{u}} = \frac{\sigma s\sqrt{2g}}{S_1}dt.$

Интегрируя, получим

$$-\frac{2S_2\sqrt{u}}{S_1 + S_2} = \frac{\sigma s\sqrt{2g}}{S_1}t + C.$$

При $t = 0$ и $u = h_1 - h_2$, откуда $C = -\frac{2S_2\sqrt{h_1 - h_2}}{S_1 + S_2}$.

Полагая $u = 0$, находим искомое время T

$$T = \frac{\sqrt{2}S_1S_2\sqrt{h_1 - h_2}}{(S_1 + S_2)\sigma s\sqrt{g}}.$$

13.10. Установить зависимость между давлением атмосферы P и высотой над уровнем моря z, если давление атмосферы на уровне моря (при $z = 0$) равно P_0.

Решение. Обозначим через ρ плотность воздуха, а через ρ_0 плотность воздуха над уровнем моря. Согласно уравнению Клапейрона имеем

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} = RT,$$

где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура.

Считаем, что температура есть линейная функция от высоты $T = T_0 - \mu z$, где μ — постоянный коэффициент. Тогда

$$\rho = \frac{P}{R(T_0 - \mu z)}.$$

Учитывая, что изменение давления по высоте пропорционально проекции силы тяжести, отнесенной к единице массы, будем иметь

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{Pg}{R(T_0 - \mu z)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gdz}{R(T_0 - \mu z)}; \quad \ln|P| = \frac{g}{R\mu}\ln\left|1 - \frac{\mu z}{T_0}\right| + \ln C.$$

По условию задачи при $z = 0$, $P = P_0$, откуда $C = P_0$. Таким образом, искомая зависимость примет вид

$$P = P_0\left(1 - \frac{\mu z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\mu}}.$$

13.11. Найти зависимость количества растворившегося вещества x от времени, если количество вещества, дающее насыщенный раствор, равно P.

Решение. Пусть скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна количеству этого вещества, еще могущего раствориться в жидкости до насыщения последней. Тогда дифференциальное уравнение растворения твердого тела имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$\frac{dx}{P - x} = kdt; \quad x = P + Ce^{-kt}.$$

При $t = 0$, т. е. в начальный момент времени $x = 0$. Отсюда $C = -P$, и окончательно получим

$$x = P\left(1 - e^{-kt}\right).$$

13.12. Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Решение. Вероятно, зеркало имеет форму поверхности вращения с осью, параллельной падающим лучам. Примем ось Ox за ось вращения и рассмотрим уравнение кривой $y = f(x)$ в плоскости Oxy (рис. 14.4).

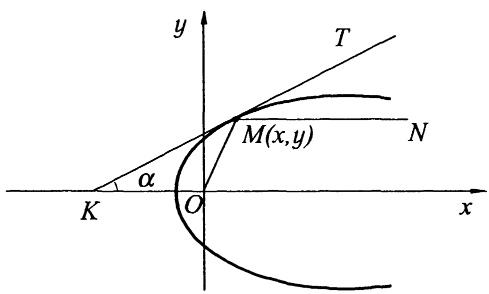

Рис. 14.4

Пусть отраженные лучи собираются в точке начала координат. Обозначим: NM — падающий луч, MO — отраженный луч, TK — касательная к кривой в произвольной точке $M(x, y)$.

Так как угол падения равен углу отражения, то $\angle NMT = \angle KMO$. С другой стороны $\angle MKO = \angle NMT$, следовательно, $\angle KMO = \angle MKO$. Таким образом, $\triangle KMO$ равнобедренный с вершиной в точке O и $|KO| = |OM|$, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. Обозначая за α угол между касательной и положительным направлением оси Ox, будем иметь $KO = \dfrac{y}{y'} - x$, где $\operatorname{tg} \alpha = y'$.

Отсюда

$$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad \left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)y'=y.$$

То есть задача свелась к однородному дифференциальному уравнению. Используя подстановку $x=zy$, $x'=z+yz'$, где за x принята неизвестная функция, а за y — аргумент, будем иметь

$$zy+\sqrt{z^2y^2+y^2}=y\left(z+yz'\right); \quad \sqrt{1+z^2}=yz'.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}; \quad \ln|y|=\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+\ln C; \quad y=C\left(z+\sqrt{1+z^2}\right);$$

$$y=C\left(\frac{x}{y}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right); \quad y^2=C\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

После упрощения уравнение кривой примет вид

$$y^2=2C\left(\frac{C}{2}+x\right),$$

т. е. кривая является параболой, а зеркало имеет вид параболоида вращения.

13.13. Найти силу тока в катушке в момент t, если ее сопротивление R, коэффициент самоиндукции L, а электродвижущая сила (эдс) меняется по закону $E=E_0\sin\omega t$. Начальная сила тока $i_0=0$.

Решение. Согласно второму закону Кирхгофа (сумма эдс, действующих в замкнутом контуре, и падений напряжений на его участках, взятых с обратными знаками, равна нулю): $U_L+U_R=E$, где $U_L=L\dfrac{di}{dt}$ — падение напряжения на индуктивности L, $U_R=Ri$ — падение напряжения на активном сопротивлении R. Отсюда $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E_0\sin\omega t$ — линейное неоднородное уравнение.

Делая подстановку $i = uv$, $\dfrac{di}{dt} = u'v + v'u$, получим $Lu'v + u(Lv' + Rv) = E_0 \sin\omega t$. (*) Приравниваем скобку нулю $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{R}{L}v$, $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{R}{L}dt$, $v = e^{-\frac{R}{L}t}$. Подставляя это частное решение в уравнение (*), будем иметь

$$e^{-\frac{R}{L}t}\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L}\sin\omega t \quad \text{или} \quad u = \frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt.$$

Интегрируя дважды по частям, получим

$$u = \frac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)e^{\frac{R}{L}t} + C.$$

Общее решение исходного уравнения будет

$$i = \frac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Подставляя сюда начальные условия: $i_0 = 0$ при $t = 0$, находим постоянную интегрирования $C = \dfrac{E_0 L\omega}{L^2\omega^2 + R^2}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$i = \frac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}\left(R\sin\omega t - L\omega\left(\cos\omega t - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right).$$

13.14. Тело массы m падает вертикально с некоторой высоты при начальной скорости $v_0 = 0$. **Найти** закон движения, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости падения тела.

Решение. При падении на тело действуют силы веса $P = mg$, направленные в сторону движения тела, и силы сопротивления воздуха $F = -kv^2$, направленные в сторону, противоположную движению тела, k — коэффициент пропорциональности.

На основании второго закона Ньютона $mw = P - kv^2$ дифференциальное уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2 \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

где $\dfrac{dx}{dt} = v$ — скорость, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ — ускорение тела, а x — пройденный путь.

Разделим переменные

$$\frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m}dt \quad \text{или} \quad \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt \quad \left(a^2 = \frac{mg}{k}\right)$$

и проинтегрируем

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Используя начальные условия $v_0 = 0$ при $t = 0$, получим, что $C_1 = 0$. Тогда $\dfrac{a+v}{a-v} = e^{\frac{2ak}{m}t}$;

$$v = a\frac{e^{\frac{2ak}{m}} - 1}{e^{\frac{2ak}{m}} + 1} = a\frac{e^{\frac{ak}{m}t} - e^{-\frac{ak}{m}t}}{e^{\frac{ak}{m}t} + e^{-\frac{ak}{m}t}} = a\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}} = a\,th\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

Заменяя v на $\dfrac{dx}{dt}$, получим $\dfrac{dx}{dt} = a\,th\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t$. Откуда

$$x = a\int th\sqrt{\frac{kg}{m}}t\,dt = a\sqrt{\frac{m}{kg}}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_2 = \frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_2.$$

При $t = 0$, $x = 0$, откуда $C_2 = 0$. Таким образом, искомый закон движения тела будет

$$x = \frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

13.15. Катер движется со скоростью 18 *км/ч*. Через 5 *мин* после выключения мотора его скорость уменьшилась до 6 *км/ч*. **Найти** расстояние, пройденное катером по инерции за 15 *мин*, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Пусть m — масса катера, s — путь, пройденный катером за время t. Тогда дифференциальное уравнение движения будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-k\frac{ds}{dt} \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt}=-kv,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt; \quad \ln|v|=-\frac{k}{m}t+C_1.$$

При $t=0$, $v = 18$ *км/ч* $= 300$ *м/мин*, откуда $C_1=\ln 300$.

При $t=5$, $v=6$ *км/ч* $=100$ *м/мин*, откуда $\ln 100=-5\frac{k}{m}+\ln 300$; $\frac{k}{m}=\frac{1}{5}\ln 3$.

Таким образом, $\ln|v|=-\frac{t}{5}\ln 3+\ln 300$; $v=300\cdot 3^{-\frac{t}{5}}$.

Полагая $v=\frac{ds}{dt}$, будем иметь

$$\frac{ds}{dt}=300\cdot 3^{-\frac{t}{5}} \quad \text{или} \quad s=300\int 3^{-\frac{t}{5}}dt=-\frac{1500}{\ln 3}3^{-\frac{t}{5}}+C_2.$$

Используя начальные условия $s=0$ при $t=0$, получим, что $C_2=\frac{1500}{\ln 3}$. Тогда, $s=\frac{1500}{\ln 3}\left(1-3^{-\frac{t}{5}}\right)$.

Расстояние, пройденное катером по инерции за $t = 15$ *мин*, равно

$$s=\frac{1500}{\ln 3}\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\approx 1310\,м.$$

13.16. Снаряд массы m выброшен из ствола орудия со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, **найти** траекторию снаряда, время полета.

Решение. Расположим оси координат, как показано на рис. 14.5.

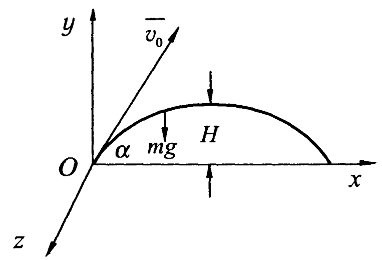

Рис. 14.5

На снаряд действует только сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$, проекции которой на оси координат равны: $P_x = 0$; $P_y = -mg$; $P_z = 0$.

Подставляя эти величины в уравнения (1) и сокращая на m, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

или, учитывая, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt^2}; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt},$$

будем иметь

$$\frac{dv_x}{dt} = 0; \qquad \frac{dv_y}{dt} = -g; \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$v_x = C_1; \qquad v_y = -gt + C_2; \qquad v_z = C_3.$$

Начальные условия в задаче имеют вид: при $t = 0$

$$v_x = v_0 \cos\alpha; \qquad v_y = v_0 \sin\alpha; \qquad v_z = 0.$$

Удовлетворяя начальным условиям, получим

$$C_1 = v_0 \cos\alpha; \quad C_2 = v_0 \sin\alpha; \quad C_3 = 0.$$

Заменяя проекции скоростей v_x, v_y, v_z на $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha; \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha; \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эту систему уравнений, получим

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_4; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + C_5; \quad z = C_6.$$

Удовлетворяя начальным условиям: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ при $t = 0$, находим, что $C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Отсюда уравнения движения примут вид

$$x = v_0 t \cos\alpha; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha; \quad z = 0.$$

Исключая из уравнений движения время, находим уравнение траектории снаряда

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Нетрудно заметить, что уравнение траектории есть парабола. Находя точки пересечения параболы с осью x, т. е. полагая $y = 0$, находим дальность полета

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для определения высоты H траектории (вершины параболы) находим производную

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

и приравниваем ее нулю, тогда

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Подставляя это значение x в уравнение траектории, находим

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Этот же результат можно получить, зная дальность полета и учитывая симметрию траектории параболы.

Подставляя дальность полета в первое уравнение движения, находим, что время полета равно

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

13.17. К концу недеформированной пружины подвешен груз массы m. **Найти** закон движения груза, если статическое удлинение пружины $\delta = 0,5$ *см*.

Решение. Выберем начало координат в положении равновесия груза и направим ось Ox по вертикали вниз (рис. 14.6). В положении равновесия сила веса груза P уравновешивается силой упругости — $c\delta$, т. е. $P = c\delta$, где c — коэффициент жесткости пружины.

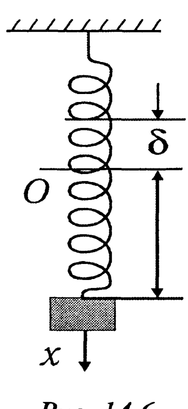

Рис. 14.6

Во время движения на тело действует сила веса $P = mg$ и сила упругости — $c(x+\delta)$ (так как пружина растягивается на величину $x+\delta$). В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c(x+\delta)+mg.$$

Учитывая, что $P = c\delta$, и деля на m, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}x \quad \text{или} \quad \ddot{x}+\frac{c}{m}x = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения свободных гармонических колебаний (2) имеет вид

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}x+\varphi\right).$$

Согласно решению груз совершает незатухающие колебания с постоянной амплитудой A и частотой $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Найдем частное решение. Когда груз не был подвешен, при $t = 0$, точка подвеса груза находилась в положении $x_0 = -0{,}5$, а начальная скорость была $v_0 = 0$. Из первого начального условия имеем $-0{,}5 = A\sin\varphi$. (*)

Найдем скорость $\dot{x} = A\omega\cos(\omega x+\varphi)$ и воспользуемся вторым начальным условием $0 = A\omega\cos\varphi$. Так как $A \neq 0$, $\omega \neq 0$, то имеем $\cos\varphi = 0$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Подставляя $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в (*), получим $A = -0{,}5$. Частное решение имеет вид

$$x = -0{,}5\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}5\cos\omega t.$$

13.18. К пружине с коэффициентом жесткости $c = 8{,}4$ *г/см*, подвешен груз весом $P = 49$ *г*. **Найти** закон движения груза, если на груз действует сила $F(t) = 2\sin 13t$.

Решение. Поскольку сопротивление среды не учитывается, то уравнение движения (2) имеет вид

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}x=F(t).$$

Так как $\frac{c}{m}=\frac{cg}{P}=\frac{8{,}4\cdot 981}{49}=169$, то уравнение примет вид

$$\ddot{x}+169x=2\sin 13t.$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет корни $k_{1,2}=\pm 13i$, поэтому общее решение однородного уравнения будет $u=C_1\sin 13t+C_2\cos 13t$ или в другой форме записи $x=A\sin(13t+\varphi)$.

Поскольку числа $a=0$, $b=13$ совпадают с корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует умножить на t, т. е.

$$x_1=At\sin 13t+Bt\cos 13t.$$

Находим производные

$$\dot{x}_1=A\sin 13t+13At\cos 13t+B\cos 13t-13Bt\sin 13t;$$

$$\ddot{x}=26A\cos 13t-169At\sin 13t-26B\sin 13t-169Bt\cos 13t.$$

Подставляя x_1, $\dot{x}_1$, $\ddot{x}_1$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой части равенства, находим: $A=0$, $B=-\frac{1}{13}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x=C_1\sin 13t+C_2\cos 13t-\frac{t}{13}\cos 13t.$$

Найдем частное решение. В положении равновесия сила веса груза P уравновешиваются силой упругости — $c\delta$. Поскольку начало координат расположено в положении равновесия груза и направлено вертикально вниз, то статическое удлинение пружины $\delta = -\frac{P}{c} = -\frac{49}{8,4} = -5,8$, т. е. при $t = 0$ $x_0 = -5,8$ и $\dot{x}_0 = 0$. Согласно начальным условиям: $-5,8 = C_2$, $0 = 13C_1 - \frac{1}{13}$. Откуда частное решение

$$x = \frac{1}{169}\sin 13t - \left(5,8 + \frac{t}{13}\right)\cos 13t.$$

Если положить $\frac{1}{169} = A_0 \cos\varphi_0$; $5,8 + \frac{t}{13} = A_0 \sin\varphi_0$, то частное решение примет вид

$$x = A_0 \sin(13t - \varphi_0),$$

где $A_0^2 = \frac{1}{13^2}\left(\frac{1}{13^2} + (5,8\cdot 13 + t)^2\right)$; $A_0 = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{13^2} + (75,4 + t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(13(75,4 + t))$.

С возростанием времени t амплитуда колебаний A_0 неограниченно возрастает. Этот случай, когда частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний системы, называется резонансом.

13.19. Груз веса $P = 49$ *г*, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Сила сопротивления движению пропорциональна скорости $R = \beta v$. **Найти** уравнение движения груза, если коэффициент жесткости пружины $c = 5$ *г/см*; $\beta = 0,8$ *г·см/сек* и при $t = 0$ груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 1 *см*, и ему была сообщена начальная скорость $v_0 = 4$ *см/с*.

Решение. Ось Ox направим по вертикали вниз. Положение статического равновесия примем за начало отсчета (рис. 14.7). На груз действуют силы: P — вес груза, направленный по вертикали вниз; $F = -c(\delta_{cm} + x)$ — упругая сила пружины, направленная по вертикали вверх; $R = -\beta\dot{x}$ — сила сопротивления, направленная противоположно скорости $v = \dot{x}$.

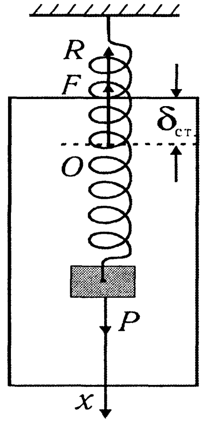

Рис. 14.7

Дифференциальное уравнение движения груза (2) в данном случае примет вид

$$m\ddot{x} = P - c\left(\delta_{cm} + x\right) - \beta\dot{x} \qquad (*)$$

Так как $P = c\delta_{cm}$, то уравнение (*) будет

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение $k^2 + \frac{\beta}{m}k + \frac{c}{m} = 0$, откуда $k_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}}$. Поскольку $m = \frac{P}{g}$, то $k_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64 - 100} = -8 \pm 6i$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-8t}\sin\left(6t + \varphi\right) \quad \text{или} \quad x = e^{-8t}\left(C_1\sin 6t + C_2\cos 6t\right).$$

Движение груза является затухающим, так как

$$\lim_{t\to\infty} Ae^{-8t}\sin\left(6t + \varphi\right) = 0.$$

Амплитудой колебаний является коэффициент, стоящий перед синусом, т. е. Ae^{-8t}. Круговая частота $\omega = 6$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: при $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 4$ *м/с*. Прежде всего находим производную

$$\dot{x} = -8Ae^{-8t}\sin(6t+\varphi) + 6Ae^{-8t}\cos(6t+\varphi).$$

Используя начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = A\sin\varphi; \\ 4 = -8A\sin\varphi + 6A\cos\varphi, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg}\varphi = 2$, $\varphi_0 = \operatorname{arcctg} 2$, $A = \dfrac{1}{\sin\varphi} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi} = \sqrt{5}$.

Частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x = \sqrt{5}e^{-8t}\sin(6t+\varphi_0).$$

13.20. Балка длины l, защемленная одним концом, нагружена на другом конце силой P. **Найти** наибольшее значение прогиба и угла поворота.

Решение. Расположим начало координат в точке заделки A. Ось y направим вверх, а ось x — вправо (рис. 14.8).

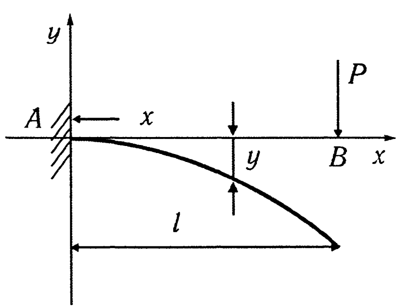

Рис. 14.8

Изгибающий момент в произвольном сечении на расстоянии x от начала координат равен $M(x) = -P(l-x)$. Тогда дифференциальное уравнение (4) примет вид

$$EIy'' = -P(l-x).$$

Интегрируя это уравнение два раза, будем иметь

$$EIy' = -P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1, \qquad EIy = -P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями: $y = 0$ и $\dfrac{dy}{dx} = \theta = 0$ при $x = 0$. Подставляя эти значения в предыдущие выражения, получим, что $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом, угол поворота и прогиб будет

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -\frac{Plx}{2EI}\left(2 - \frac{x}{l}\right), \quad y = -\frac{Plx^2}{6EI}\left(3 - \frac{x}{l}\right).$$

Наибольшие значения угла поворота и прогиба будут в точке B

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}, \quad y_B = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Знак минус в выражении для θ_B означает, что сечение повернулось по часовой стрелке, а знак минус у прогиба y_B означает, что прогиб направлен вниз.

13.21. Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластинки имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right) = \frac{qr}{2D},$$

где D — цилиндрическая жесткость, q — интенсивность нагрузки в функции r. **Найти** решение, если q равномерно распределена по всей поверхности пластинки радиуса a и пластинка защемлена по контуру.

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба третьего порядка, причем правая часть в общем случае является функцией r. Считаем, что нагрузка равномерно распределена, т. е. q — const. Таким образом, уравнение позволяет непосредственное интегрирование по r. После первого интегрирования находим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)=\frac{qr^2}{4D}+C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Умножая обе части уравнения на r и интегрируя, получим

$$r\frac{dw}{dr}=\frac{qr^4}{16D}+\frac{C_1r^2}{2}+C_2$$

или

$$\frac{dw}{dr}=\frac{qr^3}{16D}+\frac{C_1r}{2}+\frac{C_2}{r} \qquad (1)$$

Интегрируя еще раз, будем иметь

$$w=\frac{qr^4}{64D}+\frac{C_1r^2}{4}+C_2\ln|r|+C_3 \qquad (2)$$

Поскольку пластинка защемлена по контуру, то наклон изогнутой поверхности в радиальном направлении $\frac{dw}{dr}=0$ при $r=0$ и $r=a$. Из выражения (1) имеем

$$\left(\frac{qr^3}{16D}+\frac{C_1r}{2}+\frac{C_2}{r}\right)_{r=0}=0;$$

$$\left(\frac{qr^3}{16D}+\frac{C_1r}{2}+\frac{C_2}{r}\right)_{r=a}=0.$$

Из первого равенства $C_2=0$. Подставив C_2 во второе, получим $C_1=-\frac{qa^2}{8D}$.

На краю пластинки при $r=a$, $w=0$. Поэтому из выражения (2) имеем

$$\frac{qa^4}{64D}-\frac{qa^4}{32D}+C_3=0 \quad \text{или} \quad C_3=\frac{qa^4}{64D}.$$

Подставив постоянные интегрирования в (2), получим

$$w = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2.$$

13.22. Найти общее решение дифференциального уравнения изгиба балки — полоски, выделенной из цилиндрической оболочки радиуса r

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2m\frac{d^2w}{dx^2} + n^2w = \frac{p}{D}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right),$$

где $2m = \frac{pr}{2D}$; $n^2 = \frac{Eh}{r^2D}$; p — внешнее равномерное давление; h — толщина оболочки; E, μ — упругие постоянные; D — цилиндрическая жесткость.

Решение. Общий интеграл состоит из общего интеграла, соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2m\frac{d^2w}{dx^2} + n^2w = 0,$$

и частного решения.

Соответствующее однородному уравнению характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 + 2mk^2 + n^2 = 0,$$

а все четыре корня являются комплексными и определяются выражением

$$k = \pm\sqrt{-m \pm \sqrt{m^2 - n^2}} = \alpha + i\beta,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(n - m)}$; $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(n + m)}$; $n^2 > m^2$.

Общий интеграл однородного уравнения имеет вид

$$w_0 = C_1 \mathrm{ch}\,\alpha x \cos\beta x + C_2 \mathrm{sh}\,\alpha x \cos\beta x +$$
$$+ C_3 \mathrm{ch}\,\alpha x \sin\beta x + C_4 \mathrm{sh}\,\alpha x \sin\beta x.$$

Частное решение исходного уравнения запишем в виде

$$w_{r.p} = \frac{p}{Dn^2}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Тогда общий интеграл будет

$$w = w_0 + w_{r.p} = C_1 \operatorname{ch}\alpha x \cos\beta x + C_2 \operatorname{sh}\alpha x \cos\beta x +$$

$$+ C_3 \operatorname{ch}\alpha x \sin\beta x + C_4 \operatorname{sh}\alpha x \sin\beta x + \frac{p}{Dn^2}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

13.23. Конденсатор C разряжается на цепь, состоящую из последовательно включенных индуктивности L и активного сопротивления R (рис. 14.9).

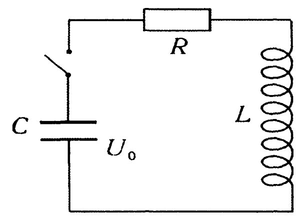

Рис. 14.9

Найти силу тока i в контуре, если при $t = 0$; $i_0 = 0$; $\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L}$.

Решение. Согласно второму правилу Кирхгофа имеем

$$L\frac{di}{dt} + Ri - \frac{1}{C}\int idt = 0.$$

Дифференцируя по t, получим

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

и находим его корни: $k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$

Очевидно, что общее решение уравнения зависит от соотношения параметров R, L, C.

1. Пусть $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}>0$. Так как $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}<\frac{R}{2L}$, то оба корня характеристического уравнения отрицательны. Если обозначить $\frac{R}{2L}=\alpha$; $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}=\beta^2$, то $k_1=-\alpha+\beta$; $k_2=-\alpha-\beta$ и общее решение имеет вид

$$i=C_1e^{(-\alpha+\beta)t}+C_2^{-(\alpha+\beta)t}.$$

Используя начальные условия задачи, находим, что $C_1=-C_2$,

$$\frac{di}{dt}(-\alpha+\beta)C_1e^{-(\alpha+\beta)t}-(\alpha+\beta)C_2e^{-(\alpha+\beta)t};$$

$$\frac{U_0}{L}=(-\alpha+\beta)C_1-(\alpha+\beta)C_2,$$

откуда $C_2=-\frac{U_0}{2\beta L}$.

Частное решение имеет вид

$$i=\frac{U_0}{2\beta L}\left(e^{(-\alpha+\beta)t}-e^{-(\alpha+\beta)t}\right).$$

2. Пусть $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}=0$, тогда корни характеристического уравнения равны между собой $k_1=k_2=-\alpha$ и решение имеет вид

$$i=(C_1+C_2t)e^{-\alpha t}.$$

Используя начальные условия имеем:

$$C_1=0,\qquad \frac{di}{dt}=C_2\left(e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}\right),\qquad C_2=-\frac{U_0}{L}.$$

Частное решение имеет вид

$$i=-\frac{U_0}{L}te^{-\alpha t}.$$

3. Пусть $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}<0$, тогда корни характеристического уравнения мнимые $k_{1,2}=-\alpha\pm\omega i$, где $\omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}$.

Общее решение имеет вид

$$i=e^{-\alpha t}\left(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t\right)$$

или

$$i=Ae^{-\alpha t}\sin\left(\omega t+\varphi\right),$$

где $Ae^{-\alpha t}$ — амплитуда тока; ω — круговая частота; φ — начальная фаза.

Найдем частное решение. Из первого начального условия имеем $0=A\sin\varphi$. Поскольку $A\neq 0$, то $\sin\varphi=0$. Откуда $\varphi=0$. Находим производную $\frac{di}{dt}=-\alpha Ae^{-\alpha t}\sin\omega t+\omega Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ и используем второе начальное условие $\frac{U_0}{L}=\omega A$, тогда $A=\frac{U_0}{L\omega}$. Следовательно, частное решение имеет вид

$$i=\frac{U_0}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{U_0\sin\omega t}{L\omega e^{\alpha t}}=0$, то амплитуда колебаний $\frac{U_0}{L\omega e^{\alpha t}}$ убывают с течением времени и в контуре возникают затухающие колебания.

14.14. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

1°. В ряде случаев решение дифференциальных уравнений не всегда удается выразить в элементарных функциях. Однако интегралы некоторых дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов. Обычно решение таких уравнений ищут в виде ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n \quad \text{или} \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{1}$$

где a_n — неопределенные коэффициенты находятся подстановкой решения y и, соответствующих, производных $y', y'', \ldots$ в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $\left(x-x_0\right)$ или переменной x в обеих частях полученного равенства.

2°. Если требуется найти частный интеграл, т. е. для уравнения $y'=f\left(x,y\right)$ решить задачу Коши при начальных условиях $y_0=y\left(x_0\right)$, то решение ищется в виде ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n \quad \text{или} \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n, \tag{2}$$

где $y_0=y\left(x_0\right)$, $y'\left(x_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)$, а дальнейшие производные $y''\left(x_0\right), y'''\left(x_0\right), \ldots$ находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения и заменой в них x на x_0.

Аналогично при помощи степенных рядов решаются уравнения высших порядков. Следует заметить, что при интегрировании уравнений посредством степенных рядов необходимо следить за сходимостью полученных рядов.

3°. Приближенное интегрирование уравнений *методом Бубнова–Галёркина.* В общем случае приближенное решение ищем в виде ряда

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x), \tag{3}$$

где c_i – неопределенные коэффициенты, подлежащие определению, $\varphi_i(x)$ – некоторые, наперед заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Для того, чтобы функция (3) являлась точным решением дифференциального уравнения, необходимо, чтобы уравнение тождественно удолвлетворялось при подстановке в него решения, а это требование равносильно требованию ортогональности по n функциям системы $\varphi_i(x) \quad (i=1,2,\ldots,n)$

$$\int_a^b X(x,y)\varphi_i(x)\,dx=0, \tag{4}$$

где $X(x,y)$ – дифференциальный оператор уравнения.

Неопределенные коэффициенты c_i находятся из решения системы (4).

14.1. Проинтегрировать уравнение $y'+2y=x$.

Решение. Будем решение искать в виде степенного ряда $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$

Отсюда $y'=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$ Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots+2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)=x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{ll} x^0 & a_1+2a_0=0, \\ x^1 & 2a_2+2a_1=1, \\ x^2 & 3a_3+2a_2=0, \\ x^3 & 4a_4+2a_3=0, \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots\ldots \end{array}$$

Из решения этой системы получим

$$a_1=-2a_0,\ a_2=\frac{1}{2}+2a_0,\ \ a_3=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2a_0\right),\ \ a_4=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2a_0\right),\ldots$$

Подставляя в решение неопределенные коэффициенты, выраженные через a_0 будем иметь

$$y = a_0 - 2a_0x + 2a_0x^2 - \frac{2}{3}2a_0x^3 + \frac{2}{4}\frac{2}{3}2a_0x^4 - \frac{2}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}2a_0x^5 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}\frac{2}{5}x^5 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0 (2x)^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n (2x)^n}{4n!}.$$

Неопределенный коэффициент a_0 играет роль произвольной постоянной интегрирования. Пользуясь признаком Даламбера, нетрудно доказать, что полученные ряды сходятся на всей числовой оси.

14.2. Найти решение уравнения $y' + xy^2 = 2\cos x$, взяв пять первых членов разложения, если $y = 1$ при $x = 0$.

Решение. Из заданного уравнения и начальных условий $y(0) = 1$ находим, что $y'(0) = 2$.

Продифференцируем уравнение

$y'' = -2\sin x - y^2 - 2xyy'$, $y''' = -2\cos x - 2yy' - 2\left(yy' + x\left(y'^2 + yy''\right)\right)$,
$y^{(4)} = 2\sin x - 4\left(y'^2 + yy''\right) - 2\left(y'^2 + yy''\right) - 2x\left(2yy'' + y'y'' + yy'''\right)$.

Полагая $x = 0$ и $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, находим частные значения производных $y''(0) = -1$, $y'''(0) = -10$, $y^{(4)}(0) = -18$.

Подставляя частные значения производных в разложение (2), будем иметь

$$y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \ldots$$

14.3. Проинтегрировать уравнение $y'' - xy' + y = x$, если $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Решение. Ищем решение в виде ряда (2) $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Из уравнения и начальных условий имеем $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'' = x + xy' - y$, $y''(0) = 0$.

Дифференцируя заданное уравнение, находим

$$y'''=1+xy'',\quad y^{(4)}=y''+xy''',\quad y^{(5)}=2y'''+xy^{(4)},$$
$$y^{(6)}=3y^{(4)}+xy^{(5)},\quad y^{(7)}=4y^{(5)}+xy^{(6)},\ldots$$

Полагая $x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, будем иметь $y'''(0)=1$, $y^{(4)}(0)=0$, $y^{(5)}(0)=2$, $y^{(6)}(0)=0$, $y^{(7)}(0)=2\cdot 4,\ldots$

Искомое решение примет вид

$$y=\frac{1\cdot x^3}{3!}+\frac{1\cdot 2x^5}{5!}+\frac{1\cdot 2\cdot 4x^7}{7!}+\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6x^9}{9!}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{3!}x^3+\frac{2\cdot 1}{5!}x^5+\frac{4\cdot 1\cdot 2}{7!}x^7+\frac{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{9!}x^9+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in R.$$

14.4. Найти решение уравнения $y''=\dfrac{y'}{y}-\dfrac{1}{x}$, взяв первые шесть членов разложения, если $y=1$, $y'=0$ при $x=1$.

Решение. Ищем решение в виде ряда $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$.

Из уравнения и начальных условий имеем, что $y''(1)=-1$.

Дифференцируя уравнение, получим

$$y'''=y''y^{-1}-y^{-2}y'^2+x^{-2},$$
$$y^{(4)}=y'''y^{-1}-3y''y^{-2}y'+2y^{-3}y'^3-2x^{-3},$$
$$y^{(5)}=y^{(4)}y^{-1}-y'''y^{-2}y'+\left(2y^{-3}y'^2-3y''y^{-2}\right)'y'+$$
$$+\left(2y^{-3}y'^2-3y''y^{-2}\right)y''+6x^{-4}.$$

Найдем значения этих производных в точке $x=1$

$$y'''(1)=0,\quad y^{(4)}(1)=-2,\quad y^{(5)}(1)=1.$$

Таким образом, искомое решение примет вид

$$y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2}{4!}(x-1)^4 + \frac{(x-1)^5}{5!} + \ldots$$

14.5. Дифференциальное уравнение траектории для самонаводящегося снаряда в полярной системе координат имеет вид

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2 = \frac{k^2}{\sin^4\alpha},$$

где $k = \frac{v_c}{v_ц} H$, v_c — скорость снаряда, $v_ц$ — скорость цели, H — постоянная высота цели, r — модуль радиус-вектора центра тяжести снаряда (точка M), α — полярный угол вектора $\vec{r}$ (рис. 14.10).

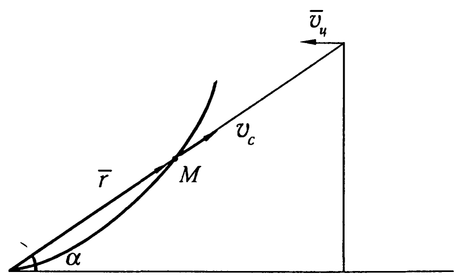

Рис. 14.10

Найти решение, удовлетворяющее начальному условию $r_0 = r(\alpha_0) = 0$.

Решение. В данном случае имеем дифференциальное уравнение первого порядка второй степени. Требуется найти зависимость r от α. Представим $r(\alpha)$ в виде ряда Тейлора

$$r = r(\alpha_0) + \frac{r'(\alpha_0)}{1!}(\alpha - \alpha_0) + \frac{r''(\alpha_0)}{2!}(\alpha - \alpha_0)^2 + \ldots$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти $r(\alpha_0)$, $r'(\alpha_0)$, $r''(\alpha_0)$, $r'''(\alpha_0)$ и т. д. Из начального условия имеем $r(\alpha_0) = 0$.

Заданное уравнение справедливо для любого момента времени, в частности, в начале движения имеем $(r_0')^2 + r_0^2 = \frac{k^2}{\sin^4\alpha_0}$, откуда $r_0' = \frac{k}{\sin^2\alpha_0}$. Знак плюс берется здесь из чисто физических соображений.

Чтобы найти r_0'' продифференцируем заданное уравнение, рассматривая r' как неявную функцию от α, тогда

$$r'r'' + rr' = -\frac{2k^2}{\sin^5\alpha}\cos\alpha.$$

Учитывая начальные условия $r_0 = 0$ и $r_0' = \frac{k}{\sin^2\alpha_0}$, получим $r_0'' = -\frac{2k}{\sin^3\alpha_0}\cos\alpha_0 = -2r_0'\mathrm{ctg}\,\alpha_0$.

Чтобы найти r_0''' продифференцируем уравнение еще раз

$$(r'')^2 + r'r''' + (r')^2 + rr'' = 2k^2\,\frac{5\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^4\alpha_0}.$$

Учитывая начальные условия, имеем

$$r_0''' = r_0'\left(1 + 6\mathrm{ctg}^2\alpha_0\right).$$

Продолжая процесс дифференцирования и используя начальные условия, можно получить любое число коэффициентов разложения. Таким образом, решение примет вид $r(\alpha) = \frac{k}{\sin^2\alpha_0}\left[(\alpha-\alpha_0) - \mathrm{ctg}\alpha_0(\alpha-\alpha_0)^2 + \frac{1}{3!}\left(1+6\mathrm{ctg}^2\alpha_0\right)(\alpha-\alpha_0)^3 + \ldots\right]$

Можно построить траекторию снаряда для различных углов старта α_0 и для различных отношений скоростей $v_c / v_ц$.

14.6. Найти решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \tag{1}$$

в окрестности особой точки $x = 0$.

Решение. Поскольку решение ищется в окрестности особой точки $x = 0$, то представим его в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} \quad (a_0 \neq 0) \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), будем иметь

$$\sum_k (\lambda+k)(\lambda+k-1)a_k x^{\lambda+k} + \sum_k (\lambda+k)a_k x^{\lambda+k} + \sum_k a_k x^{\lambda+k+2} -$$

$$-\sum_k n^2 a_k x^{\lambda+k} = 0$$

или

$$\sum_k \left((\lambda+k)^2 - n^2\right)a_k x^k + \sum a_k x^{k+2} = 0.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & \left(\lambda^2 - n^2\right)a_0 = 0; \quad \lambda^2 - n^2 = 0; \quad \lambda_1 = n; \quad \lambda_2 = -n, \\
x^1 & \left((\lambda+1)^2 - n^2\right)a_1 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^k & \left((\lambda+k)^2 - n^2\right)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2.
\end{array} \tag{3}$$

Будем искать решение для корня $\lambda_1 = n$. При $\lambda = n$ равенство (3) примет вид

$$\begin{gathered}
\left((n+1)^2 - n^2\right)a_1 = 0; \quad (2n+1)a_1 = 0; \quad a_1 = 0, \quad \text{т.к. } n \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left((n+k)^2 - n^2\right)a_k + a_{k-2} = 0; \quad k \geq 2.
\end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом,

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(n+k)^2 - n^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k \geq 2.$$

Так как $a_1 = 0$, то $a_{2k+1} = 0$ при всех k. Для четных числовых коэффициентов имеем

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(n+k)}.$$

Выразим a_{2k} через a_0 $(k = 1, 2, \ldots)$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (n+1)};$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (n+2)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)};$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3 \cdot (n+3)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 3! \cdot (n+1)(n+2)(n+3)}; \tag{5}$$

....

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} \cdot k! \cdot (n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

Подставляя коэффициенты (5) в выражение (2), получим

$$y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0 x^{2k}}{2^{2k} \cdot k! \cdot (n+1)(n+2)\ldots(n+k)}. \tag{6}$$

Пользуясь признаком Даламбера, нетрудно показать, что ряд (6) сходится при любом значении x, следовательно, коэффициент a_0 может быть выбран произвольно. Полагаем

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}, \tag{7}$$

где $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0)$ — гамма-функция, обладающая свойством $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Подставляя (7) в (6), первое частное решение будет иметь вид

$$y_1 = \mathrm{I}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \qquad (8)$$

где $\mathrm{I}_n(n)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка.

Найдем теперь второе частное решение, соответствующее $\lambda_2 = -n$. Из выражений (4) имеем

$$\left((-n+1)^2 - n^2\right)a_1 = 0; \quad (-2n+1)a_1 = 0,$$

т. е. если n не равно половине нечетного числа $\frac{2k+1}{2}$ и не является числом целым $n \neq k$, то все коэффициенты a_k (5)

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(-n+k)}$$

могут быть выражены через произвольный коэффициент C_0

$$C_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}.$$

Таким образом, второе частное решение уравнения (1) примет вид

$$y_2 = \mathrm{I}_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Отсюда общее решение уравнения Бесселя будет

$$y = C_1\mathrm{I}_n(x) + C_2\mathrm{I}_{-n}(x) \quad (n \text{ — не целое число}).$$

Если в качестве второго частного решения взять функцию Бесселя второго рода n-го порядка

$$Y_n(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(2\ln\frac{x}{2} + 2C - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{k+n}\frac{1}{\nu}\right) -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k},$$

($C = 0{,}5772157...$ — постоянная Эйлера), то общее решение уравнения Бесселя примет вид

$$y = C_1 Y_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (n \text{ — целое положительное число}).$$

Здесь следует заметить, что функция $Y_n(x)$ в особой точке $x = 0$ обращается в бесконечность.

14.7. Найти решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

на отрезке [1, 2] при граничных условиях $y(1) = 1$, $y(2) = 2$.

Решение. С целью упрощения выбора решения приведем при помощи подстановки $y = z + x$ граничные условия к виду $z(1) = z(2) = 0$. Само уравнение в этом случае примет вид

$$L(f(x,z)) = xz'' + z' + \frac{x^2-1}{x}z + x^2 = 0.$$

Решение, удовлетворяющее новым граничным условиям, берем в виде

$$z_1 = C_1\varphi_1 = C_1(x-1)(2-x).$$

Воспользуемся теперь методом Бубнова–Галёркина

$$\int_1^2 L(f(x,z)) = \int_1^2 \left(-2C_1 x + (3-2x)C_1 + \frac{x^2-1}{x}(x-1)(2-x)C_1 + x^2\right)\cdot$$
$$\cdot(x-1)(2-x)dx = 0.$$

Интегрируя данное выражение и разрешая его относительно C_1, находим, что $C_1 = 0{,}811$.

Приближенное решение уравнения Бесселя примет вид

$$z_1 = 0{,}811(x-1)(2-x) \quad \text{или} \quad y_1 = 0{,}811(x-1)(2-x) + x.$$

Следует заметить, что сравнение точного решения уравнения Бесселя через функции Бесселя

$$y = 3{,}6072\, I_1(x) + 0{,}75195\, Y_1(x)$$

с приближенным имеет расхождение в четвертом знаке, т. е. даже первое приближение дает достаточно точный результат.

14.8. Найти общее решение уравнения Черненко

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{2r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{u^2}{2r^3} \quad (*)$$

при граничных условиях $u = u_1(P_1)$ при $r = r_1$ и $u = u_2(P_2)$ при $r = r_2$, где в данном случае u – радиальное перемещение, зависящее от внешнего P_1 и внутреннего P_2 давлений на оболочку.

Решение. Нетрудно заметить, что это уравнение нелинейное. Воспользуемся методом последовательных приближений. Для этого представим уравнение в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{2r}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u^2}{r^2}\right). \quad (1)$$

Правая часть уравнения есть не что иное, как уравнение Бесселя, решение которого

$$u_0 = C_1 r + C_2 / r$$

примем за начальное приближение. Здесь C_1, C_2 – постоянные интегрирования при решении однородного уравнения находятся из граничных условий.

Подставляя начальное приближение в правую часть уравнения (1), приходим к неоднородному дифференциальному уравнению

(*) Уравнение получено при исследовании бесконечной цилиндрической оболочки по нелинейной теории упругости при использовании неогуковского потенциала. Если использовать закон Гука, то уравнение сводится к линейному уравнению Бесселя.

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=f(r), \tag{2}$$

где $f(r)=\frac{1}{2r}\left[C_1(1+C_1)+\frac{C_2}{r^2}(2C_1-C_2)+\frac{C_2^2}{r^4}\right]$.

Общее решение сответствующего однородного уравнения запишем в виде

$$u_1=C_3r+C_4/r. \tag{3}$$

Чтобы последнее выражение было решением уравнения (2), надо определить C_3 и C_4 как функции от r. Для этого воспользуемся методом вариации произвольных постоянных

$$C_3'r+C_4'/r=0, \tag{4}$$

$$C_3'-C_4'/r^2=f(r).$$

Решая систему (4) и интегрируя, получаем

$$C_3=\frac{1}{4}C_1(1+C_1)\ln r-\frac{C_2}{8r^2}(2C_1-C_2)-\frac{C_2^2}{16r^4}+\bar{C}_1, \tag{5}$$

$$C_4=\frac{C_1}{8}C_1(1+C_1)r^2-\frac{C_4}{4}(2C_1-C_2)\ln r+\frac{C_2^2}{8r^2}+\bar{C}_2.$$

Подставляя найденные функции (5) в (3), получаем первое приближение общего решения неоднородного уравнения (2). Постоянные интегрирования $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ находим из граничных условий.

Аналогично находится второе приближение и т. д. Таким образом, решение представляет ряд, число членов которого определяется требуемой точностью.

14.9. Найти решение уравнения $y^{IV}+y=3x$ при граничных условиях $y=y'=0$ при $x=l$; $y''=y'''=0$ при $x=0$.

Решение. Чтобы удовлетворить граничным условиям первое приближение выбираем в виде многочлена

$$y_1 = C_1\varphi_1 = C_1\left(x-l\right)^2\left(x^2+2lx+3l^2\right).$$

Пользуясь методом Бубнова–Галёркина, будем иметь

$$\int_0^l\left(y_1^{IV}+y_1-3x\right)\left(x-l\right)^2\left(x^2+2lx+3l^2\right)dx=0.$$

Подставляя сюда y_1 и интегрируя, находим, что C_1 при $l = 1$ равно 0,0324. Таким образом

$$y_1 = 0,0324\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+3\right).$$

Второе приближение, удовлетворяющее граничным условиям, запишем в виде

$$y_2 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\varphi_1 + C_2\left(x-l\right)^3\left(3x^2+4lx+3l^2\right).$$

Для определения C_1 и C_2 составляем систему

$$\int_0^l\left(y_2^{IV}+y_2-3x\right)\varphi_1 dx=0;$$

$$\int_0^l\left(y_2^{IV}+y_2-3x\right)\varphi_2 dx=0,$$

которая в раскрытом виде будет

$$\int_0^l(24\left(C_1+5C_2\left(9x-l\right)\right)+C_1\left(x-l\right)^2\left(x^2+2lx+3l^2\right)+$$

$$+C_2\left(x-l\right)^3\left(3x^2+4lx+3l^2\right)-3x)\left(x-l\right)^2\left(x^2+2lx+3l^2\right)dx=0;$$

$$\int_0^l(24\left(C_1+5C_2\left(9x-l\right)\right)+C_1\left(x-l\right)^2\left(x^2+2lx+3l^2\right)+$$

$$+C_2\left(x-l\right)^3\left(3x^2+4lx+3l^2\right)-3x)\left(x-l\right)^3\left(3x^2+4lx+3l^2\right)dx=0.$$

Интегрируя эту систему при $l = 1$, получим

$$\begin{cases} 26,07C_1 - 33,36C_2 = 0,72; \\ 31,05C_1 - 25,74C_2 = 1, \end{cases}$$

откуда C_1 = 0,0407; C_2 = 0,0102.

Окончательно будем иметь

$$y_2 = 0,0407(x-1)^2(x^2+2x+3) + 0,0102(x-1)^3(3x^3+4x+3).$$

14.10. Найти упругую линию равномерно загруженной нагрузкой p балки-полоски единичной ширины, дифференциальное уравнение изгиба которой имеет вид

$$Dw^{IV} - Tw'' = p.$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость балки-полоски, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина полоски, $T = \sigma h$ — продольная сила, σ — напряжение, действующее в срединной поверхности, считаемое положительным при растяжении.

Граничные условия: а) балка-полоска свободно оперта на жесткие опоры $w = w'' = 0$ при z = 0 и z = l; б) балка-полоска жестко заделана по концам $w = w' = 0$ при z = 0 и z = l.

Решение. а) Расположим начало координат на опоре (рис. 14. 11).

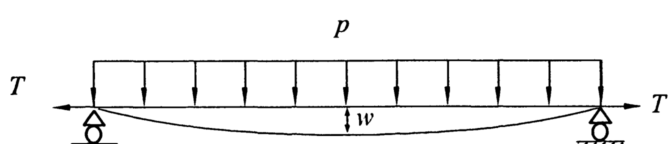

Рис. 14.11

Воспользуемся методом Бубнова–Галёркина. Представим искомую упругую линию в виде ряда

$$w = \sum_k C_k \sin \frac{k\pi z}{l}$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям.

Подставляя решение в дифференциальное уравнение, получим

$$L = \sum_k \left(D\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + T\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right) C_k \sin \frac{k\pi z}{l} - P = 0.$$

Умножая функцию L на $\sin \frac{k\pi z}{l}$ и учитывая, что при интегрировании по длине балки-полоски

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} dz = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n;$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi z}{l} dz = \frac{l}{2} \qquad \text{при } k = n,$$

получим

$$\int_0^l L \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \frac{C_n l}{2} \left(D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + T\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \right) - p \int_0^l \sin \frac{n\pi z}{l} dz = 0.$$

Поскольку $\int_0^l \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \begin{cases} \frac{2l}{n\pi}, & (n = 1, 3, 5, \ldots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \ldots), \end{cases}$

то окончательно получим

$$C_k = \frac{4p}{k\pi \left(D\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + T\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right)}.$$

Здесь следует иметь в виду, что $k = n$. Таким образом упругая линия балки-полоски имеет вид

$$w=\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{4p\sin\dfrac{k\pi z}{l}}{k\pi\left(D\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^4+T\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2\right)}.$$

б) Решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, представим в виде ряда

$$w=\sum_k\frac{C_k}{2}\left(1-\cos\frac{2k\pi z}{l}\right).$$

Подставляя w в дифференциальное уравнение, получим

$$L=-\frac{1}{2}\sum_k\left(D\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^4+T\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^2\right)C_k\cos\frac{2k\pi z}{l}-p=0.$$

Умножим функцию L на $1-\cos\dfrac{2n\pi z}{l}$ и воспользуемся методом Бубнова–Галёркина $\int\limits_0^l L\left(1-\cos\dfrac{2n\pi z}{l}\right)dz=0$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^l\cos\frac{2k\pi z}{l}dz=0;\qquad \int\limits_0^l\cos\frac{2k\pi z}{l}\cos\frac{2n\pi z}{l}dz=\begin{cases}0 & (k\neq n)\\ \dfrac{l}{2} & (k=n),\end{cases}$$

$$p\int\limits_0^l\left(1-\cos\frac{2n\pi z}{l}\right)dz=pl,$$

получим

$$\frac{l}{4}\left(D\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^4+T\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2\right)C_n-pl=0.$$

Поскольку $n=k$, то имеем

$$C_k = \frac{4p}{D\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^4 + T\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^2}.$$

Таким образом, упругая линия рассматриваемой балки-полоски имеет вид

$$w = 2\sum_k \frac{p\left(1 - \cos\frac{2k\pi z}{l}\right)}{D\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^4 + T\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^2}.$$

14.11. Найти решение уравнения равновесия свободно опертой балки-полоски, выделенной из цилиндрической поверхности радиуса R

$$\frac{D}{h}\frac{d^4w}{dy^4} + p\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{p}{R} = \frac{q}{h},$$

где h — толщина балки-полоски; p — сжимающее напряжение от нагрузки q, приложенной со стороны выпуклости.

Решение. Поскольку балка-полоска свободно оперта, то $w = w''_{yy} = 0$ при $y = 0$ и $y = b$.

В качестве первого приближения выражение для прогиба w, удовлетворяющее граничным условиям, примем в виде

$$w = f\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Воспользуемся методом Бубнова – Галёркина

$$\int_0^b Y\sin\frac{\pi y}{b}dy = 0,$$

где

$$Y = D\frac{d^4w}{dy^4} + hp\left(\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{1}{R}\right) - q.$$

Подставляя сюда значение прогиба w и интегрируя, получим

$$Df\frac{\pi^5}{4b^4}-phf\frac{\pi^3}{4b^2}+p\frac{h}{R}-q=0$$

или

$$f=\frac{q-\dfrac{ph}{R}}{\dfrac{\pi^3}{4b^2}\left(\dfrac{\pi^2}{b^2}D-ph\right)}.$$

Таким образом, $$w=\frac{q-\dfrac{ph}{R}}{\dfrac{\pi^3}{4b^2}\left(D\dfrac{\pi^2}{b^2}-ph\right)}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

14.15. Системы дифференциальных уравнений

1°. *Метод исключения.* Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=f_1\left(t,x_1,x_2,\dots,x_n\right),\\
&\frac{dx_2}{dt}=f_2\left(t,x_1,x_2,\dots,x_n\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)\\
&\frac{dx_n}{dt}=f_n\left(t,x_1,x_2,\dots,x_n\right),
\end{aligned}$$

здесь $x_1,x_2,\dots,x_n$ — неизвестные функции, t — независимая переменная.

Система уравнений (1) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией. Для этого необходимо продифференцировать одно уравнение и с помощью другого исключить одну неизвестную функцию. Затем еще раз продифференцировать и исключить другую неизвестную функцию и т. д. Таким образом, решение сводится, как правило, к интегрированию одного уравнения n-го порядка

$$x_i^{(n)} + P_1 x_i^{(n-1)} + \ldots + P_n x_i = Q.$$

Остальные $(n-1)$ неизвестные функции находятся из общего интеграла $x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ этого уравнения путем дифференцирования и алгебраических действий.

Для нахождения частного решения системы (1) (задача Коши) необходимо иметь n начальных условий $x_1(t_0) = a_1$, $x_2(t_0) = a_2, \ldots,$ $x_n(t_0) = a_n$.

Постоянные интегрирования C_1, C_2, ..., C_n находятся подстановкой начальных условий при $t = t_0$ в общее решение системы.

2°. *Метод интегрируемых комбинаций.* Суть метода заключается в такой комбинации уравнений системы, которая дает возможность получить легко интегрируемые уравнения.

Линейные системы, содержащие дифференциальные уравнения высших порядков, также можно посредством дифференцирования и комбинации уравнений свести к одному уравнению.

Методом интегрируемых комбинаций решаются системы вида

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

Умножая на подходящие множители и складывая, иногда удается получить уравнение, содержащее только две переменные x_i, x_j. Интегрируя это уравнение, находим один из $n-1$ интегралов системы $f(x_i, x_j) = C$.

15.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0, \end{cases}$$

при $t = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Решение. Продифференцируем по t первое уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0.$$

Исключая с помощью второго уравнения $\dfrac{dy}{dt}$ и y с помощью первого уравнения системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Таким образом, задача свелась к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка. Корни характеристического уравнения кратные $k_{1,2} = -2$. Следовательно, общее решение для x будет $x = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$. Подставляя x в первое уравнение, находим общее решение для $y = -(C_1 + (t+1)C_2)e^{-2t}$.

Для определения произвольных постоянных воспользуемся начальными условиями. При $t = 0$, $x = 1$ имеем $C_1 = 1$. При $t = 0$, $y = 1$ имеем $1 = -(1 + C_2)$, $C_2 = -2$. Следовательно, частное решение имеет вид

$$\begin{cases} x = (1 - 2t)e^{-2t}, \\ y = (1 + 2t)e^{-2t}. \end{cases}$$

15.2. Решить системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 25x = 16e^t. \end{cases}$

Решение. а) Дифференцируем по t первое уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}$. Подставляя сюда второе, получим $\dfrac{d^2x}{dt^2} = z$. Еще раз продифференцируем полученное уравнение по t: $\dfrac{d^3x}{dt^3} = \dfrac{dz}{dt}$. Подставляя сюда третье уравнение, будем иметь: $\dfrac{d^3x}{dt^3} - x = 0$. Таким образом, задача свелась к однородному линейному уравнению третьего порядка относительно x. Решение этого уравнения имеет вид

$$x = C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Общее решение для y находим дифференцированием первого уравнения

$$y = C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(-C_2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) =$$

$$= C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2}\left(C_3\sqrt{3} - C_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\left(C_2\sqrt{3} + C_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Общее решение для z находим из второго уравнения системы

$$z = C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2}\left(C_2\sqrt{3} - C_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\left(C_3\sqrt{3} + C_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

б) Воспользуемся методом интегрируемых комбинаций. Сложим первое и второе уравнения

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{или} \quad \frac{d(x+y)}{dt} = (x+y)^2.$$

Откуда $\dfrac{d(x+y)}{(x+y)^2} = dt, \quad -\dfrac{1}{x+y} = t + C_1.$

Теперь разделим первое уравнение на второе

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(x+y)}{y(x+y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad x = C_2y.$$

Исключая из решений сначала y, а затем x, получим общее решение

$$x = -\frac{C_2}{(C_2+1)(t+C_1)}, \quad y = -\frac{1}{(C_2+1)(t+C_1)}.$$

в) Из первого уравнения находим, что $y = \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x$. Вычислим производные: $\dot{y} = \dddot{x} - 4\ddot{x} + 4\dot{x}$ и $\ddot{y} = x^{(IV)} - 4\dddot{x} + 4\ddot{x}$. Подставляя y, $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ во второе уравнение, получим

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 8\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 16e^t,$$

т. е. задача свелась к линейному неоднородному уравнению четвертого порядка. Находим корни характеристического уравнения, соответствующего однородного уравнения $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm i$. Решение однородного уравнения будет

$$u = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_3\cos t + C_4\sin t.$$

Частное решение неоднородного уравнения x_1 ищем в виде $x_1 = Ae^t$. Подставляя x_1 в неоднородное уравнение находим, что $A = -1$. Таким образом, общее решение для x примет вид

$$x = -e^t + C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_3\cos t + C_4\sin t.$$

Подставляя x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в первое уравнение системы, находим общее решение для y

$$y = -e^t + C_1e^{3t} + 25C_2e^{-3t} + C_3(3\cos t + 4\sin t) + C_4(3\sin t - 4\cos t).$$

15.3. Решить систему:

а) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$; б) $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}$.

Решение. а) Уравнение $\dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$ или $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ представляет интегрируемую комбинацию и имеет решение $y = C_1z$.

Рассмотрим теперь уравнение $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3}$ и представим его в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{3x}{2y}$. Это однородное уравнение первого порядка. Пусть x — функция, y — независимая переменная. Воспользуемся заменой $x = ty$, $x'_y = t + yt'_y$, тогда второе решение будет иметь вид $t + y\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$, $\dfrac{2dt}{t(t^2+2)} = \dfrac{dy}{y}$,

$\ln t^2 - \ln(t^2+1) = \ln|C_2y|$, $\dfrac{t^2}{t^2+1} = C_2y$, $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = C_2y$.

б) Сложим все числители и знаменатели

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Отсюда получим, что $dx + dy + dz = d\left(x + y + z\right) = 0$. Следовательно, первый интеграл системы будет $x + y + z = C_1$.

Чтобы получить второй интеграл системы, умножим числители и знаменатели, соответственно, на $2x$, $2y$, $2z$ и сложим числители и знаменатели. Тогда будем иметь

$$\frac{2xdx}{2x\left(z-y\right)} = \frac{2ydy}{2y\left(x-z\right)} = \frac{2zdz}{2z\left(y-x\right)} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0}.$$

Отсюда $dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$. Таким образом, второй интеграл системы примет вид $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Нетрудно заметить, что первый интеграл системы дает семейство плоскостей, а второй — семейство сфер.

Глава 15
РЯДЫ ФУРЬЕ

15.1. Ряд Фурье для функции с периодом 2π

1°. Кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$ с периодом 2π может быть представлена в интервале $[-\pi;\pi]$ в виде ряда Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \qquad (1)$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx, \qquad (k=0,1,2,\ldots), \qquad (2)$$

коэффициенты Фурье.

Теорема о разложимости функции в ряд. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема и 2π-периодична, то ее ряд Фурье сходится в любой точке x_0 и имеет сумму

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right). \qquad (3)$$

В точке непрерывности функции значение суммы ряда Фурье совпадает со значением самой функции $f(x)$. Так как функция $f(x)$ есть 2π-периодическая, то на концах интервала в точках $\pm\pi$ она:

а) либо непрерывна, причем $f(-\pi)=f(\pi)$, и значения суммы $S(\pm\pi)=f(\pi)$;

б) либо разрывна, причем в силу 2π-периодичности $f(-\pi-0)=f(\pi-0)$, $f(-\pi+0)=f(\pi+0)$, и значения суммы

$$S(\pm\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right). \tag{4}$$

2°. Ряд Фурье для четной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx, \tag{5}$$

где

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx dx,\quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{6}$$

Ряд Фурье для нечетной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx, \tag{7}$$

где

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx dx,\quad (k=1,2,\ldots). \tag{8}$$

3°. Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikx}, \tag{9}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{10}$$

Представляя ряд Фурье (9) в виде

$$f(x)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}\right), \tag{11}$$

где

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}, \tag{12}$$

по известным формулам Эйлера

$$\cos kx=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2},\quad \sin kx=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i} \tag{13}$$

можно получить ряд Фурье (1).

4°. Если ряд Фурье (1) сходится, то он сходится к некоторой периодической функции $f(x)$. Обратно, периодическую функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье.

Иначе говоря, периодическую функцию можно разложить в ряд, состоящий из синусов и косинусов кратных дуг

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots \tag{14}$$

Простейшей периодической функцией является простая гармоника

$$y=A\sin(\omega x+\varphi), \tag{15}$$

где A — амплитуда колебания, ω — круговая частота (число колебаний на отрезке $[0,2\pi]$, φ — начальная фаза.

Период колебаний функции (15) определяется по формуле

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{16}$$

Уравнение простой гармоники можно записать в другой форме

$$y=a\cos\omega x+b\sin\omega x, \tag{17}$$

где $a=A\sin\varphi;\quad b=A\cos\varphi$.

Отсюда, по уравнению простой гармоники (17), можно найти амплитуду и фазу колебания

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \text{tg}\varphi = \frac{a}{b}. \tag{18}$$

1.1. Дана 2π-периодическая функция $f(x) = x + |x|$ в интервале $(-\pi, \pi]$. Требуется **разложить** функцию в ряд Фурье.

Решение. Представим функцию в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ 2x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

и дадим ее график (рис. 15.1).

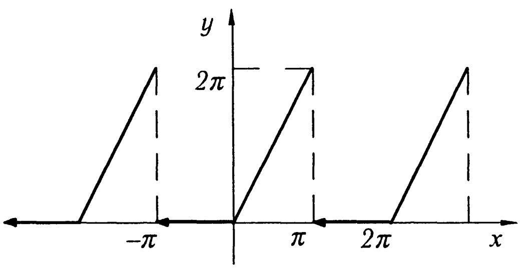

Рис. 15.1

Докажем разложимость функции в ряд. Функция кусочно-дифференцируема, т.к. внутри интервалов $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ имеет производную. Поскольку на концах интервалов функция и ее производная имеют конечные предельные значения $f(-\pi + 0) = 0$, $f'(-\pi + 0) = 0$, $f(-0) = 0$, $f'(-0) = 0$, $f(+0) = 0$, $f'(+0) = 2$, $f(\pi - 0) = 2\pi$, $f'(\pi - 0) = 2$, то она разложима в ряд Фурье.

Значения суммы ряда Фурье $S(x)$ совпадают со значениями функции во всех точках, кроме точек разрыва. При $x = \pm\pi$ значения суммы находим по формуле (4) $S(\pm\pi) = \pi$, а так как функция $S(x)$ 2π–периодична, то $S(\pm(2k-1)\pi) = \pi \quad (k = 1, 2, ...)$.

Для нахождения ряда Фурье вычислим коэффициенты Фурье по формулам (2), учитывая значения функции для интервалов $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{x^2}{\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right],\quad (k=1,2,...);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kxdx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1}+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Подставляя a_0, a_k, b_k в ряд Фурье (1), получим

$$x+|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right]\cos kx+\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx\right\}.$$

1.2. Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию $f(x)=x^2$, заданную в интервале $(-\pi,\pi]$, и, пользуясь разложением, найти сумму ряда Дирихле $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Решение. Нетрудно заметить, что функция удовлетворяет теореме о разложимости функции в ряд Фурье и имеет график (рис. 15.2).

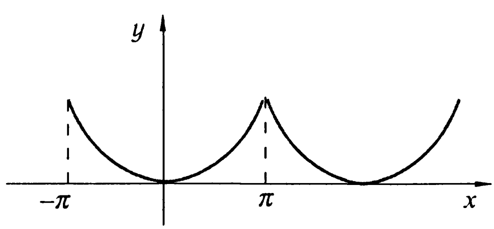

Рис. 15.2

Так как функция $f(x)=x^2$ четная, то по формуле (6) имеем

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x^2\sin kx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{k}\int\limits_0^{\pi}x\sin kxdx\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi k}\left[\frac{x}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos kxdx\right]=\frac{4}{k^2}(-1)^k,\quad (k=1,2,\ldots).$$

Отсюда по формуле (5)

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(-1)^k\cos kx.$$

Полагая $x=\pi$, получим $\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}(-1)^k\cos k\pi$, откуда сумма ряда Дирихле $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

1.3. Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию $f(x)=|x|$, заданную в интервале $(-\pi,\pi]$, и, пользуясь разложением, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

Решение. Функция кусочно-дифференцируема и 2π–периодична, следовательно, может быть разложена в сходящийся ряд Фурье. График функции показан на рис. 15.3.

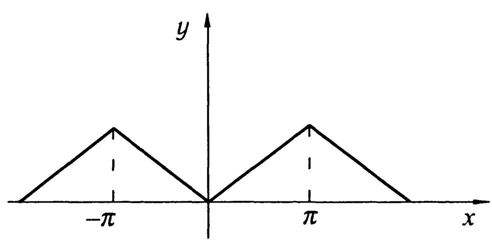

Рис. 15.3

Так как функция непрерывна, то при всех x значение суммы ряда Фурье совпадает со значениями самой функции $f(x)$.

Поскольку функция четная, то по формуле (6) имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right], \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда по формуле (5) получим

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx.$$

Так как второй член в правой части отличен от нуля только при нечетных значениях k и равен -2, то можно записать

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Полагая $x = 0$, будем иметь $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$, откуда сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1.4. Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию

$$y = \begin{cases} -1 & при \quad -\pi < x < 0, \\ 1 & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

и, пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Решение. Функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье и имеет вид (рис. 15.4).

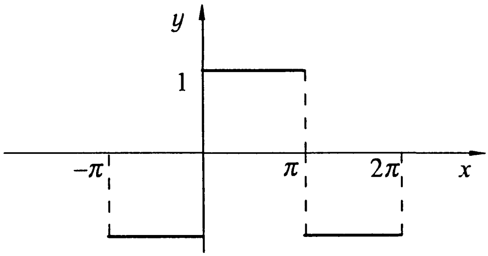

Рис. 15.4

Так как функция нечетная, то коэффициенты ряда Фурье (7) находим по формуле (8)

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx dx = -\frac{2}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}\left[(-1)^k - 1\right], \quad (k = 1, 2, ...).$$

Отсюда ряд $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[1-(-1)^k\right]\sin kx.$

Так как члены ряда отличны от нуля только при нечетных k, то ряд можно записать в виде $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$

Откуда при $x = \frac{\pi}{2}$ имеем сумму $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$

1.5. Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию $f(x) = e^x$, заданную в интервале $(-\pi, \pi]$.

Решение. Поскольку функция удовлетворяет теореме о разложимости функции в ряд Фурье, то в интервале $(-\pi, \pi]$ ряд представляет функцию e^x, а в точках разрыва $x = \pm\pi$ его сумма равна $S(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + e^{\pi}\right).$

Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье (9), где коэффициенты находим по формуле (10)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x}dx = \left.\frac{e^{(1-ik)x}}{2\pi(1-ik)}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} = \frac{e^{\pi}e^{-ik\pi} - e^{-\pi}e^{ik\pi}}{2\pi(1-ik)}.$$

Так как по формулам Эйлера $e^{\pm ik\pi} = \cos k\pi \pm i\sin k\pi = (-1)^k$,

то $c_k = \dfrac{(-1)^k\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{2\pi(1-ik)}$ и ряд Фурье

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{ikx}}{1-ik}.$$

Перейдем к обычной тригонометрической форме ряда Фурье

$$c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k e^{ikx}}{1-ik} + \frac{(-1)^{-k}e^{-ikx}}{1+ik}\right] =$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}(-1)^k\frac{(1+ik)e^{ikx} + (1-ik)e^{-ikx}}{1+k^2} =$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}(-1)^k\frac{\cos kx + k\sin kx}{1+k^2}; \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Полагая $k = 0$ находим, что $c_0 = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$.

Таким образом $e^x = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx + k\sin kx)\right]$.

1.6. Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

и представить разложение в виде суммы простых гармоник.

Решение. Коэффициенты ряда Фурье находим по формулам (2). Поскольку интегрировать следует по промежутку внутри которого $f(x) \neq 0$, то в данном случае интегрируем по промежутку $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\sin k\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi}\cos k\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{k\pi}\left(\cos k\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Учитывая различные значения для a_k и b_k в зависимости от k, получаем разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Фурье в следующем виде

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x + \sin x + \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x +$$
$$+ \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots).$$

Определим амплитуды и начальные фазы (18) для каждой из гармоник.

Для первой гармоники:

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}; \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = 1; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$

следовательно, $\frac{1}{\pi}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Для второй гармоники:

$A_2 = \frac{1}{\pi}$; $\varphi_2 = 0$, поэтому $\frac{1}{\pi}\sin 2x$ и есть вторая гармоника.

Для третьей гармоники:

$A_3=\sqrt{\left(-\frac{1}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{3\pi}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$; $\operatorname{tg}\varphi_3=-1$; $\varphi_3=-\frac{\pi}{4}$, следовательно, $-\frac{1}{3\pi}\cos 3x+\frac{1}{3\pi}\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Четвертая гармоника равна нулю.

Для пятой гармоники:

$A_5=\sqrt{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{5\pi}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{5\pi}$; $\operatorname{tg}\varphi_5=1$; $\varphi_5=\frac{\pi}{4}$, следовательно, $\frac{1}{5\pi}\cos 5x+\frac{1}{5\pi}\sin 5x=\frac{\sqrt{2}}{5\pi}\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Ряд Фурье в виде суммы простых гармоник имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\pi}\sin 2x+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{5\pi}\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$$

15.2. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

1°. Для кусочно-дифференцируемой и $2l$-периодичной функции $f(x)$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{\pi}{l}x+b_k\sin k\frac{\pi}{l}x\right), \quad (1)$$

где

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos k\frac{\pi}{l}xdx; \quad (k=0,1,2,\ldots),$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin k\frac{\pi}{l}xdx; \quad (k=0,1,2,\ldots). \quad (2)$$

Разложение (1) может быть применено и к непериодическим функциям. Например, функция $f(x)=|x|$ не является периодической. Если ее рассматривать на отрезке $[-l, l]$, а затем продолжить периодически (рис. 15.5), то получим периодическую функцию. Поэтому, если говорят о разложении функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ в ряд Фурье, то имеется в виду, что функция периодическая.

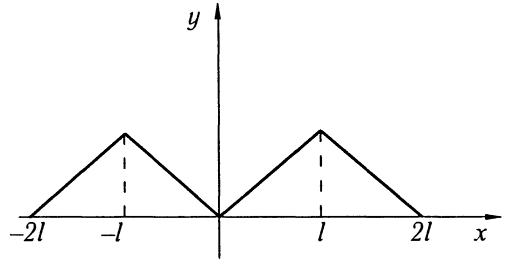

Рис. 15.5

2°. Если функция $f(x)$ четная, то ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi}{l}x, \qquad (3)$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos k\frac{\pi}{l}xdx; \quad (k=0,1,2,...). \qquad (4)$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi}{l}x, \qquad (5)$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k\frac{\pi}{l}xdx; \quad (k=1,2,...). \qquad (6)$$

3°. Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}x}, \tag{7}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ik\frac{\pi}{l}x}dx. \tag{8}$$

2.1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad -3<x\le 0,\\ x & при \quad 0<x<3,\end{cases}$$

пользуясь разложением, найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Решение. Поскольку функция кусочно-дифференцируема и $2l$-периодична, то разложение ее в ряд Фурье находим по формуле (1), а коэффициенты по формулам (2). Полагая $l=3$ и разбивая интервал интегрирования на две части, получим

$$a_0=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{3}xdx\right)=\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=\frac{3}{2},$$

$$a_k=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}0\cdot\cos k\frac{\pi}{3}xdx+\int_{0}^{3}x\cos k\frac{\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{3}x\Big|_0^3-\frac{3x}{k\pi}\int_0^3\sin k\frac{\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{3}{k^2\pi^2}\cos k\frac{\pi}{3}x\Big|_0^3=\frac{3}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right],$$

$$b_k=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}0\cdot\sin k\frac{\pi}{3}xdx+\int_{0}^{3}x\sin k\frac{\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left(-x\cos k\frac{\pi}{3}x\Big|_0^3+\int_0^3\cos k\frac{\pi}{3}xdx\right)=\frac{3}{k\pi}(-1)^{k+1};$$

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k-1}{k}\cos k\frac{\pi}{3}x+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\frac{\pi}{3}x\right)=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos\frac{2k-1}{3}\pi x+\frac{(-1)^k}{k}\sin k\frac{\pi}{3}x\right].$$

При $x = 0$ разложение примет вид $0=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$, откуда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2.2. Разложить в ряд Фурье $2l$ – периодическую функцию $f(x)=|x|$, заданную в интервале $-1<x\le 1$.

Решение. Так как функция четная, то воспользуемся формулами (3), (4). Полагая $l = 1$, получим

$$a_0=2\int_0^1 xdx=1,$$

$$a_k=2\int_0^1 x\cos k\pi xdx=2\left(\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_0^1\sin k\pi xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right],$$

$$|x|=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos k\pi x=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

2.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{x}{3}$, заданную в интервале $-3<x\le 3$.

Решение. Так как функция нечетная, то воспользуемся формулами (5), (6). Полагая $l = 3$, получим

$$b_k=\frac{2}{3}\int_0^3\frac{x}{3}\sin k\frac{\pi}{3}xdx=\frac{2}{9}\left(-\frac{3x}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{3}x\Big|_0^3+\frac{3}{k\pi}\int_0^3\cos k\frac{\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{3}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\frac{\pi}{3}x.$$

2.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=10-x$ при $5<x<15$.

Решение. Воспользуемся формулами (2), в которых заменим пределы на 5 и 15. При $k = 0$, $l = 5$ будем иметь

$$a_0=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\,dx=\frac{1}{5}\left(10x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_5^{15}=0;$$

$$a_k=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos k\frac{\pi}{5}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\left((10-x)\frac{5}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{5}x\Bigg|_5^{15}+\frac{5}{k\pi}\int_5^{15}\sin k\frac{\pi}{5}dx\right)=$$

$$=\frac{5}{k^2\pi^2}\cos k\frac{\pi}{5}x\Bigg|_5^{15}=0;$$

$$b_k=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin k\frac{\pi}{5}xdx=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-(10-x)\frac{5}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{5}x\Bigg|_5^{15}-\frac{5}{k\pi}\int_5^{15}\cos k\frac{\pi}{5}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{25}{k\pi}\cos 3k\pi+\frac{25}{k\pi}\cos k\pi-\frac{25}{k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{5}x\Bigg|_5^{15}\right)=\frac{10}{k\pi}(-1)^k.$$

Таким образом, по формуле (5) имеем

$$10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin k\frac{\pi}{5}x.$$

2.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=e^x$, заданную в интервале $-2<x\le 2$.

Решение. Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье (7), где коэффициенты находим по формуле (8). Полагая $l = 2$, будет иметь

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^x e^{-\frac{ik\pi}{2}x}dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{\left(1-\frac{ik\pi}{2}\right)x}dx = \left.\frac{e^{\left(1-\frac{ik\pi}{2}\right)x}}{2(2-ik\pi)}\right|_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{e^{(2-ik\pi)} - e^{-(2-ik\pi)}}{2(2-ik\pi)} = \frac{(-1)^k e^2 - e^{-2}}{2(2-ik\pi)}.$$

Отсюда $e^x = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-\frac{ik\pi}{2}x}}{2-ik\pi}$.

Перейдем к обычной тригонометрической форме ряда Фурье. Полагая $k = 0$, будем иметь $c_0 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{4}$.

Объединяя слагаемые с индексами k и $-k$ и пользуясь формулами Эйлера, получим

$$c_k e^{\frac{ik\pi}{2}x} + c_{-k}e^{-\frac{ik\pi}{2}x} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}\left(\frac{(-1)^k e^{\frac{ik\pi}{2}x}}{2-ik\pi} + \frac{(-1)^{-k} e^{-\frac{ik\pi}{2}x}}{2+ik\pi}\right) =$$

$$= \frac{e^2 - e^{-2}}{2}(-1)^k \frac{(2+ik\pi)e^{\frac{ik\pi}{2}x} + (2-ik\pi)e^{-\frac{ik\pi}{2}x}}{4+k^2\pi^2} =$$

$$= \left(e^2 - e^{-2}\right)(-1)^k \frac{2\cos k\frac{\pi}{2}x - k\pi\sin k\frac{\pi}{2}x}{4+k^2\pi^2}.$$

Таким образом

$$e^x = \frac{e^4 - 1}{2e^2}\left[\frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4+k^2\pi^2}\left(2\cos k\frac{\pi}{2}x - k\pi\sin k\frac{\pi}{2}x\right)\right].$$

15.3. Разложение только по косинусам или только по синусам

1°. Если функция $f(x)$ задана в интервале $[0, \pi]$, непрерывна и кусочно-дифференцируема в нем, то ее разложение в ряд Фурье по косинусам имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{1}$$

где

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{2}$$

Разложение по синусам будет

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{3}$$

где

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad (k=1,2,\ldots). \tag{4}$$

2°. Разложение в интервале $[0, l]$ по косинусам имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x, \tag{5}$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x dx, \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{6}$$

Разложение по синусам будет

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi}{l}x, \tag{7}$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x dx, \quad (k=1,2,\ldots). \tag{8}$$

3.1. Разложить в неполные ряды Фурье: а) по косинусам; б) по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

Решение. а) При $k = 0$ по формуле (2) имеем

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{3\pi^2}{8}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos kxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin kx\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin kxdx+\frac{\pi-x}{k}\sin kx\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2k}\sin k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\left(\cos k\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2k}\sin k\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k^2}\left(\cos k\pi-\cos k\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi k^2}\left(2\cos k\frac{\pi}{2}-\cos k\pi-1\right).$$

При $k = 1,3,5,\ldots$ коэффициент $a_k = 0$; при $k = 4, 8, 12, \ldots$ коэффициент $a_k = 0$; при $k = 2, 6, 10, \ldots$ $a_k = -4$, т. е. при четном k, которые при делении на два дают нечетное число, коэффициенты $a_k \neq 0$, а такие числа будут $2(2k - 1)$.

Таким образом, по формуле (1) разложение примет вид

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4\cos 2(2k-1)x}{2^2(2k-1)^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

б) Разложение по синусам находим по формуле (3), а коэффициенты по формуле (4)

$$b_k=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin kxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kxdx-\frac{\pi-x}{k}\cos kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\sin k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\sin k\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi k^2}\sin k\frac{\pi}{2}.$$

Если k четное, то $b_k=0$. Если k нечетное, то $b_k=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}$. Таким образом,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x.$$

3.2. Разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам функцию $f(x)=x$ при $0<x<l$.

Решение. а) По формуле (8) находим коэффициенты

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin k\frac{\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\left(-\frac{xl}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{l}x\Big|_0^l+\frac{l}{k\pi}\int_0^l\cos k\frac{\pi}{l}xdx\right)=$$

$$=-\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi=\frac{2l}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

Отсюда по формуле (7) получим

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\frac{\pi}{l}x.$$

б) Разложение функции в интервале [0, l] по косинусам находим по формулам (6), (5). Полагая $k = 0$, получим

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=l;$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos x\frac{k\pi}{l}dx=\frac{2}{l}\left(x\frac{l}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{l}x\Big|_0^l-\frac{l}{k\pi}\int_0^l\sin k\frac{\pi}{l}xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cos k\frac{\pi}{l}x\Big|_0^l=\frac{2l}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right).$$

Окончательно имеем

$$x=\frac{l}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos k\frac{\pi}{l}x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\frac{\pi}{l}x}{(2k-1)^2}.$$

15.4. Сдвиг основного интервала

1°. Значение коэффициентов Фурье и ряд Фурье не изменится, если интервал $[a, a+2\pi]$ заменить интервалом [0, 2π], т.к. для 2π–периодической функции $\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx=\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx.$

Если функция $f(x)$ задана в интервале [0, 2π], непрерывна и кусочно-дифференцируема, то ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad(1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx; \quad (k = 0,1,2,...),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx; \quad (k = 1,2,...). \qquad (2)$$

2°. Для функции $f(x)$ в интервале $[0, 2l]$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x\right), \qquad (3)$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}dx; \quad (k = 0,1,2,...),$$
$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}dx; \quad (k = 1,2,...). \qquad (4)$$

4.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ при $0 < x < 2\pi$.

Решение. Коэффициенты ряда Фурье находим по формулам (2). При $k = 0$ имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-x\cos kx}{k}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx dx\right) = -\frac{2}{k}.$$

Отсюда ряд Фурье (1) примет вид

$$x = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx.$$

4.2. Сила тока i, протекающего в электрической цепи, характеризуется амплитудой импульса H, длительностью действия импульса τ и частоты следования импульсов ω (рис. 15.6).

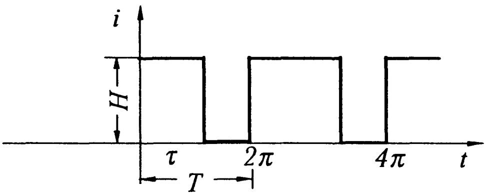

Рис. 15.6

Представить: а) 2π-периодическую функцию в виде ряда Фурье; б) T – периодическую функцию в виде ряда Фурье.

Решение. а) Запишем функцию в виде

$$f(t)=\begin{cases} H & (0\le t<\tau), \\ 0 & (\tau\le t<2\pi). \end{cases}$$

Поскольку функция 2π–периодична, то интегрируем ее по формулам (2) в промежутке $[0, 2\pi[$, с учетом того, что в интервале $[\tau, 2\pi[$ функция равна нулю

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} Hdt=\frac{H\tau}{\pi};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} H\cos ktdt=\frac{H}{k\pi}\sin kt\Big|_0^{\tau}=\frac{H}{k\pi}\sin k\tau; \qquad (k=1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} H\sin ktdt=-\frac{H}{k\pi}(\cos k\tau-1)=\frac{H}{k\pi}(1-\cos k\tau); \quad (k=1,2,...).$$

Коэффициенты Фурье зависят от амплитуды импульса H и от его длительности τ. Разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(t)=\frac{H\tau}{2\pi}+\frac{H}{\pi}\left(\sin\tau\cos t+(1-\cos\tau)\sin t+\frac{1}{2}\sin 2\tau\cos 2t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\cos 2\tau)\sin 2t+...\right)=$$

$$=\frac{H\tau}{2\pi}+\frac{H}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}(\sin k\tau\cos kt+(1-\cos k\tau)\sin kt)\right).$$

Определим теперь амплитуды и фазы простых гармоник

$$A_k = \frac{H}{k\pi}\sqrt{\sin^2 k\tau + (1-\cos k\tau)^2} = \frac{H}{k\pi}\sqrt{2-2\cos k\tau} = \frac{2H}{k\pi}\sin\frac{k\tau}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{\sin k\tau}{1-\cos k\tau} = \operatorname{ctg} k\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - k\frac{\tau}{2}\right),$$

отсюда $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2} - k\dfrac{\tau}{2}$.

Разложение функции в ряд Фурье примет вид

$$f(t) = \frac{2H}{\pi}\left(\frac{\tau}{4} + \sin\frac{\tau}{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\tau\sin\left(2t + \frac{\pi}{2} - \tau\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\sin\frac{3\tau}{2}\sin\left(3t + \frac{\pi}{2} - \frac{3\tau}{2}\right) + \ldots\right) = \frac{2H}{\pi}\left(\frac{\tau}{4} + \sin\frac{\tau}{2}\cos\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin\tau\cos(2t-\tau) + \frac{1}{3}\sin\frac{3\tau}{2}\cos\left(3t - \frac{3\tau}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{H\tau}{2\pi} + \frac{2H}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\tau}{2}\cos\left(kt - \frac{k\tau}{2}\right).$$

б) Принимаем период равным $T = 2l$ и находим коэффициенты Фурье по формулам (4)

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} H\,dt = 2H\frac{\tau}{T};$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} H\cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt = \frac{H}{k\pi}\sin\frac{2k\pi}{T}\tau; \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} H\sin\frac{2k\pi}{T}t\,dt = \frac{H}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{T}\tau\right); \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

тогда

$$A_k = \frac{2H}{k\pi}\sin\frac{k\pi\tau}{T}; \quad \varphi_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi\tau}{T}.$$

Полагая $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, запишем разложение функции в ряд Фурье

$$f(t)=H\left(\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{\tau}{T}\cos\left(\omega t-\pi\frac{\tau}{T}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sin 2\pi\frac{\tau}{T}\cos\left(2\omega t-2\pi\frac{\tau}{T}\right)+\ldots\right)=$$

$$=H\frac{\tau}{T}+\frac{2H}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin k\pi\frac{\tau}{T}\cos k\left(\omega t-\frac{\pi\tau}{T}\right).$$

15.5. Интеграл Фурье

1°. Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в интервале $(-\infty,\infty)$, кусочно-дифференцируема в любом конечном интервале и абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty,\infty)$, то она может быть представлена интегралом Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \quad (1)$$

Если функция $f(x)$ четная, то интеграл Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha. \quad (2)$$

Для нечетной функции $f(x)$ будем иметь

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha. \quad (3)$$

Интеграл Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha. \quad (4)$$

2°. Представим формулу (4) как суперпозицию двух формул

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt \quad (5)$$

и

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-ix\alpha}d\alpha \qquad (6)$$

Функция $F(\alpha)$ в формуле (5) называется *прямым преобразованием Фурье* для функции $f(x)$, а функция $f(x)$ в формуле (6) называется *обратным преобразованием Фурье* для функции $F(\alpha)$.

Формула (2) может быть представлена косинус-преобразованием Фурье для четной функции

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt,$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_C(\alpha)\cos\alpha x d\alpha. \qquad (7)$$

Формула (3) может быть представлена синус-преобразованием Фурье для нечетной функции

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt,$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_S(\alpha)\sin\alpha x d\alpha. \qquad (8)$$

В формулах (5), (7), (8) прямого преобразования Фурье переменную t можно заменить на переменную x.

5.1. Представить интегралами Фурье следующие функции:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x & при \quad |x|<\pi;\\ 0 & при \quad |x|\ge\pi,\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & при \quad x>0;\\ e^{ax} & при \quad x<0, \quad a>0.\end{cases}$

Решение. а) Функция $\sin x$ нечетная, поэтому воспользуемся формулой (3)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x d\alpha\int_0^{\pi}\sin t\sin\alpha t dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x d\alpha\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-\alpha)t-\cos(1+\alpha)t\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin(1-\alpha)t}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)t}{1+\alpha}\right]\Bigg|_0^\pi \sin\alpha x d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha}+\frac{\sin\alpha\pi}{1+\alpha}\right)\sin\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha\pi\sin\alpha x}{1-\alpha^2}d\alpha.$$

б) Функция $f(x)$ четная, поэтому воспользуемся формулой (2)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\alpha x d\alpha\int_0^\infty e^{-at}\cos\alpha t dt.$$

Внутренний интеграл вычисляем отдельно по формуле интегрирования по частям

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos\alpha t dt=\frac{a}{a^2+\alpha^2}.$$

Таким образом

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{a\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha.$$

5.2. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2} & \textit{при} \quad |x|\le\pi,\\ 0 & \textit{при} \quad |x|>\pi.\end{cases}$$

Решение. Поскольку функция четная, то воспользуемся формулой (7)

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}\cos\alpha t dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)t+\cos\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)t\right]dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{2}{1-2\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\alpha\right)+\frac{2}{1+2\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\alpha\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{1-4\alpha^2}\cos\pi\alpha.$$

Глава 16
КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Двойной интеграл и его вычисление

1°. Двойной интеграл является обобщением понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных $f(x, y)$ и представляет конечный предел двумерной интегральной суммы в области (S)

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j. \qquad (1)$$

где $\Delta x_i \Delta y_j = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ — площади элементарных областей, на которые разбивается плоская область S.

На двойной интеграл распространяются свойства простого определенного интеграла: постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций, область интегрирования можно разбивать на части.

2°. Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \tag{2}$$

или

$$\int_d^c dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{3}$$

Если внутренний интеграл берется по переменной y, то переменная x рассматривается как постоянная, а если по x, то постоянной будет y. Пределы интегрирования во внутреннем интеграле как правило являются переменными и зависят от переменной, которая рассматривается как постоянная, пределы же внешнего интеграла всегда постоянны. Пределы интегрирования внутреннего и внешнего интеграла постоянны только тогда, когда область интегрирования является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.

Область интегрирования интеграла (2) (рис. 16.1) $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ такова, что любая прямая, параллельная оси y, пересекает ее границу только два раза. Вычисление двойного интеграла по области $d \le y \le c$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ (рис. 16.2) целесообразно выполнять по формуле (3), поскольку любая прямая, параллельная оси x, пересекает границу области только два раза.

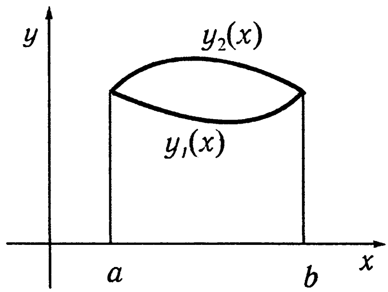

Рис. 16.1

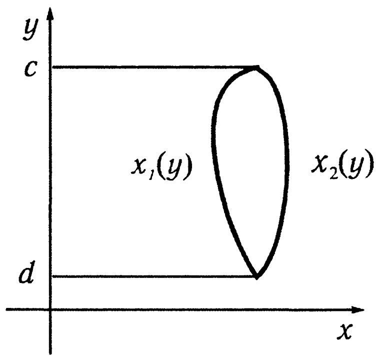

Рис. 16.2

3°. Если верхняя или нижняя граница области описывается несколькими функциями (рис. 16.3), то область интегрирования следует разбить прямой $x = c$ на две области S_1 и S_2. Двойной интеграл по области S в этом случае разбивается на сумму интегралов

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_a^c dx \int\limits_{y_1(x)}^{y(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{y_2(x)}^{y(x)} f(x,y)dy. \tag{4}$$

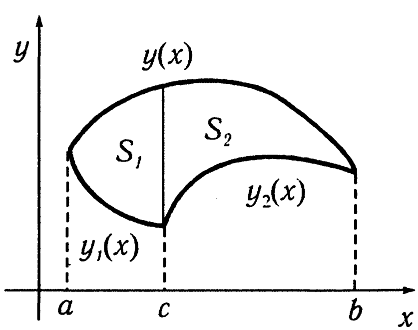

Рис. 16.3

Если левая или правая граница области описывается несколькими функциями (рис. 16.4), то область интегрирования S разбивается на две области S_1 и S_2, а двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{d}^{b} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x(y)} f(x,y)dx + \int\limits_{b}^{c} dy \int\limits_{x_2(y)}^{x(y)} f(x,y)dx. \qquad (5)$$

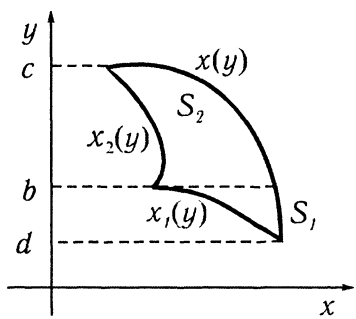

Рис. 16.4

В случае более сложного контура область S разбивается на конечное число частей рассмотренных типов.

1.1. Вычислить двойные интегралы: а) $\int\limits_0^1\int\limits_1^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2}$;

б) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^x (x^2-2y+1)dy$; в) $\int\limits_1^e\int\limits_1^y \frac{ydxdy}{x}$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho$.

Решение. а) Поскольку пределы интегрирования постоянные величины, то первое интегрирование может быть по любой переменной. Запишем интеграл в виде

$$\int_0^1 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

Вычислим внутренний интеграл по y, считая, что x постоянная величина

$$-\int_0^1 \frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 dx = -\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx.$$

Далее вычисляем внешний интеграл по x

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x+1|-\ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln\frac{x+1}{x+2}\bigg|_0^1 = \ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}.$$

б) Поскольку пределы внутреннего интеграла зависят от x, то вычисляем сначала внутренний интеграл по y, считая x постоянной величиной

$$\int_1^2\left(\left(x^2y-y^2+y\right)\Big|_0^x\right)dx = \int_1^2\left(x^3-x^2+x\right)dx.$$

Далее находим внешний интеграл

$$\int_1^2\left(x^3-x^2+x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 = \frac{35}{12}.$$

в) Поскольку пределы внутреннего интеграла зависят от y, то интегрируем сначала по x, считая y постоянной величиной, а затем интегрируем по y

$$\int_1^e\int_1^y \frac{y}{x}dxdy = \int_1^e dy\int_1^y \frac{y}{x}dx = \int_1^e y\ln x\Big|_1^y dy =$$

$$= \int_1^e y\ln y dy = \frac{y^2}{2}\ln y\bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e ydy = \frac{e^2+1}{4}.$$

г) Вычислим сначала внутренний интеграл

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right) d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi.$$

1.2. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D x\cos(x+y)dxdy,$ где $D=\left\{0\le x\le \pi, \quad 0\le y\le \frac{\pi}{2}\right\};$

б) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ где $D=\left\{y=0, \quad y=x^2, \quad x=2\right\};$

в) $\iint\limits_D xydxdy,$ где $D=\left\{y=-x, \quad y=x^2, \quad y=1\right\};$

г) $\iint\limits_D xdxdy,$ где область D ограничена осью Ox и одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t).$

Решение. а) Расставим пределы интегрирования и проинтегрируем сначала по y, а затем по x

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\pi} xdx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy = \int\limits_0^{\pi} x\sin(x+y)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} x\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \sin x\right)dx = \int\limits_0^{\pi} x(\cos x - \sin x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} x\cos xdx - \int\limits_0^{\pi} x\sin xdx = x\sin x - \int\limits_0^{\pi} \sin xdx + x\cos x - \int\limits_0^{\pi} \cos xdx =$$

$$= (x\sin x + \cos x + x\cos x - \sin x)\Big|_0^{\pi} = -1-\pi-1 = -(2+\pi).$$

б) Представим область интегрирования на рис 16.5. Расставим пределы интегрирования и проинтегрируем

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x+y)\,dy = \int\limits_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 = 4 + \frac{16}{5} = \frac{36}{5}.$$

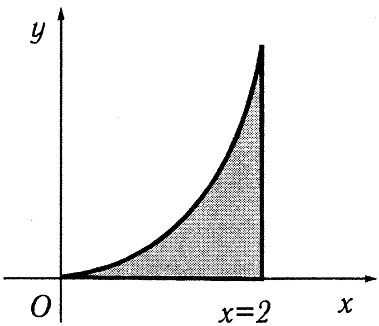

Рис. 16.5

в) Сделаем чертеж (рис. 16.6).

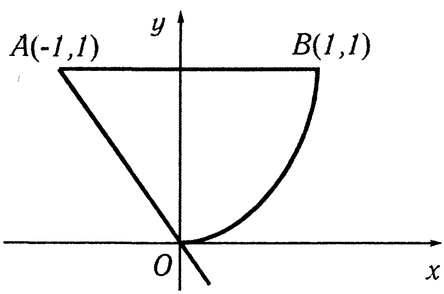

Рис. 16.6

Из совместного решения уравнений $y = -x$ и $y = x^2$ находим точки пересечения прямой и параболы A (–1, 1), O (0, 0). Координаты точки B (1,1). Расставим пределы интегрирования и проинтегрируем

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 ydy \int\limits_{-y}^{\sqrt{y}} xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 yx^2\Big|_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y^2 - y^3\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

г) Для одной арки циклоиды параметр t изменяется от 0 до 2π, а переменная x от 0 до $2\pi a$. Представляя функцию y в виде функции от x $y = f(x)$, запишем искомый интеграл, разделяя переменные

$$I = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^{2\pi a} xdx \int\limits_0^{y=f(x)} dy.$$

Находя дифференциалы $dx = a(1-\cos t)dt$, $dy = a\sin tdt$ и переходя во внешнем интеграле к переменной t, получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} a(t-\sin t)a(1-\cos t)dt \int\limits_0^{a(1-\cos t)} dy = a^3\int\limits_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + \sin 2t - \sin t\cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^3\left(\frac{t^2}{2} - 2t\sin t - 2\cos t + \frac{t}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{1}{4}\left(t^2 - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \right.$$

$$\left. + \cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi^2 a^3.$$

1.3. Изменить порядок интегрирования в двойных интегралах: а) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$; г) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

Решение. а) По пределам интегрирования строим область интегрирования: $y = x + 2$, $y = x^2$, $x = 2$, $x = -1$ (рис. 16.7). Решая совместно уравнения $y = x + 2$, $y = x^2$, находим координаты точек пересечения прямой и параболы $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$.

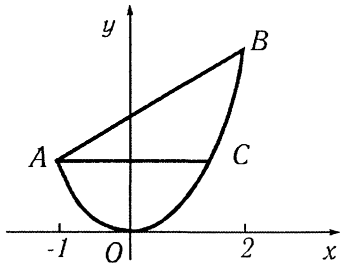

Рис. 16.7

Поскольку слева область D ограничена линиями $x = y - 2$ и $x = -\sqrt{y}$, а справа $x = \sqrt{y}$, то при изменении порядка интегрирования интеграл разбивается на два интеграла, соответственно, по областям D_{ACOA} и D_{ABC}

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y)\,dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int_{1}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

б) Область интегрирования D ограничена линиями

$x = 2 - y$, $x = \dfrac{y^2}{4} - 1$, $y = 2$, $y = -6$ (рис. 16.8).

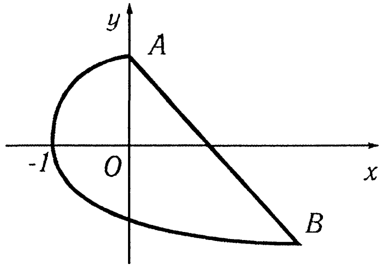

Рис. 16.8

Решая совместно уравнения $x = 2 - y$ и $x = \frac{y^2}{4} - 1$, находим координаты точек пересечения прямой и параболы A (0, 2) и B (8, – 6). Сверху область D ограничена линиями: $y = 2\sqrt{x+1}$ при $-1 \le x \le 0$ и $y = 2 - x$ при $0 \le x \le 8$, а снизу — параболой $y = -2\sqrt{x+1}$. Следовательно, при изменении порядка интегрирования интеграл разбивается на два

$$\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int_{0}^{8} dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x,y)dy.$$

в) Область интегрирования ограничена линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$ (рис. 16.9). Решая эти уравнения совместно, находим координаты точек пересечения прямых A (1, 1); B (2, 2); C (2, 4) и D (1, 2).

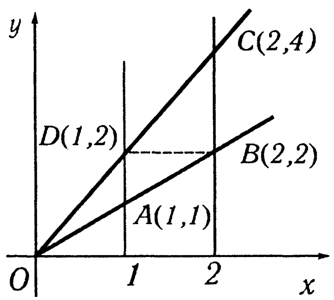

Рис. 16.9

Уравнения прямых, ограничивающих область слева, имеют вид: $x = 1$ и $x = \frac{y}{2}$, а справа — $x = 2$, $x = y$.

При изменении порядка интегрирования область интегрирования S разбивается на две S_{ABD} и S_{DBC}. Таким образом

$$\int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2x} f(x,y)dy = \int_{1}^{2} dy \int_{1}^{y} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

г) Область интегрирования первого интеграла ограничена линиями $x=0$, $x=y$, $y=0$, $y=1$ и представляет треугольник AOB (рис. 16.10). Область интегрирования второго интеграла ограничена линиями $x=0$, $x=2-y$, $y=1$, $y=2$ и представляет треугольник ABC.

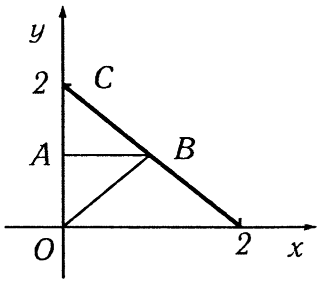

Рис. 16.10

Поскольку область сверху ограничена прямой $y = 2 - x$, а снизу $y = x$ при $0 \le x \le 1$, то при изменении порядка интегрирования будем иметь

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy.$$

1.4. Расставить в двойном интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ пределы интегрирования в том и другом порядке, если область интегрирования S — трапеция с вершинами O (0, 0); A (2, 0); B (1, 1); C (0, 1).

Решение. Представим область интегрирования на рис. 16.11. Запишем уравнение прямой AB. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{y-1}{-1} = \frac{x-1}{2-1}$, $y = 2 - x$. Поскольку область сверху ограничена двумя прямыми, то при интегрировании во внутреннем интеграле по y получим два интеграла

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

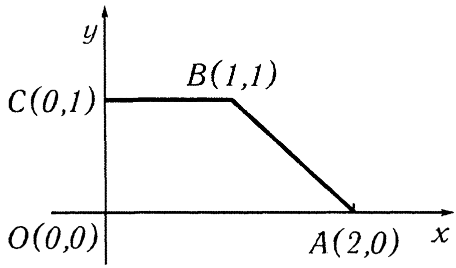

Рис. 16.11

При интегрировании во внутреннем интеграле по x будем иметь

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

16.2. Двойной интеграл в полярных координатах. Замена переменных в двойном интеграле

1°. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат к полярным необходимо в подынтегральном выражении прямоугольные координаты заменить полярными по формулам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а дифференциал $dS = dxdy$ заменить на $\rho d\rho d\varphi$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(s)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi.$$

Причем уравнения линий, ограничивающих область интегрирования S, следует преобразовать к полярным координатам по формулам перехода.

Если область интегрирования S ограничена лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$ (рис. 16.12), где $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ — однозначные функции на отрезке $\varphi\in[\alpha,\beta]$ и $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$, то имеет место соотношение

$$\iint\limits_S F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}F(\rho,\varphi)\rho d\rho, \qquad (1)$$

где $F(\rho,\varphi)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$.

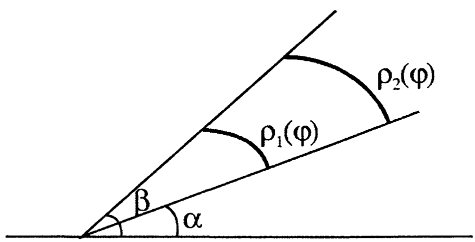

Рис. 16.12

Внутренний интеграл вычисляется по ρ, считая φ постоянной, но произвольной переменной, а внешний интеграл находится по φ. Пределы внешнего интеграла всегда постоянны, а внутреннего, как правило, зависят от φ. Если область интегрирования представляет круговой сектор или разность круговых секторов с центром в начале координат, то пределы интегрирования внутреннего интеграла постоянны.

Если область интегрирования ограничена линиями, имеющими различное аналитическое представление, то ее разбивают на части, а двойной интеграл представляют в виде суммы соответствующих интегралов.

2°. Пусть в двойном интеграле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$ требуется от переменных x, y перейти к переменным u, v, связанным соотношениями

$$x = x(u,v); \quad y = y(u,v). \tag{2}$$

Функции (2) осуществляют взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение области G плоскости O_1uv на область S плоскости Oxy. Если якобиан этого отображения

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

не обращается в нуль на G и функция $f(x, y)$ непрерывна в области S, то справедлива формула

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|I|\,dudv. \tag{3}$$

Производить замену переменных по формулам (2) целесообразно в том случае, если область интегрирования G интеграла (3) значительно проще области S.

2.1. Переходя к полярным координатам,

$$\text{а)} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy; \quad \text{б)} \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Решение. а) Область интегрирования представляет первую четверть круга. Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$, получим

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

б) Область интегрирования расположена в первой четверти и ограничена двумя окружностями: $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=ay$.(рис. 16.13)

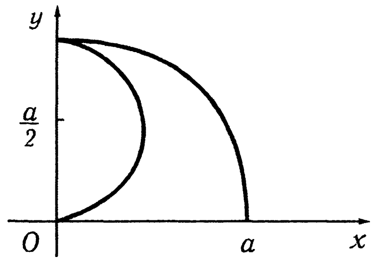

Рис. 16.13

Переходя к полярным координатам и учитывая, что уравнение внутренней окружности будет $\rho=a\sin\varphi$, получим

$$\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} \left(a^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(a^2-\rho^2\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{a\sin\varphi}^{a} d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

2.2. Вычислить двойной интеграл: а) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, где область S ограничена двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$; б) $\iint\limits_S x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где область S ограничена лепестком лемнискаты $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ $(x\ge 0)$;

в) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область ограничена линиями $y=0$, $x=2$, $y=x$, $x^2+y^2=1$.

Решение. а) Область интегрирования ограничена двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами $r_1 = 3$ и $r_2 = 5$. Переходя в интеграле к полярной системе координат будем иметь

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(\rho^2-9\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^5 d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{128}{3}\pi.$$

б) Переходя к полярным координатам, запишем уравнение лемнискаты в виде $\rho^2 = a^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$ или $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. При $x \ge 0$, т. е. для правого лепестка φ изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, интеграл примет вид

$$\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \cos\varphi\rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\rho^4\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\left(1-2\sin^2\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\varphi - 4\cos\varphi\sin^2\varphi + 4\cos\varphi\sin^4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\left(\sin\varphi - 4\frac{\sin^3\varphi}{3} + 4\frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}a^4.$$

в) Построим область интегрирования (рис. 16.14) и перейдем к полярным координатам.

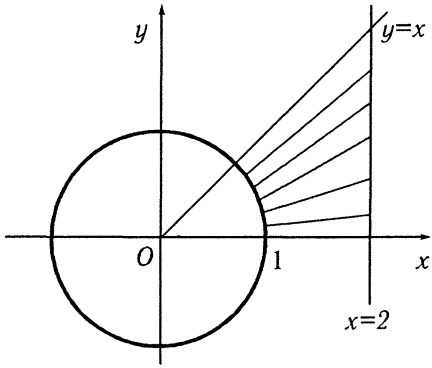

Рис. 16.14

Из рисунка видно, что полярный угол изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Полярный радиус меняется от 1 до прямой $x = 2$. Запишем уравнение этой прямой в полярной системе координат $\rho\cos\varphi = 2$ или $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$. Подынтегральная функция будет $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$.

Отсюда получим, что

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^{\frac{2}{\cos\varphi}} \frac{1}{\rho}\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^{\frac{2}{\cos\varphi}} d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \rho \Bigg|_1^{\frac{2}{\cos\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos\varphi} - 1\right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos\varphi d\varphi}{1-\sin^2\varphi} - \varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\pi}{4}.$$

2.3. В интеграле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$, где область S ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$,

перейти к новым переменным u, v и **расставить** пределы интегрирования.

Решение. Переходим к новым переменным: $x^2 = uy$, $y^2 = vx$. Тогда $x = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$. Найдем производные

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}.$$

Якобиан будет равен

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Уравнения линий принимают вид: $u = a$, $u = b$, $v = p$, $v = q$. Область S плоскости Oxy преобразуется в прямоугольник G плоскости $O'uv$ и по формуле (3) интеграл примет вид

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,dudv =$$
$$= \frac{1}{3}\int_a^b du \int_p^q f\left(\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2}\right)dv.$$

2.4. Вычислить двойные интегралы: а) $\iint\limits_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, где область S ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\iint\limits_S xy\,dxdy$, где область S ограничена линиями $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

Решение. а) Переходим к обобщенным полярным координатам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$.

Якобиан будет

$$I(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\rho.$$

Пределы интегрирования: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$. Таким образом, интеграл в обобщенных полярных координатах примет вид

$$\iint\limits_S\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=$$

$$=-\frac{ab}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\varphi=\frac{ab}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}\pi ab.$$

б) Переходим к новым переменным $y=ux^3$, $y^2=vx$, тогда $x=u^{-\frac{2}{5}}v^{\frac{1}{5}}$, $y=u^{-\frac{1}{5}}v^{\frac{3}{5}}$.

Вычисляем якобиан преобразования

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} -\frac{2}{5}u^{-\frac{7}{5}}v^{\frac{1}{5}} & \frac{1}{5}u^{-\frac{2}{5}}v^{-\frac{4}{5}} \\ -\frac{1}{5}u^{-\frac{6}{5}}v^{\frac{3}{5}} & \frac{3}{5}u^{-\frac{1}{5}}v^{-\frac{2}{5}} \end{vmatrix}=-\frac{6}{25}u^{-\frac{8}{5}}v^{-\frac{1}{5}}+\frac{1}{25}u^{-\frac{8}{5}}v^{-\frac{1}{5}}=-\frac{1}{5\sqrt[5]{u^8v}}.$$

Уравнения линий принимают вид:

$$u=a,\quad u=b,\quad v=p,\quad v=q.$$

Область S плоскости Oxy преобразуется в прямоугольник G плоскости $O'uv$. Тогда по формуле (3) будем иметь

$$\iint\limits_S xydxdy=-\frac{1}{5}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q u^{-\frac{2}{5}}v^{\frac{1}{5}}u^{-\frac{1}{5}}v^{\frac{3}{5}}u^{-\frac{8}{5}}v^{-\frac{1}{5}}dv=-\frac{1}{5}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q u^{-\frac{11}{5}}v^{\frac{3}{5}}dv=$$

$$=-\frac{1}{9}\int\limits_a^b u^{-\frac{11}{5}}v^{\frac{8}{5}}\Big|_p^q du=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8}\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)u^{-\frac{6}{5}}\Big|_a^b=\frac{5}{48}\left(b^{-\frac{6}{5}}-a^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right).$$

16.3. Вычисление площадей плоских фигур и площади поверхности

1°. Площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах, ограниченная областью D, находится по формуле

$$S=\iint_D dxdy. \qquad (1)$$

Если область D определена неравенствами $a\le x\le b$, $\varphi(x)\le y\le\psi(x)$, то

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy. \qquad (2)$$

2°. Площадь плоской фигуры в криволинейных координатах находится по формуле

$$S=\iint_G |I|dudv, \qquad (3)$$

где

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0 \quad \text{в области } G.$$

В частности, если область G задана в полярных координатах и определена неравенствами $\alpha\le\varphi\le\beta$, $f(\varphi)\le\rho\le\psi(\varphi)$, то

$$S=\iint_G \rho d\varphi d\rho=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{f(\varphi)}^{\psi(\varphi)}\rho d\rho. \qquad (4)$$

3°. Если гладкая поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, то площадь поверхности находится по формуле

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy, \qquad (5)$$

где D — проекция данной поверхности на плоскость Oxy.

Аналогично, если поверхность задана уравнением $x = x(y, z)$, то

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz, \qquad (6)$$

где D — проекция поверхности на плоскость Oyz; если поверхность $y = y(x, z)$, то

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz, \qquad (7)$$

здесь D — проекция поверхности на плоскость Oxz.

3.1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: а) $y=\sqrt{x}$, $y=4\sqrt{x}$ и $x=1$; б) $y=\ln x$, $x-y=1$, $x=0$ и $y=-2$.

Решение. а) Построим параболы и прямую (рис. 16.15.).

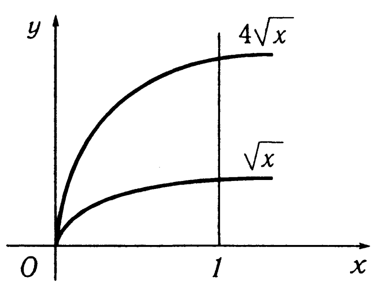

Рис. 16.15

Согласно формуле (2) имеем

$$S=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{4\sqrt{x}}dy=3\int\limits_0^1\sqrt{x}dx=2x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=2.$$

б) Построим область, ограниченную линиями (рис.16.16.).

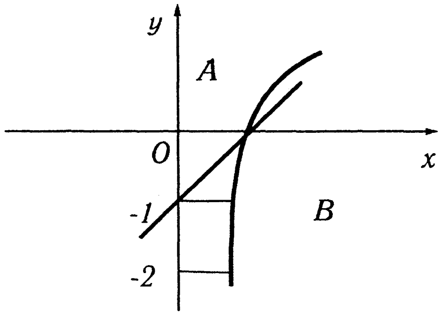

Рис. 16.16

Поскольку область ограничена линиями, имеющими различный аналитический вид, то при вычислении площади ее следует разбить на две части прямой $y = -1$. Вся площадь равна сумме интегралов

$$S=\int_{-1}^{0}dy\int_{1+y}^{e^y}dx+\int_{-2}^{-1}dy\int_{0}^{e^y}dx=\int_{-1}^{0}\left(e^y-(1+y)\right)dy+\int_{-2}^{-1}e^y dy=$$

$$=\left(e^y-y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+e^y\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^2}.$$

3.2. Вычислить площадь, ограниченную линиями:
а) $\rho=a(1-\cos\varphi)$, $\rho=a$ и расположенную вне круга;
б) $\left(x^2+y^2\right)^3=x^4+y^4$; в) $x^2+y^2=4$, $xy=\sqrt{3}$ $(x>0,\ y>0)$ в полярной системе координат; г) $x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right)$.

Решение. а) Представим кардиоиду и круг на рис. 16.17.

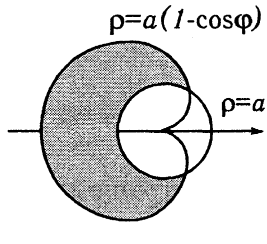

Рис. 16.17

В силу симметрии относительно полярной оси достаточно найти половину искомой площади. Для этого воспользуемся формулой (4)

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\pi}d\varphi\int_a^{a(1-\cos\varphi)}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(a^2(1-\cos\varphi)^2-a^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(-2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{a^2}{4}\pi.$$

Таким образом $S=\dfrac{1}{2}\pi a^2.$

б) Так как переменные x и y в четных степенях, то фигура симметрична относительно координатных осей. Запишем уравнение линии в полярной системе координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$: $\rho^6=\rho^4\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)$ или $\rho^2=\cos^4\varphi+\sin^4\varphi$. Для нахождения площади воспользуемся формулой (4)

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left((1+\cos 2\varphi)^2+(1-\cos 2\varphi)^2\right)d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi\right)=\frac{1}{4}\left(2\pi+\frac{1}{2}2\pi\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

в) Представим площадь, ограниченную заданными кривыми, на рис. 16.18. Из совместного решения уравнений кривых находим координаты точек A и B:

$$x^2+y^2=4,\quad xy=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{3}{x^2}=4\quad\Rightarrow\quad x^4-4x^2+3=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{3},\quad x_{3,4}=\pm 1\quad\Rightarrow\quad A\left(1,\sqrt{3}\right),\quad B\left(\sqrt{3},1\right).$$

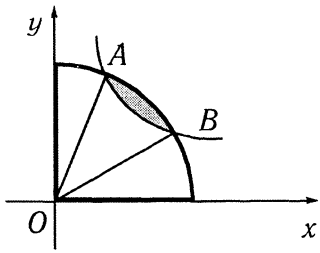

рис. 16.18

Зная координаты точек A и B, из выражений $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ находим, что полярный угол меняется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$. Полярный радиус меняется от кривой $xy = \sqrt{3}$ до окружности, т. е. от $\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi = \sqrt{3}$ или от $\rho = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$ до 2.

Отсюда по формуле (4) будем иметь

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}}^{2} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 \Bigg|_{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}}^{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(4 - \frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)d\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln|\operatorname{tg}\varphi|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3.$$

г) Поскольку левая часть уравнения кривой $x^4 = a^2\left(x^2 - 3y^2\right)$ всегда положительна, то $x^2 \geq 3y^2$. Воспользуемся полярными координатами $\rho^2\cos^2\varphi \geq 3\rho^2\sin^2\varphi$ или

$\mathrm{tg}^2\varphi \le \frac{1}{3}$. Откуда $\mathrm{tg}\varphi \le \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ (рис. 16.19).

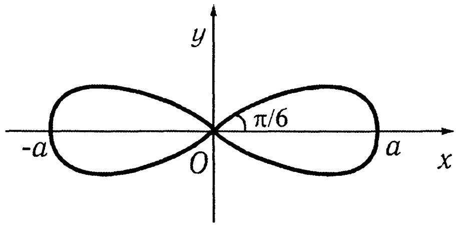

Рис. 16.19

В силу симметрии лемнискаты относительно координатных осей достаточно найти площадь одной четвертой части при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$. Уравнение кривой в полярной системе будет $\rho^2 = \frac{a^2\left(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\right)}{\cos^4\varphi}$. Таким образом, площадь будет

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{\frac{a\left(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos^2\varphi}} \rho d\rho = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\varphi\right) d\,\mathrm{tg}\varphi = 2a^2\left(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,a^2.$$

3.3. Вычислить площади, ограниченные линиями:

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; б) $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$, $x > 0$, $y > 0$, $a > b$, $\alpha > \beta$.

Решение. а) При вычислении площади, ограниченной астроидой, переходим к обобщенным полярным координатам $x = \rho\cos^3\varphi$, $y = \rho\sin^3\varphi$ и вычисляем якобиан

$$I=\begin{vmatrix}\cos^3\varphi & -3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi\\ \sin^3\varphi & 3\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=3\rho\left(\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^4\varphi\right)=3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Площадь, расположенная в первом квадранте, согласно формуле (3) будет равна

$$\frac{1}{4}S=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho=\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=\frac{3}{8}a^2\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом $S=\frac{3}{8}\pi a^2$.

б) Введем новые переменные u, v по формулам $xy=u^2$, $x=vy$. Откуда $x=uv^{\frac{1}{2}}$, $y=uv^{-\frac{1}{2}}$. Вычислим якобиан

$$I=\begin{vmatrix}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}uv^{-\frac{1}{2}}\\ v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}uv^{-\frac{3}{2}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\left(uv^{-1}+uv^{-1}\right)=-uv^{-1}.$$

Пределы изменения новых переменных: $b\le u\le a$ и $\beta\le v\le\alpha$. Согласно формуле (3) площадь будет равна

$$S=\int_b^a du\int_\beta^\alpha uv^{-1}dv=\frac{u^2}{2}\bigg|_b^a\ln v\bigg|_\beta^\alpha=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

3.4. Найти площадь поверхности: а) конуса $x^2=y^2+z^2$, расположенного внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$; б) сферы $x^2+y^2+z^2=2a^2$, расположенной внутри конуса $y^2=x^2+z^2$;

в) сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезанной поверхностью $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Решение. а) Из уравнения конуса имеем

$$z=\sqrt{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Часть конуса, расположенная в первом октанте, проектируется на четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=a^2$ и осями координат Ox, Oy. Эта четверть круга является четвертой частью области интегрирования D. Поскольку поверхность конуса расположена в восьми октантах, то искомая площадь равна

$$S=8\sqrt{2}\iint\limits_D\frac{xdxdy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тогда

$$S=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\frac{\rho^2\cos\varphi d\rho}{\rho\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}}=4\sqrt{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\left|\begin{array}{lll}2\sin^2\varphi=t^2, & x=0, & t=0\\ 4\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=2tdt, & x=\dfrac{\pi}{4}, & t=1\end{array}\right|=4a^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=4a^2\arcsin t\Big|_0^1=2a^2\pi.$$

б) Поскольку конус расположен вдоль оси Oy, то площадь заданной поверхности $y=\sqrt{2a^2-x^2-z^2}$ будем находить по формуле (7), где D — проекция поверхности на плоскость Oxz. Приравнивая y в уравнениях сферы и конуса, находим проекцию поверхности на плоскость Oxz $x^2+z^2=a^2$. Частные производные равны $\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{2a^2-x^2-z^2}}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{z}{\sqrt{2a^2-x^2-z^2}}$. Так как конус в сфере вырезает две равные поверхности, то

$$S=2\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{2a^2-x^2-z^2}+\frac{z^2}{2a^2-x^2-z^2}}dxdz=$$

$$=2a\sqrt{2}\iint\limits_D\frac{dxdz}{\sqrt{2a^2-x^2-z^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$S=2a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{2a^2-\rho^2}}=-2a\sqrt{2}\cdot 2\pi\frac{1}{2}\int\limits_0^a\left(2a^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(2a^2-\rho^2\right)=$$

$$=-4\sqrt{2}a\pi\left(2a^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a=4a^2\pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

в) Запишем уравнение поверхности в виде $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ и найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Так как направляющей цилиндра является лемниската, то в сечении со сферой имеем четыре равных лепестка и площадь поверхности будет равна

$$S=4\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy=4a\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, уравнение лемнискаты примет вид $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$, а площадь поверхности вычисляется интегралом

$$S=8a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-8a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=-8a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(a^2-a^2\cos 2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}-a\right)d\varphi=-8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}\sin\varphi-1\right)d\varphi=$$

$$=8a^2\left(\sqrt{2}\cos\varphi+\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=8a^2\left(1-\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

16.4. Вычисление объемов тел

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f\left(x,y\right)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область S (рис. 16.20), равен

$$V=\iint_S f\left(x,y\right)dxdy. \qquad (1)$$

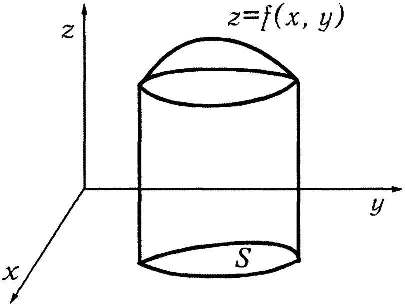

Рис. 16.20

В ряде случаев вычисление объемов цилиндрических тел более сложной формы целесообразнее представлять в виде суммы (разности) объемов нескольких тел.

4.1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z^2 = xy, \quad x = a, \quad x = 0, \quad y = a, \quad y = 0$;

б) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}; \quad x + z = 3, \quad z = 0$;

в) $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = ax, \quad z = bx \quad (a > b)$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = Rx$ (внутри цилиндра).

Решение. а) Тело, объем которого требуется найти, ограничено сверху поверхностью $z = \sqrt{xy}$, с боков плоскостями $x = a$, $y = a$. Половина тела показана на рис. 16.21.

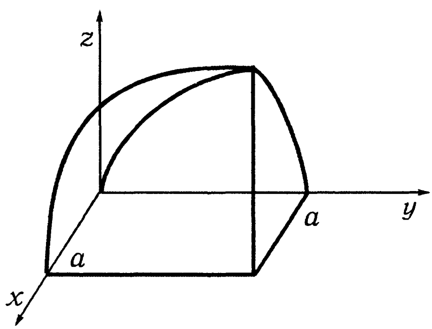

Рис. 16.21

Рассматривая это тело как цилиндрическое, его объем по формуле (1) будет

$$V = 2\iint\limits_S \sqrt{xy}dxdy = 2\int_0^a \sqrt{x}dx\int_0^a \sqrt{y}dy = \frac{4}{3}\int_0^a \sqrt{x}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a dx =$$

$$= \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}\int_0^a \sqrt{x}dx = \frac{8}{9}a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{8}{9}a^3.$$

б) Данное тело с боков ограничено цилиндрами $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$, сверху плоскостью $x + z = 3$, снизу плоскостью $z = 0$ (рис. 16. 22). Поскольку тело цилиндрическое, то для нахождения его объема воспользуемся формулой (1)

$$V = \iint_D (3-x)\,dxdy = \int_0^3 (3-x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^3 \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = 6\sqrt{3} - \frac{18}{5}\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{5}.$$

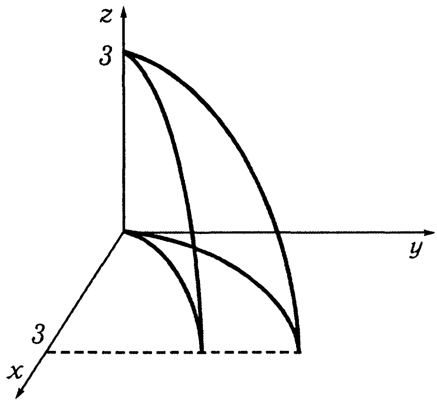

Рис. 16.22

в) Сверху и снизу тело ограничено плоскостями $z = ax$ и $z = bx$. Боковая поверхность — цилиндр единичного радиуса (рис. 16.23.).

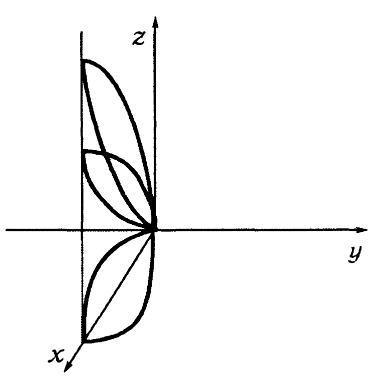

Рис. 16.23

Проекция тела на плоскость Oxy представляет круг. Чтобы воспользоваться формулой (1), представим объем тела разностью объемов двух цилиндрических тел, ограниченных снизу плоскостью $z=0$, а сверху плоскостями $z=ax$ и $z=bx$, соответственно. Таким образом, будем иметь

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_S axdxdy-\iint\limits_S bxdxdy=(a-b)\iint\limits_S xdxdy.$$

Поскольку область интегрирования S круг, то при вычислении двойного интеграла целесообразнее перейти к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Уравнение окружности будет $\rho=2\cos\varphi$. Объем равен

$$V=2(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cos\varphi d\varphi d\rho=2(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{4}{3}(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}(a-b)\left(\frac{\pi}{2}+\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos4\varphi)d\varphi\right)=\frac{4}{3}(a-b)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=(a-b)\pi.$$

г) По условию задачи требуется найти объем тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из шара $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 16.24).

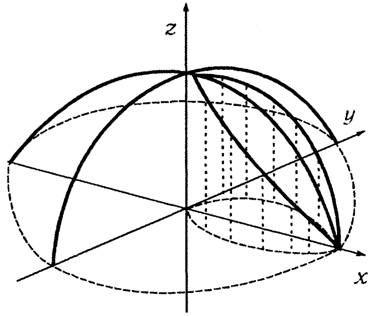

Рис. 16.24

Рассмотрим четвертую часть тела

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Поскольку область интегрирования S полукруг, то целесообразно перейти к полярным координатам. Полярное уравнение полуокружности при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ будет $\rho = R\cos\varphi$. Таким образом

$$\frac{1}{4}V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\right) = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

4.2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2;$

б) $z^2-x^2=a^2,\quad z^2-y^2=a^2,\quad z=a\sqrt{2};$

в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

г) $z=x+y,\ xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=2x,\ z=0\ \left(x>0, y>0\right).$

Решение. а) Тело ограничено двумя пересекающимися цилиндрическими поверхностями. Для нахождения его объема рассмотрим восьмую часть (рис. 16.25). Тогда объем равен

$$V = 8\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2}\,dxdy = 8\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy =$$

$$= 8\int\limits_0^R \left(R^2-x^2\right)dx = 8\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R = \frac{16}{3}R^3.$$

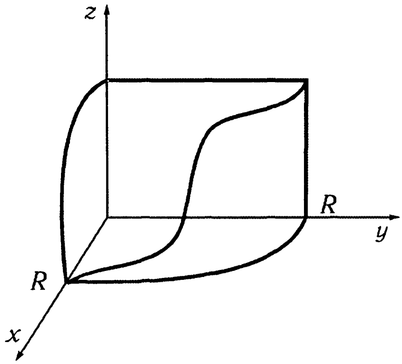

Рис. 16.25

б) Тело ограничено двумя пересекающимися гиперболическими цилиндрами и плоскостью $z = a\sqrt{2}$ (рис. 16. 26). Для нахождения объема рассмотрим четвертую часть. Проектируя на плоскость Oyz, будем иметь

$$V = 4\int\limits_a^{a\sqrt{2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{z^2-a^2}} \sqrt{z^2-a^2}\,dy = 4\int\limits_a^{a\sqrt{2}} \left(z^2-a^2\right)dz = 4\left(\frac{z^3}{3}-a^2z\right)\Bigg|_a^{a\sqrt{2}} =$$

$$= 4a^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3\left(2-\sqrt{2}\right).$$

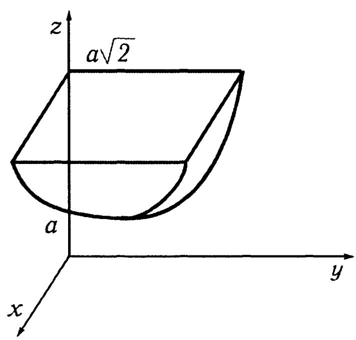

Рис. 16.26

в) Тело представляет трехосный эллипсоид. Найдем объем его восьмой части. Для этого перейдем к обобщенным полярным координатам, положив $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, тогда якобиан преобразования будет $I = ab\rho$. Объем равен

$$V = 8\iint_S c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = 8abc\iint_S \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho = \frac{8}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

г) Перейдем к новым переменным, положив $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, тогда $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$. Вычислим якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} \\ -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Объем тела в новых переменных будет равен

$$V = \iint_S (x+y)dxdy = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 \sqrt{u}\left(v^{-\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{v}dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\int_1^2\left(v^{-\frac{3}{2}}+v^{-\frac{1}{2}}\right)dv = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(-2v^{-\frac{1}{2}}+2v^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

16.5. Приложения двойного интеграла к механике

1°. Масса пластинки, занимающей область S плоскости Oxy, определяется по формуле

$$m = \iint_S \delta(x,y)dxdy, \qquad (1)$$

где $\delta(x,y)$ — поверхностная плотность пластинки в точке (x,y).

2°. Статические моменты пластинки относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$m_x = \iint_S \delta(x,y)\,y\,dxdy,$$
$$m_y = \iint_S \delta(x,y)\,x\,dxdy. \qquad (2)$$

Координаты центра тяжести пластинки

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \quad y_c = \frac{m_x}{m}, \qquad (3)$$

где m — масса пластинки.

3°. Моменты инерции пластинки относительно координатных осей и начала координат определяются по формулам

$$I_x = \iint_S \delta(x,y)\,y^2dxdy,$$
$$I_y = \iint_S \delta(x,y)\,x^2dxdy, \qquad (4)$$
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_S \delta(x,y)\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Момент инерции I_0, равный произведению массы на квадрат расстояния до полюса, принято называть полярным моментом инерции.

Если пластинка однородна, то в приведенных формулах следует положить $\delta(x,y)=1$.

4°. Для однородного цилиндрического тела с образующей, параллельной оси Oz, ограниченного поверхностью $z = z(x, y)$, которая проектируется на плоскость Oxy в область S, статические моменты относительно координатных плоскостей определяются по формулам

$$m_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_S z^2dxdy,\quad m_{xz}=\iint\limits_S yz\,dxdy,\quad m_{yz}=\iint\limits_S xz\,dxdy. \tag{5}$$

Отсюда координаты центра тяжести будут

$$x_c=\frac{m_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{m_{xz}}{m},\quad z_c=\frac{m_{xy}}{m}, \tag{6}$$

где $m=\iint\limits_S z\,dxdy$ — масса цилиндрического тела.

5°. Моменты инерции однородного цилиндрического тела относительно координатных плоскостей находятся по формулам

$$I_{xz}=\iint\limits_S y^2z\,dxdy,\quad I_{yz}=\iint\limits_S x^2z\,dxdy. \tag{7}$$

Момент инерции относительно оси Oz равен

$$I_z=I_{xz}+I_{yz}=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)z\,dxdy. \tag{8}$$

5.1. Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OA=a$ и $OB=b$, если плотность ее в любой точке пропорциональна расстоянию точки от катета OB.

Решение. Запишем уравнение прямой AB, воспользовавшись уравнением прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad\text{или}\quad y=b\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Пользуясь формулой (1), находим, что масса пластинки (рис. 16.27) будет

$$m=\iint\limits_S kxdxdy=k\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy=kb\int\limits_0^a\left(x-\frac{x^2}{a}\right)dx=$$

$$=kb\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{kba^2}{6},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

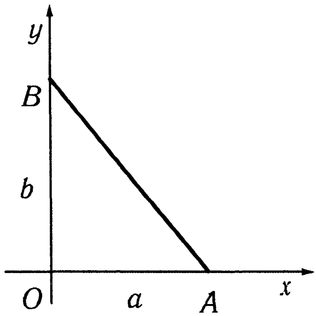

Рис. 16.27

5.2. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями: а) $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$; б) $y^2 = x^2 - x^4$ $(x > 0)$; в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. а) Покажем заданную плоскую фигуру на рис. 16.28. Учитывая, что пластинка однородна, находим по формулам (1) ее массу

$$m = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

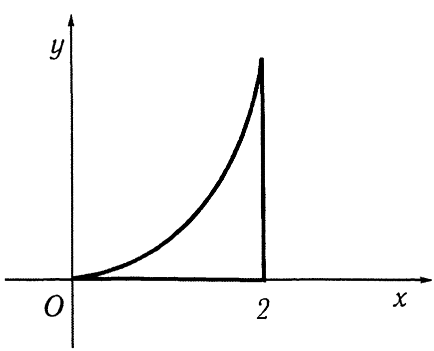

Рис. 16.28

По формулам (2) находим статические моменты относительно координатных осей

$$m_x = \int_0^2 \int_0^{x^2} y dx dy = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4 dx = \frac{16}{5}.$$

$$m_y = \iint_S x dx dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4-y) dy = 4.$$

Координаты центра тяжести по формулам (3) будут

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{3}{2}, \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{6}{5}.$$

б) При $x > 0$ данная кривая ограничивает пластинку, симметричную относительно оси Ox (рис. 16.29). В этом случае $y_c = 0$.

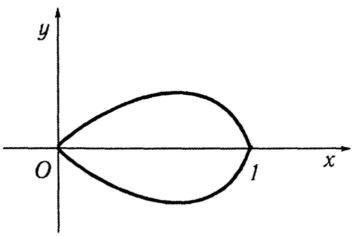

Рис. 16.29

Масса пластинки равна

$$m = 2\int_0^1 dx \int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy = -\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) = \frac{2}{3}.$$

Статический момент относительно Oy

$$m_y = \iint_S x dx dy = 2\int_0^1 x dx \int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy = 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \sin t, & x = 0, & t = 0 \\ dx = \cos t dt, & x = 1, & t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{3\pi}{16}.$$

в) Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси (рис. 16.30), то $y_c = 0$.

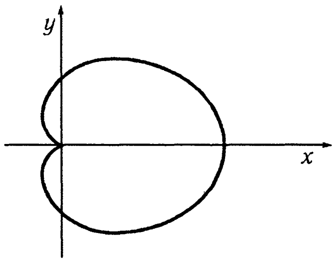

Рис. 16.30

Масса пластинки и статический момент относительно оси Oy находятся по формулам

$$m = \iint\limits_S dxdy; \quad m_y = \iint\limits_S xdxdy.$$

Переходя к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi,$$

будем иметь

$$m = \iint\limits_S \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= a^2\left(1+2\sin\varphi+\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$m_y = \iint\limits_S \rho\cos\varphi\rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}a^3\int\limits_0^{\pi}\left(\cos\varphi+3\cos^2\varphi+3\cos^3\varphi+\cos^4\varphi\right)d\varphi =$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left(\sin\varphi+\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)+3\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\left(\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right)\right)\right|_0^{\pi}=\frac{5}{4}a^3\pi.$$

Отсюда

$$x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{5}{6}a.$$

5.3. Найти момент инерции относительно оси Oy площади треугольника с вершинами $A(0,\ 2a)$, $B(a,\ 0)$ и $C(a,\ a)$.

Решение. Покажем треугольник на рис. 16.31.

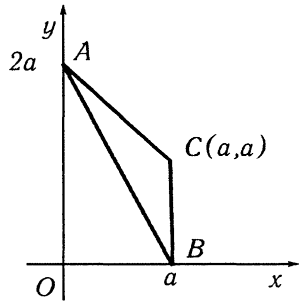

Рис. 16.31

Уравнение прямой AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$ или $y=2(a-x)$; прямой АС: $\frac{x-a}{-a}=\frac{y-a}{a}$ или $y=2a-x$.

Момент инерции по формуле (4)

$$I_y=\iint\limits_S x^2dxdy=\int\limits_0^a x^2dx\int\limits_{2(a-x)}^{2a-x}dy=\int\limits_0^a x^3dx=\frac{a^4}{4}.$$

5.4. Определить моменты инерции I_x, I_y, I_0 прямоугольной пластинки, ограниченной линиями $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$, если плотность ее в каждой точке равна квадрату расстояния точки от начала координат.

Решение. Учитывая, что поверхностная плотность пластинки в точке $\delta(x,y)=x^2+y^2$, по формулам (4) будем иметь

$$I_x=\iint_S\left(x^2+y^2\right)y^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^b\left(x^2y^2+y^4\right)dy=$$

$$=\int_0^a\left(x^2\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}\right)dx=ab^3\left(\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{5}\right).$$

$$I_y=\iint_S\left(x^2+y^2\right)x^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^b\left(x^4+y^2x^2\right)dy=$$

$$=\int_0^a\left(x^4b+\frac{b^3}{3}x^2\right)dx=a^3b\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{9}\right).$$

$$I_0=\iint_S\left(x^2+y^2\right)^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^b\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)dy=$$

$$=\int_0^a\left(x^4b+\frac{2}{3}x^2b^3+\frac{b^5}{5}\right)dx=ab\left(\frac{a^4}{5}+\frac{2}{9}a^2b^2+\frac{b^4}{5}\right).$$

5.5. Найти полярный момент инерции площади, ограниченной линиями: а) $y=4-x^2$ и $y=0$; б) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

Решение. а) Покажем пластинку на рис. 16.32.

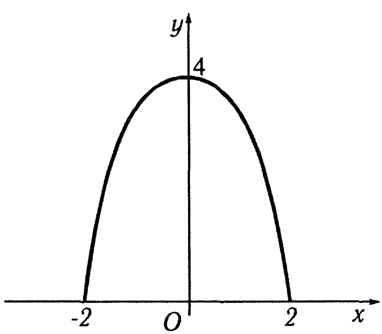

Рис. 16.32

По последней из формул (4) имеем

$$I_0=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_0^{4-x^2}\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{-2}^{2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(4x^2-x^4+\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^3\right)dx=\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{1}{3}\left(64x-\frac{3\cdot16}{3}x^3+\right.$$

$$\left.+3\cdot4\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{4\cdot16}{3}-\frac{64}{5}+\frac{64}{3}\left(4-4+\frac{12}{5}-\frac{4}{7}\right)=47,54.$$

б) Кривая представляет лемнискату Бернулли (рис. 16.33)

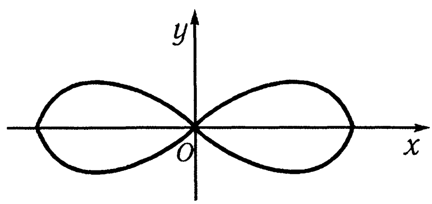

Рис. 16.33

Переходя в последней из формул (4) к полярной системе координат, будем иметь

$$I_0=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_D\rho^3d\rho d\varphi=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\rho^3d\rho=$$

$$=a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{a^4}{4}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^4}{8}.$$

5.6. Найти координаты центра тяжести цилиндрического тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=a^2$, $z=y$, $z=0$.

Решение. Цилиндрическое тело показано на рис. 16.34.

По формулам (5) находим статические моменты

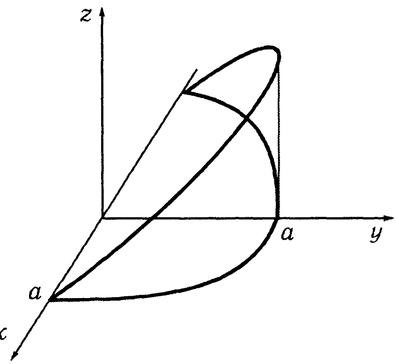

Рис. 16.34

$$m_{xy}=\frac{1}{2}\iint_S z^2dxdy=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3\sin^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{16}\int_0^{\pi}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\frac{a^4\pi}{16};$$

$$m_{xz}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3\sin^2\varphi d\varphi=\frac{a^4\pi}{8};$$

$$m_{yz}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3\sin\varphi\cos\varphi d\rho=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\sin\varphi=0.$$

Масса тела

$$m=\iint_S zdxdy=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{3}a^3.$$

Таким образом, по формулам (6) будем иметь

$$x_c=0,\quad y_c=\frac{3a\pi}{16},\quad z_c=\frac{3a\pi}{32}.$$

5.7. Найти координаты центра тяжести и момент инерции I_z для части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, расположенной в первом октанте.

Решение. Рассматривая часть эллипсоида, как цилиндрическое тело, ограниченное поверхностью $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, проекция которой на плоскость Oxy представляет область: $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ по формулам (5) находим статические моменты

$$m_{xy} = \frac{1}{2}c^2\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy =$$

$$= \frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a \left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{16}abc^2,$$

$$m_{xz} = c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= -\frac{cb^2}{3}\int_0^a \left.\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} dx =$$

$$= \frac{cb^2}{3a^3}\int_0^a \left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{16}ab^2c.$$

По аналогии находим, что $m_{yz} = \frac{\pi}{16}a^2bc.$

Поскольку тело однородно $\delta = 1$, то масса тела численно равна объему и находится из решения (4.2.в) $V = \frac{\pi}{6}abc.$

Таким образом, по формулам (6) имеем

$$x_c = \frac{3}{8}a, \quad y_c = \frac{3}{8}b, \quad z_c = \frac{3}{8}c.$$

При вычислении момента инерции I_z по формуле (8) воспользуемся интегралами (7)

$$I_{xz}=\iint_S y^2 z\,dxdy=\frac{c}{a}\int_0^b y^2 dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx=$$

$$=2\pi ac\int_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

Аналогично

$$I_{yz}=\iint_S x^2 z\,dxdy=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Таким образом,

$$I_z=I_{xz}+I_{yz}=\frac{4}{15}\pi abc\left(a^2+b^2\right).$$

16.6. Тройной интеграл

1°. Тройной интеграл является обобщением понятия двойного интеграла на случай функции трех переменных $f(x,y,z)$ и представляет конечный предел трехмерной интегральной суммы в области V

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}}\sum_i\sum_j\sum_k f\left(x_i,y_j,z_k\right)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k, \quad (1)$$

где $\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k=\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)$ — объем элементарных областей, на которые разбивается пространственная область V.

Для непрерывной в области V функции $f(x,y,z)$ предел (1) существует и не зависит от способа разбиения области V на элементарные области объемом $\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$, от выбора точки в каждом элементарном объеме, в которой вычисляется $f(x,y,z)$, и от способа стремления наибольшего диаметра элементарной области к нулю.

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

2°. Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных определенных интегралов

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (2)$$

Если внутренний интеграл берется по переменной z, то переменные (x, y) при интегрировании его рассматриваются как постоянные величины. Пределы интегрирования во внутреннем интеграле, как правило, являются переменными и зависят от (x, y). Таким образом, задача сводится к вычислению двойного интеграла, у которого пределы интегрирования внутреннего интеграла в общем случае зависят от переменной x, а пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

3°. Пусть в тройном интеграле требуется от переменных x, y, z перейти к переменным u, v, w, связанным соотношениями

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w). \qquad (3)$$

Функции (3) осуществляют взаимно-однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение области G пространства $Ouvw$ на область V пространства $Oxyz$. Если якобиан этого отображения

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

не обращается в нуль на G и функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_G f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|I|\,dudvdw. \qquad (4)$$

Производить замену переменных по формулам (3) следует в том случае, если область интегрирования G в интеграле (4) значительно проще области V.

Если при вычислении тройного интеграла целесообразнее перейти от переменных x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис. 16.35), связанным с декартовыми координатами соотношениями

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z$$
$$\left(0\le\rho<+\infty, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad -\infty<z<+\infty\right),$$

где якобиан преобразования равен

$$I=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho,$$

то формула преобразования имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz. \qquad (5)$$

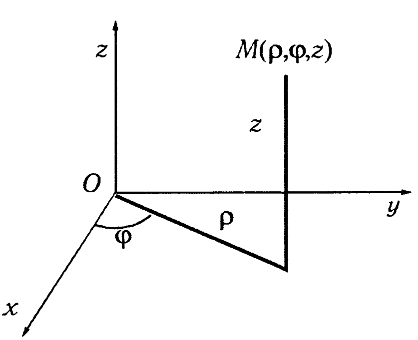

Рис. 16.35

В случае перехода от декартовых координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис. 16.36), связанным с x, y, z соотношениями $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$ $\left(0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi\right)$, где якобиан преобразования равен

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta,$$

формула преобразования тройного интеграла имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_G f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta. \quad (6)$$

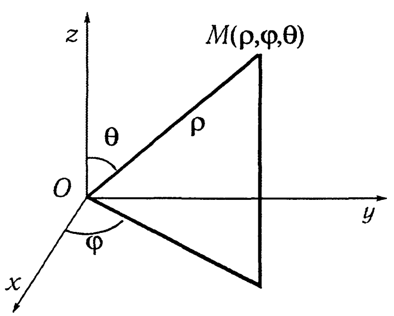

рис. 16.36

6.1. Вычислить следующие интегралы: а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyzdz$;

б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$; в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$.

Решение. а) Вычисление тройного интеграла начинается с вычисления внутреннего интеграла. Полагая x и y постоянными, интегрируем по z, тогда получим

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x xy\frac{z^2}{2}\bigg|_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x xy^3dy.$$

Таким образом, тройной интеграл свелся к двойному. Вычисляем теперь двойной интеграл

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x\frac{y^4}{4}\bigg|_0^x dx=\frac{1}{8}\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{48}.$$

б) Данный интеграл следует вычислять в цилиндрической системе координат. Однако, целесообразнее сначала найти внутренний интеграл по z, а затем перейти к полярной системе координат

$$I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{z^2}{2}\bigg|_0^a dy=\frac{a^2}{2}\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy.$$

Область интегрирования последнего интеграла показана на рис. 16.37. Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, будем иметь

$$I=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{8a^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{9}a^2.$$

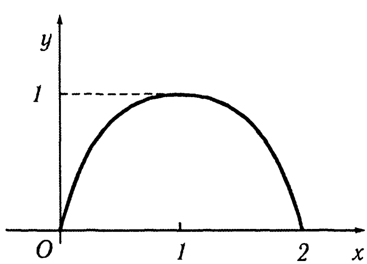

Рис. 16.37

в) Представим область интегрирования на рис. 16.38. Нетрудно заметить, что она займет первый октант единичного шара. Переходя к сферической системе координат, подынтегральная функция будет равна

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2}=\rho$$

Таким образом, пользуясь формулой (6) и расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$I=\iiint\limits_G \rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

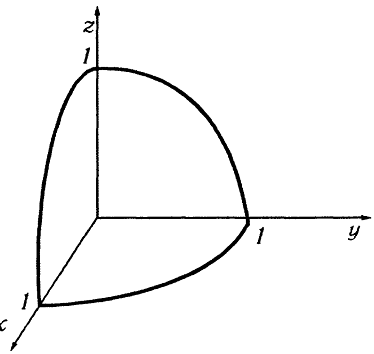

Рис. 16.38

6.2. Вычислить интегралы: а) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, V — область, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$; б) $\iiint\limits_V dxdydz$, V — область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ и содержащая точку

(0, 0, R); в) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, V — область, ограниченная конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=h$.

Решение. а) Область интегрирования показана на рис. 16.39.

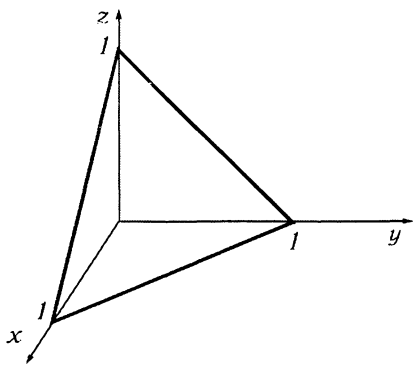

Рис. 16.39

Расставим пределы интегрирования

$$I=\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3}.$$

Полагая x и y постоянными величинами, вычисляем внутренний интеграл по z

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\Bigg|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

б) Преобразуя уравнение сферы к виду $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$, нетрудно заметить, что центр сферы смещен по оси z на R. Таким образом, область интегрирования ограничена сверху сферической, а снизу конической поверхностью (рис. 16.40). Искомый интеграл в сферической системе координат примет вид

$$I=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_G \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi.$$

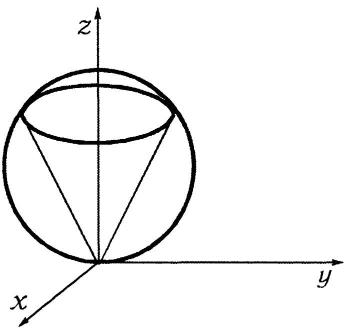

Рис. 16.40

Подставляя в уравнение сферы сферические координаты, будем иметь $\rho=2R\cos\theta$. Расставляя пределы интегрирования, получим

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}\rho^2d\rho=\frac{8R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=-\frac{8R^3}{3\cdot4}\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\pi R^3.$$

в) Проекция конуса на плоскость Oxy есть круг $x^2+y^2=h^2$ (рис. 16.41). Расставляя пределы интегрирования в тройном интеграле, будем иметь

$$I=\iint\limits_S dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_S\left(h^2-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{h}\left(h^2-\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(h^2\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^h=\frac{h^4\pi}{4}.$$

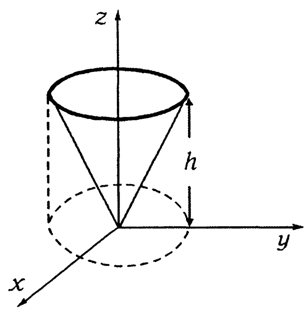

Рис. 16.41

16.7. Вычисление величин посредством тройного интеграла

1°. Объем тела, занимающего область V, в декартовой системе координат определяется по формуле

$$V=\iiint\limits_V dxdydz. \tag{1}$$

Масса тела, занимающего область V, определяется по формуле

$$m=\iiint\delta(x,y,z)\,dxdydz, \tag{2}$$

где $\delta(x,y,z)$ — плотность тела в точке (x,y,z).

2°. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$m_{xy} = \iiint_V \delta(x,y,z)\, z\, dxdydz;$$
$$m_{xz} = \iiint_V \delta(x,y,z)\, y\, dxdydz; \qquad (3)$$
$$m_{yz} = \iiint_V \delta(x,y,z)\, x\, dxdydz.$$

Координаты центра тяжести тела

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{m_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{m_{xy}}{m}, \qquad (4)$$

где m – масса тела.

3°. Моменты инерции тела относительно координатных осей

$$I_x = \iiint_V \delta(x,y,z)\left(y^2 + z^2\right) dxdydz;$$
$$I_y = \iiint_V \delta(x,y,z)\left(x^2 + z^2\right) dxdydz;$$
$$I_z = \iiint_V \delta(x,y,z)\left(x^2 + y^2\right) dxdydz. \qquad (5)$$

4°. Моменты инерции относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \int_V \delta(x,y,z)\, z^2 dV;$$
$$I_{xz} = \int_V \delta(x,y,z)\, y^2 dV; \qquad (6)$$
$$I_{yz} = \int_V \delta(x,y,z)\, x^2 dV,$$

где $dV = dxdydz$.

Полярный момент инерции равен

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \int_V \delta(x,y,z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV. \qquad (7)$$

5°. Если в теле объема V непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке M (x,y,z) плотностью

$\delta(M)=\delta(x,y,z)$, то проекции на оси координат полной силы притяжения $\vec{F}$ на точку $A(x_c,y_c,z_c)$, в которой, мы считаем, сосредоточена единица массы, согласно закону притяжения Ньютона, определяются по формулам

$$F_x=\int\limits_V \frac{x-x_c}{r^3}\delta dV;\quad F_y=\int\limits_V \frac{y-y_c}{r^3}\delta dV;\quad F_z=\int\limits_V \frac{z-z_c}{r^3}\delta dV, \tag{8}$$

где $r=\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2}$ — расстояние MA.

6°. Ньютоновское поле потенциально. Выражение для потенциала поля тела объема V с плотностью δ на точку A имеет вид

$$W=\int\limits_V \frac{\delta dV}{r}. \tag{9}$$

Если тело однородно, то в приведенных формулах следует положить $\delta(x,y,z)=1$.

7.1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2,\quad z=x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=2x,\quad x=1;$

б) $x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2+z^2=a^2$, внутри конуса;

в) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x;$ г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{xyz}{h^3}.$

Решение. а) Объем тела в декартовой системе координат определяется по формуле

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

Тело сверху и снизу ограничено параболлойдами $z=x^2+2y^2$ и $z=x^2+y^2$. Проекция тела на плоскость Oxy показана на рис. 16.42. Расставляя пределы интегрирования, получим

$$V=\int_0^1 dx\int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz=\int_0^1 dx\int_x^{2x} y^2 dy=\frac{1}{3}\int_0^1 7x^3 dx=\frac{7}{12}.$$

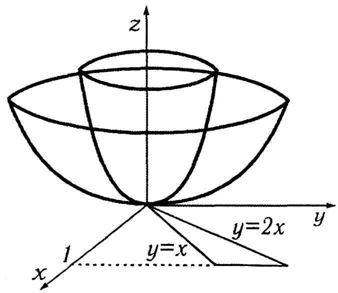

Рис. 16.42

б) Представим искомый объем на рис. 16.43. Поскольку тело, заключенное внутри конуса, симметрично относительно начала координат, то его объем в сферической системе координат равен

$$V=2\iiint_G \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi=2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_0^a \rho^2 d\rho=$$

$$=-\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

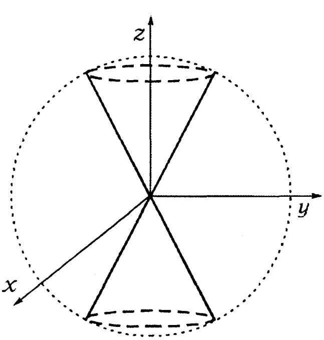

Рис. 16.43

в) Поскольку уравнение содержит выражение $x^2+y^2+z^2$, то целесообразно перейти к сферическим координатам

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Уравнение поверхности в сферической системе координат будет $\rho=a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$.

Переменные y и z входят в уравнение только в квадратах, поэтому тело симметрично относительно плоскостей Oxz и Oxy. Учитывая, что $x\geq 0$, т. е. все тело расположено в области положительных значений x, достаточно вычислить четвертую часть объема. В первом октанте в сферической системе координат переменные изменяются в пределах $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$. Подставляя в формулу (1) значение якобиана $I=\rho^2\sin\varphi$, получим

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}\rho^2\sin\theta d\rho=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\pi a^3}{3}.$$

г) При наличии в уравнении поверхности выражения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ целесообразно перейти к обобщенным сферическим координатам

$$x=a\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\rho\cos\theta.$$

Якобиан в этом случае равен $I=abc\rho^2\sin\theta$. Уравнение поверхности в обобщенных сферических координатах имеет вид $\rho=\frac{abc}{h^3}\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$. Учитывая симметрию и расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{abc}{h^3}\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}abc\rho^2\sin\theta d\rho=$$

$$=\frac{8}{3}\frac{(abc)^4}{h^9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^3\theta d\theta=\frac{(abc)^4}{180h^9}.$$

7.2. Определить массу: а) пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если плотность в каждой ее точке равна аппликате z этой точки; б) сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+z^2=4R^2$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Решение. а) Пирамида показана на рис. 16.44. Поскольку по условию задачи плотность $\delta(x,y,z)=z$, то, пользуясь формулой (2), будем иметь

$$m=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}zdz=\frac{1}{2}\int_0^a dx\int_0^{a-x}(a-x-y)^2dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\left.\left((a-x)^2y-(a-y)y^2+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^{a-x}\right)dx=\frac{1}{6}\int_0^a(a-x)^3dx=\frac{a^4}{24}.$$

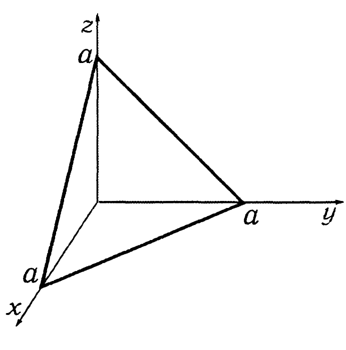

Рис. 16.44

б) Поскольку расстояние точки от начала координат определяется выражением $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то плотность будет равна $\delta(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Пользуясь формулой (2) в сферической системе координат, получим

$$m=\iiint\limits_G \frac{1}{\rho}\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_R^{2R}\rho d\rho=$$

$$=-\frac{3}{2}R^2\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi}d\varphi=6\pi R^2.$$

7.3. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Масса тела определяется по формуле (2)

$$m=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{6}.$$

По формулам (3) находим статические моменты

$$m_{xy}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}zdz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{6}\int\limits_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{24};$$

$$m_{xz}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}ydy\int\limits_0^{1-x-y}dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}y(1-x-y)dy=\frac{1}{6}\int\limits_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{24};$$

$$m_{yz}=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}dz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}.$$

Таким образом, по формулам (4)

$$x_c=y_c=z_c=\frac{1}{4}.$$

7.4. Найти координаты центра тяжести сферы $x^2+y^2+z^2=2az$, если плотность в точках сферы обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат.

Решение. Центр сферы сдвинут по оси Oz на величину радиуса. По соображениям симметрии, очевидно, что x_c и y_c равны 0.

По условию задачи плотность равна $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, тогда масса

$$m = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Переходя к сферическим координатам и расставляя пределы интегрирования по V, будем иметь

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho d\rho = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{4\pi a^2}{3}.$$

Статический момент относительно плоскости Oxy по формуле (3) равен

$$m_{xy} = \iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= -\frac{16a^3\pi}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\cos\theta = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

Таким образом, $z_c = \dfrac{4}{5}a.$

7.5. Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 2ax, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = ax.$

Решение. Момент инерции относительно оси Oz определяется по формуле

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz.$$

Переходя к цилиндрической системе координат (рис. 16.45) и расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$I_z = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{2ax}} \left(x^2+y^2\right)dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho^3\sqrt{2a\rho\cos\varphi}d\rho =$$

$$= \frac{2\sqrt{2a}\cdot 2a^{\frac{9}{2}}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{9}{2}}\varphi d\varphi = \frac{4\sqrt{2}a^5}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)^2 d\sin\varphi = \frac{32\sqrt{2}a^5}{135}.$$

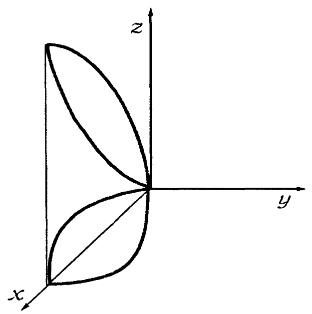

Рис. 16.45

7.6. Найти: а) притяжение центра основания цилиндра радиуса R всей массой цилиндра, если высота цилиндра h; б) потенциал цилиндра на центр его основания; в) момент инерции цилиндра относительно его основания.

Решение. а) Расположим систему координат, как показано на рис. 16.46.

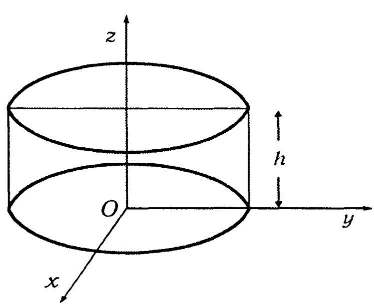

Рис. 16.46

Координаты центра основания цилиндра в этом случае будут $x_c = y_c = z_c = 0$ и расстояние от произвольной точки цилиндра до центра основания $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В силу симметрии проекции силы притяжения F_x и F_y равны нулю. Проекцию силы на ось Oz находим по формуле (8), учитывая, что $\delta = 1$

$$F_z = \iiint_V \frac{zdxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^h \frac{zdz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_0^h \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right)\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\rho - \sqrt{\rho^2+h^2}\right)\Bigg|_0^h = 2\pi\left(R + h - \sqrt{R^2+h^2}\right).$$

б) При нахождении потенциала цилиндра воспользуемся формулой (9)

$$W = \int_0^h dz \iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right) dz = \pi h\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right) + \pi R^2 \ln \frac{h + \sqrt{R^2+h^2}}{R}.$$

в) Поскольку основание цилиндра совпадает с плоскостью Oxy, то воспользуемся формулой (6), где плотность постоянная величина

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^h z^2 dz = \frac{h^2}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho =$$

$$= \frac{h^3 R^2}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3 R^2}{3}.$$

16.8. Криволинейные интегралы

1°. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке M дуги L. Разобьем эту дугу произвольным образом на n элементарных дуг $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, выберем на каждой из них по произвольной точке M_i и составим интегральную сумму $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$. Если при стремлении $\max \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения дуги L, ни от выбора точек M_i на элементарных дугах Δl_i, то он называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(M) = f(x, y)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i,$$

где dl — дифференциал дуги.

В случае пространственной кривой L криволинейный интеграл определяется аналогично

$$\int\limits_L f(x, y, z)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

2°. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Если кривая L задана уравнением $y = \varphi(x)$, то криволинейный интеграл по длине дуги AB кривой L вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx,$$

хотя точнее было бы его обозначить через $\int\limits_{AB} f(x, y)|dl|$.

Если кривая задана параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

то

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

При вычислении интегралов первого рода следует считать, что $dl = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,|dt|$.

Аналогично вычисляется криволинейный интеграл первого рода от функции трех переменных $f(x, y, z)$ по пространственной кривой. Если кривая L задана параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

то

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt.$$

3°. Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl.$$

2.

$$\int_L Cf(x,y)\,dl = C\int_L f(x,y)\,dl, \text{ где } C \text{ — const}.$$

3.

$$\int_L (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))\,dl = \int_L f_1(x,y)\,dl \pm \int_L f_2(x,y)\,dl.$$

4. Если дугу интегрирования L разбить на две части L_1 и L_2, то

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{L_1} f(x,y)\,dl + \int_{L_2} f(x,y)\,dl.$$

4°. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны в каждой точке M дуги AB кривой L. Разобьем эту дугу произвольным образом на n элементарных дуг $\Delta l_i\left(i=1,\ldots,n\right)$ и составим интегральную сумму для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по координатам $S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(P\left(x_i,y_i\right)\Delta x_i+Q\left(x_i,y_i\right)\Delta y_i\right)$, где $\Delta x_i,\Delta y_i$ – проекции элементарной дуги Δl_i на оси координат.

Если при стремлении $\max\Delta x_i\to 0$ и $\max\Delta y_i\to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения дуги L, ни от выбора точек M_i на элементарных дугах Δl_i, то он называется *криволинейным интегралом второго рода* от выражения $P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$ по направленной дуге AB

$$\int_{AB} P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(P\left(x_i,y_i\right)\Delta x_i+Q\left(x_i,y_i\right)\Delta y_i\right).$$

Криволинейный интеграл второго рода иногда называют линейным интегралом вектора

$$\vec{a}=P\left(x,y,z\right)\vec{i}+Q\left(x,y,z\right)\vec{j}+R\left(x,y,z\right)\vec{k}$$

вдоль ориентированной кривой L и обозначают

$$\int_L\left(\vec{a}d\vec{l}\right)=\int_L Pdx+Qdy+Rdz,$$

где в левой части символ $\left(\vec{a}d\vec{l}\right)$ — скалярное произведение $\vec{a}$ и $d\vec{l}$.

Интеграл от вектора $\vec{a}$ вдоль плоской кривой L определяется, соответственно, выражением

$$\int_l\left(\vec{a}d\vec{l}\right)=\int_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy.$$

5°. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Если кривая L задана уравнением $y=\varphi\left(x\right)$, то криволинейный интеграл по длине дуги AB вычисляется по формуле

$$\int_{AB} P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\int_a^b\left(P\left(x,\varphi\left(x\right)\right)+\varphi'\left(x\right)Q\left(x,\varphi\left(x\right)\right)\right)dx.$$

Если кривая L задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)\Big)dt.$$

В случае пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, вычисление осуществляется по формуле

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{x}(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{y}(t)+$$

$$+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{z}(t)\Big)dt.$$

6°. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=-\int_{BA} Pdx+Qdy.$$

2.

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB} Pdx+\int_{AB} Qdy.$$

Остальные свойства аналогичны свойствам криволинейного интеграла первого рода.

8.1. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int_L (x+y)dl$, где L — отрезок прямой от A (1, 0) до B (0, 1);

б) $\int_L xy\,dl$, где L — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте; в) $\int\limits_L x^2dl$, где L — верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2$; г) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; д) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, лежащая в первом октанте; е) $\int\limits_L (x+2y)dl$, где L: $x^2+y^2=4y$.

Решение. а) Данный интеграл является криволинейным интегралом первого рода. Найдем уравнение прямой. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{0-1}$; $y=-x+1$.

Имеем: $y'=-1$, $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{2}dx$. Таким образом:

$$\int\limits_L (x+y)dl=\int\limits_0^1 (x-x+1)\sqrt{2}dx=\sqrt{2}x\Big|_0^1=\sqrt{2}.$$

б) Перейдем к параметрическому представлению эллипса:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad x_t'=-a\sin t,\quad y_t'=b\cos t,$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Искомый интеграл примет вид

$$\int\limits_L xydl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\left(1-\sin^2 t\right)}\,d\sin t=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2}\,d\sin^2 t=$$

$$=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left(a^3-b^3\right)=\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

в) Перейдем к полярной системе координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Уравнение окружности будет

$$\rho=a,\ \text{а}\ \ dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2+0}\,d\varphi=a\,d\varphi.$$

Искомый интеграл примет вид

$$\int_L x^2dl=\int_0^{\pi}\rho^2\cos^2\varphi a d\varphi=a^3\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{a^3\pi}{2}.$$

г) Поскольку имеет место пространственная кривая, то ее дифференциал находится по формуле

$$dl=\sqrt{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2+\dot{z}_t^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Криволинейный интеграл равен

$$\int_L\frac{dl}{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2}=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=$$

$$=\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{d(bt)}{a^2+(bt)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}.$$

д) Переходим к сферическим координатам:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Поскольку $y = x$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и координаты примут вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta, \quad z = \rho\sin\theta.$$

Подставляя координаты в выражение окружности, находим, что $\rho = R$ — постоянная величина.

Принимая θ за параметр, дифференциал дуги примет вид

$$dl = \sqrt{\frac{1}{2}R^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta d\theta} = Rd\theta.$$

Таким образом, интеграл примет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\right)Rd\theta = \sqrt{2}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta =$$

$$= \sqrt{2}R^2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}R^2.$$

е) Воспользуемся полярными координатами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Из уравнения окружности (рис. 16.47) имеем:

$$\rho^2 = 4\rho\sin\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi, \quad \rho' = 4\cos\varphi.$$

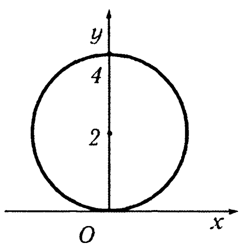

Рис. 16.47

Дифференциал дуги будет

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \sqrt{16\sin^2\varphi + 16\cos^2\varphi}\, d\varphi = 4d\varphi.$$

Отсюда интеграл

$$\int_L (x+2y)dl = 4\int_0^{\pi} (\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi} 4\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + 8\int_0^{\pi} 4\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= -16\frac{\cos^2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi} + 32\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -8(1-1) + 16\pi = 16\pi.$$

8.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{OA} ydx + x(y-x)dy$$

по линиям: а) $y = 3x$; б) $y^2 = 9x$; $O(0, 0)$, $A(1, 3)$.

Решение. а) Данный интеграл является криволинейным интегралом второго рода. Найдем дифференциал от функции $dy = 3dx$ и выразим y через x, тогда получим

$$I = \int_{OA} 3xdx + x(3x-x)3dx = 3\int_0^1 (x+2x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x^3\right)\bigg|_0^1 = \frac{7}{2}.$$

б) В данном примере удобнее найти $x = \frac{1}{9}y^2$, $dx = \frac{2}{9}ydy$ и перейти к переменной y

$$I = \int_{OA} \frac{2}{9}y^2dy + \frac{1}{9}y^2\left(y - \frac{1}{9}y^2\right)dy = \frac{1}{9}\int_0^3\left(2y^2 + y^3 - \frac{1}{9}y^4\right)dy =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{9\cdot 5}\right)\bigg|_0^3 = \frac{73}{20}.$$

8.3. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{+L}(x-y^2)dx$ вдоль периметра прямоугольника, образованного прямыми $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$.

Решение. Здесь линия интегрирования замкнутая ломаная, уравнения звеньев которой даны (рис. 16.48). Представим интеграл в виде суммы четырех интегралов

$$I=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CO}=\int\limits_{0}^{2}xdx+\int\limits_{AB}\left(2-y^2\right)\cdot 0+\int\limits_{2}^{0}(x-1)dx+\int\limits_{CO}\left(0-y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_2^0=2-2+2=2.$$

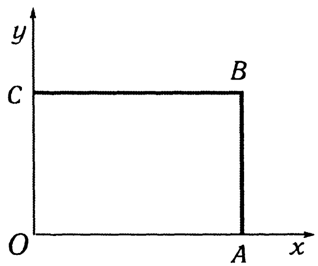

Рис. 16.48

8.4. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{OC}ydx+zdy+xdz$ по: а) отрезку прямой OC; б) ломаной $OABC$, если $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(a,a,0)$, $C(a,a,a)$.

Решение. а) Составим уравнение линии интегрирования — прямой OC. Подставляя в уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, координаты точек O и C, получим каноническое уравнение прямой $\frac{x}{a}=\frac{y}{a}=\frac{z}{a}$. Приравнивая эти отношения параметру t переходим к параметрическому виду: $x=at$, $y=at$, $z=at$. Находя дифференциалы: $dx = a\,dt$, $dy = a\,dt$, $dz = a\,dt$, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл по переменной t, где пределы интегрирования находятся из нашей замены

$$I=\int_0^1\left(a^2t+a^2t+a^2t\right)dt=3a^2\int_0^1 tdt=\frac{3}{2}a^2.$$

б) Интеграл вдоль ломаной $OABC$ представим в виде суммы интегралов по соответствующим звеньям $I=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}$.

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две точки, запишем в параметрическом виде эти прямые

$$OA: x=at,\quad y=0,\quad z=0,$$
$$AB: y=at,\quad x=a,\quad z=0,$$
$$BC: z=at,\quad x=a,\quad y=a.$$

Находя дифференциалы: $dx = a\,dt$, $dy = a\,dt$, $dz = a\,dt$ и переходя к интегрированию по t, получим

$$I=\int_0^1 0\cdot adt+\int_0^1 0\cdot adt+\int_0^1 a^2dt=a^2.$$

8.5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_L \dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$ вдоль дуги астроиды $x=8\cos^3 t$; $y=8\sin^3 t$ от точки $A(8,0)$ до точки $B(0,8)$.

Решение. Находим дифференциалы

$$dx=-24\cos^2 t\sin tdt,\quad dy=24\sin^2 t\cos tdt$$

и переходим к интегрированию по t

$$I=\int\limits_L\frac{8^3\cdot 3\cos^6 t\sin^2 t\cos t+8^3\cdot 3\sin^6 t\cos^2 t\sin t}{2^5\cos^5 t+2^5\sin^5 t}dt=48\int\limits_L\sin^2 t\cos^2 tdt.$$

При интегрировании от точки A до точки B переменная t изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому

$$I=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2tdt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt=6\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi.$$

8.6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{+L} ydx-xdy$, где L эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Воспользуемся параметрическим уравнением эллипса: $x=a\cos t$; $y=b\sin t$. Найдем дифференциалы $dx=-a\sin tdt$; $dy=b\cos tdt$ и перейдем к переменной интегрирования t

$$I=\int\limits_{+L} -b\sin t\, a\sin t-a\cos t\, b\cos tdt=-ab\int\limits_{+L} dt.$$

Поскольку интегрирование по эллипсу совпадает с положительным направлением обхода, то переменная интегрирования изменяется от 0 до 2π, т. е.

$$I=-ab\int\limits_0^{2\pi} dt=-2\pi ab.$$

8.7. Найти $I=\int\limits_L yzdx+zxdy+xydz$, где L — дуга первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

Решение. Находим дифференциалы

$$dx=-a\sin tdt,\quad dy=a\cos tdt,\quad dz=bdt$$

и переходим к интегрированию по t, тогда

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a\sin t\cdot b\,t\,a\sin t+bt\cdot a\cos t\,a\cos t+a\cos t\,a\sin t\,b\right)dt=$$

$$=a^2b\int\limits_0^{2\pi}\left(t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=$$

$$=a^2b\left(t\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2tdt-\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}\right)=0.$$

8.8. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{-L} \dfrac{xy\left(ydx - xdy\right)}{x^2 + y^2}$, где L — правый лепесток лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos^2 \varphi$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, найдем дифференциалы: $dx = -\rho\sin\varphi d\varphi$; $dy = \rho\cos\varphi d\varphi$, тогда интеграл примет вид

$$I = \int\limits_{-L} \frac{\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi\left(-\rho^2\sin^2\varphi - \rho^2\cos^2\varphi\right)}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Упростим и воспользуемся первым свойством криволинейных интегралов, получим

$$I = a^2 \int\limits_L \cos^3\varphi d\cos\varphi = \frac{a^2}{4}\cos^4\varphi \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0.$$

16.9. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

1°. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ было в некоторой односвязной области полным дифференциалом.

Область D называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, лежащая в этой области, может быть стянута в точку.

Для того чтобы в области D подынтегральное выражение было полным дифференциалом от некоторой функции двух переменных $U(x, y)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (1)$$

В этом случае криволинейный интеграл находится по формуле

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=U(B)-U(A), \qquad (2)$$

т. е. равен разности значений функции $U(x, y)$ в точках B и A и не зависит от пути интегрирования AB, взятого в области D.

Криволинейный интеграл, взятый по любой замкнутой кривой, принадлежащей области D, равен нулю.

2°. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ было в некоторой области полным дифференциалом. Для этого необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (3)$$

Криволинейный интеграл, в этом случае, равен

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=U(B)-U(A), \qquad (4)$$

т. е. выражается разностью двух значений функции $U(x, y, z)$ в точках B и A и не зависит от пути интегрирования.

3°. Если полный дифференциал функции двух переменных $U(x, y)$ известен $dU = Pdx + Qdy$, причем условие (1) выполнено, то функция $U(x, y)$ находится интегрированием дифференциала по контуру ломаной AMB или ANB (рис. 16.49) со звеньями, параллельными осям координат. В этом случае вдоль AM имеем $y = y_0$ и $dy = 0$, а вдоль AN $x = x_0$, $dx = 0$.

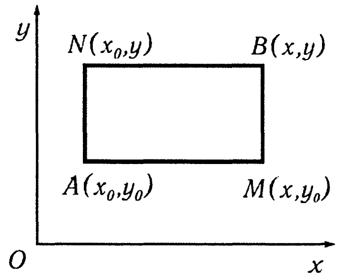

Рис. 16.49

Интегрируя по ломаной AMB, получим

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C, \tag{5}$$

а интегрируя по ломаной ANB, будем иметь

$$U(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+C. \tag{6}$$

Укажем еще один способ нахождения функции по ее полному дифференциалу.

Так как полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy,\quad \frac{\partial U}{\partial x}dx=Pdx,\quad \frac{\partial U}{\partial y}dy=Qdy,$$

то интегрируя каждый из них, полагая y и x, соответственно постоянной, получим

$$U=\int Pdx+C(y),\quad U=\int Qdy+C_1(x),$$

где $C(y)$, $C_1(x)$ — неизвестные функции.

Если взять все известные члены из первого интеграла и дописать к ним члены зависящие от y из второго, то получим функцию $U(x, y)$. Можно наоборот.

Значение функции $U(x, y, z)$ трех переменных, по заданному дифференциалу, находится аналогично

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz. \quad (7)$$

9.1. Вычислить $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(xdy+ydx)$ вдоль: а) отрезка прямой; б) дуги параболы $y=x^2$; в) дуги параболы $y^2=x$.

Решение. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом, т.к. $P=y$, $Q=x$ и $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, и следовательно, криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, а определяется положением начальной и конечной точки интегрирования. Вычислим интеграл по трем линиям:

а) уравнение прямой $y=x$ и $dy=dx$, тогда

$$I=\int_0^1 xdx+xdx=x^2\Big|_0^1=1.$$

б) дуге параболы $y=x^2$, $dy=2xdx$

$$I=\int_0^1 x2xdx+x^2dx=x^3\Big|_0^1=1.$$

в) дуге параболы $y^2=x$, $2ydy=dx$

$$I=\int_0^1 y^2dy+y2ydy=y^3\Big|_0^1=1.$$

9.2. Найти первообразную функцию, если:

а) $dU=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$; б) $dU=\sin 2xdx-\sin 2ydy$;

в) $dU=(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$; г) $dU=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. а) Проверим, является ли данное выражение полным дифференциалом: $\frac{\partial P}{\partial y}=-3$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-3$. Условие (1) выполнено, следовательно, данное выражение есть полный дифференциал некоторой функции U. Найдем эту функцию по формуле (5), выбрав точку x_0, y_0 в начале координат

$$U=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y 3\left(y^2-x\right)dy+C=x^3+3\left(\frac{y^3}{3}-xy\right)+C=x^3+y^3-3xy+C.$$

б) Проверим условие (1): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$ и воспользуемся формулой (6), выбрав точку x_0,y_0 в начале координат

$$U=-\int_0^y \sin 2y dy+\int_0^x \sin 2x dx+C=\frac{1}{2}(\cos 2y-\cos 2x)+C.$$

в) Проверим, является ли данное выражение полным дифференциалом:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^{xy}+y^2xe^{xy};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=ye^{xy}\left(1+xy\right)+e^{xy}y=2ye^{xy}+xy^2e^{xy}.$$

Условие (1) выполнено, следовательно, данное выражение есть полный дифференциал некоторой функции U.

Найдем частные дифференциалы Pdx и Qdy. Интегрируя каждый из них, полагая y и x, соответственно постоянными величинами, получим

$$U=\int\left(y^2e^{xy}-3\right)dx+C\left(y\right)=y^2\frac{1}{y}e^{xy}-3x+C\left(y\right)=ye^{xy}-3x+C\left(y\right),$$

$$U=\int e^{xy}(1+xy)dy+C_1\left(x\right)=\frac{1}{x}e^{xy}+x\int ye^{xy}dy+C_1\left(x\right)=ye^{xy}+C_1\left(x\right).$$

Подставляя во второе выражение вместо $C_1(x)$ все члены из первого выражения, зависящие только от x, окончательно получим

$$U=ye^{xy}-3x+C.$$

Можно было бы из второго выражения подставить в первое выражение вместо $C\,(y)$ все члены, зависящие только от y. Поскольку таких членов нет, то результат будет тот же самый.

г) Проверим, является ли данное выражение полным дифференциалом. Для этого найдем:

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

и проверим выполнение условий (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}};\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{-yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{-xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поскольку условия (3) выполнены, то данное выражение является полным дифференциалом функции U. Найдем эту функцию, воспользовавшись формулой (7) и выбирая точку x_0, y_0, z_0 за начало координат

$$U=\int_0^x dx+\int_0^y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy+\int_0^z\frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C=$$

$$=x+\frac{1}{2}\int_0^y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}\int_0^z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+y^2+z^2\right)+C=$$

$$=x+\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^y+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^z+C=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}+C.$$

9.3. Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов: а) $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)}3x^2ydx+x^3dy$; б) $\int\limits_{(0,1,2)}^{(1,2,3)}yzdx+xzdy+xydz$.

Решение. а) Проверим, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. Для этого воспользуемся условием (1): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2$. Поскольку подынтегральное выражение полный дифференциал, то значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования.

Будем интегрировать по ломаной, у которой звенья параллельны координатным осям. Пусть при изменении x от 0 до 2 $y = 0$, $dy=0$, тогда $\int\limits_0^2 3x^2 0dx+x^3 0=0$. При изменении y от 0 до 1 $x=2$, $dx=0$ и интеграл равен

$$\int\limits_0^1 3\cdot 4y\cdot 0+8dy=8y\Big|_0^1=8.$$

Значение этого интеграла можно найти и другим образом. Для этого находим функцию U по ее полному дифференциалу и определяем разность ее значений в точках B и A по формуле (2)

$$U=\int\limits_0^y x^3dy=x^3y\Big|_{(0,0)}^{(2,1)}=8\cdot 1=8.$$

б) Проверим, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. Для этого воспользуемся условиями (3): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=z$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}=x$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}=y$. Поскольку условия (3) выполнены, то подынтегральное выражение полный дифференциал и значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования.

По формуле (7) найдем функцию U по ее полному дифференциалу $U=\int\limits_0^z xydz=xyz$. Теперь по формуле (4) вычислим разность значений функции U в точках B и A

$$U=xyz\Big|_{(0,1,2)}^{(1,2,3)}=1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 1\cdot 2=6.$$

16.10. Вычисление геометрических и физических величин посредством криволинейных интегралов

1°. Длина дуги AB плоской или пространственной кривой определяется по формуле

$$L = \int\limits_{AB} dl, \tag{1}$$

где dl — дифференциал дуги.

2°. Площадь фигуры, ограниченная замкнутой кривой C в плоскости xOy, определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{+C} xdy - ydx. \tag{2}$$

3°. Интеграл первого рода $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$, где под dl подразумевается $|dl|$, с геометрической точки зрения означает величину цилиндрической поверхности над дугой AB от плоскости xOy до поверхности $z = f(x, y)$.

Аналогично, интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$, где путь интегрирования расположен на кривой AB, расположенной в плоскости xOy, представляет проекцию на плоскость xOz части цилиндрической поверхности, восстановленной перпендикулярно к плоскости xOy из точек кривой AB и ограниченной сверху поверхностью $z = P(x, y)$.

4°. Масса материальной дуги AB

$$m = \int\limits_{AB} \rho(M)dl, \tag{3}$$

где $\rho(M)$ — линейная плотность вещества в точке M дуги.

5°. Координаты центра тяжести плоской кривой AB

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \quad y_c = \frac{m_x}{m}, \tag{4}$$

где $m_y = \int\limits_{AB} \rho(M)xdl$, $m_x = \int\limits_{AB} \rho(M)ydl$ — статические моменты кривой относительно осей координат.

Координаты центра тяжести пространственной кривой AB

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{m_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{m_{xy}}{m}, \tag{5}$$

где $m_{yz} = \int\limits_{AB} x\rho(M)dl$, $m_{xz} = \int\limits_{AB} y\rho(M)dl$, $m_{xy} = \int\limits_{AB} z\rho(M)dl$ — статические моменты кривой относительно координатных плоскостей.

Если масса распределена равномерно $\rho - const$, то ρ выносится за знаки интегралов и сокращается.

6°. Моменты инерции пространственной кривой относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат определяются по формулам

$$I_x = \int\limits_L \rho(M)(y^2+z^2)dl, \quad I_y = \int\limits_L \rho(M)(x^2+z^2)dl,$$

$$I_z = \int\limits_L \rho(M)(x^2+y^2)dl, \quad I_0 = \int\limits_L \rho(M)(x^2+y^2+z^2)dl. \tag{6}$$

7°. Работа, совершаемая силой $\vec{F}(P,Q,R)$ при перемещении точки по дуге AB из точки A в точку B, определяется по формуле

$$E = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz, \tag{7}$$

где P, Q, R — проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

Если сила имеет потенциал, т. е. существует потенциальная или силовая функция $U(x, y, z)$ такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R, \tag{8}$$

то работа определяется по формуле

$$E = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{A}^{B} dU = U(B) - U(A), \qquad (9)$$

не зависит от пути интегрирования и определяется координатами начальной $A\,(x_1, y_1, z_1)$ и конечной $B\,(x_2, y_2, z_2)$ точки пути.

8°. Если материальная точка M_0 массы m_0 притягивается материальной кривой, то проекции равнодействующей силы на оси будут

$$X = km_0 \int\limits_{AB} \frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}dl, \quad Y = km_0 \int\limits_{AB} \frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}dl, \qquad (10)$$

где $\bar{r}$ — длина вектора $\overline{M_0M}$, а угол θ — угол, составленный этим вектором с осью Ox, k — постоянная тяготения.

9°. Согласно закону Био-Савара, сила, с которой ток I действует на точечную магнитную массу m, определяется по формуле

$$\vec{F} = \int\limits_{AB} \frac{mI\sin\alpha}{r^2}dl, \qquad (11)$$

где dl — элемент длины проводника, r — расстояние от элемента тока до магнитной массы, α — угол между направлением прямой, соединяющий магнитную массу и элемент тока, и направлением самого элемента тока. Направление силы перпендикулярно плоскости, содержащей элемент тока и точку, в которую помещена точечная магнитная масса, и определяется правилом «буравчика».

10.1. Найти длину кривой: а) конической винтовой линии $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ от точки O (0,0,0) до точки A $(a,0,a)$; б) $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ от $x = 0$ до $x = 3$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1), тогда

$$L = \int\limits_{OA} dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Подставляя координаты точек O и A в уравнения винтовой линии, находим пределы изменения параметра t: $0 = ae^t \cos t$, $0 = ae^t \sin t$, $0 = ae^t$, откуда $t = -\infty$; $1 = e^t \cos t$, $0 = e^t \sin t$, $1 = e^t$, откуда $t = 0$. Таким образом

$$L = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{a^2 e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + a^2 e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + a^2 e^{2t}} dt =$$

$$= a\sqrt{3} \int_{-\infty}^{0} e^t dt = a\sqrt{3} \lim_{\beta \to -\infty} e^t \Big|_{\beta}^{0} = a\sqrt{3}.$$

б) Примем переменную x за параметр t, тогда: $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $z = \frac{t^3}{6}$. Отсюда по формуле (1) имеем:

$$L = \int_{AB} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_0^3 \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (2 + t^2) dt = \frac{1}{2} \left(2t + \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 = 7{,}5.$$

10.2. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой: а) параболами $y = x^2$ и $x = y^2$; б) астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$; в) петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

Решение. а) Решая совместно уравнения парабол, находим точки пересечения кривых (0,0) и (1,1) (рис. 16.50).

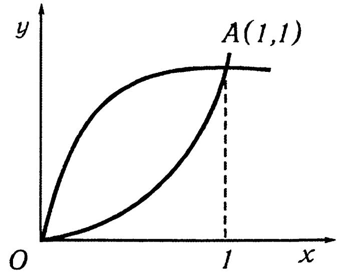

Рис. 16.50

Пользуясь формулой (2), находим

$$S=\frac{1}{2}\int_{OA} xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{AO} xdy-ydx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{2}\int_1^0 y^2dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

б) Воспользуемся формулой (2). Для этого находим дифференциалы $dx=-3a\cos^2 t\sin tdt$, $dy=3a\sin^2 t\cos tdt$. Параметр t изменяется от 0 до 2π. Таким образом

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3a^2\sin^2 t\cos^4 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^3 tdt=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3}{16}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

в) Поскольку в алгебраическом уравнении кривой имеются две однородные группы членов, степени которых отличаются на единицу, то воспользуемся подстановкой $y = tx$. Подставляя данную подстановку в уравнение петли и исключая последовательно одну из переменных, находим параметрические уравнения $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

Геометрически параметр $t=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta$ есть угловой коэффициент полярного радиуса (рис. 16.51) при изменении θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, при этом параметр t изменяется от 0 до ∞. Находя дифференциалы $dx=3a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}dt$, $dy=3a\frac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2}dt$ и пользуясь формулой (2), будем иметь

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\infty 9a^2\left(\frac{t\left(2t-t^4\right)}{\left(1+t^3\right)^3}-\frac{t^2\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}\right)dt=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{2}a^2\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{1+t^3}\bigg|_0^\beta=\frac{3}{2}a^2.$$

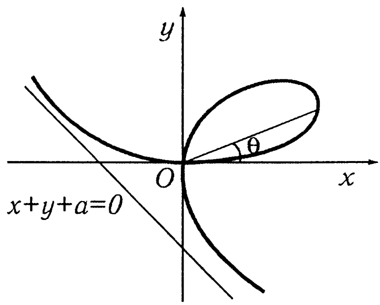

Рис. 16.51

10.3. Найти площади цилиндрических поверхностей, заключенных между плоскостью xOy и поверхностями: а) $y=\sqrt{2x}$, $z=y$, $x=\frac{8}{9}$; б) под первым витком винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=x$ $(z\geq 0)$; г) $x^2+y^2=Rx$, $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\geq 0)$.

Решение. а) Согласно пункту **3°** площадь боковой поверхности определяется формулой $S=\int\limits_L zdl$, где контур интегрирования L параболический цилиндр $y=\sqrt{2x}$. Дифференциал контура равен $dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx$. Подставляя под знак интеграла $z=y=\sqrt{2x}$, получим

$$S=\int_0^{\frac{8}{9}}\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int_0^{\frac{8}{9}}(2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{8}{9}}=\frac{98}{81}.$$

б) Дифференциал контура в данном случае равен $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt$. Отсюда площадь цилиндрической поверхности

$$S=\int_0^{2\pi}bt\sqrt{a^2+b^2}dt=b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=2\pi^2b\sqrt{a^2+b^2}.$$

в) Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$.

Дифференциал дуги равен $dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$. При $z\ge 0$ площадь цилиндрической поверхности равна

$$S=k\int_L a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=$$

$$=2ak\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t}dt=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin t=u,\\ c^2=a^2-b^2\end{vmatrix}=2ak\int_0^1\sqrt{b^2+c^2u^2}du.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$S=ak\left(u\sqrt{b^2+c^2u^2}+\frac{b^2}{c}\ln\left(cu+\sqrt{b^2+c^2u^2}\right)\Big|_0^1\right)=$$

$$=ak\left(a+\frac{b^2}{c}\ln\frac{a+c}{b}\right).$$

г) Перейдем к полярной системе координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тогда уравнение окружности в плоскости xOy будет $\rho=R\cos\varphi$. При $z\ge 0$ площадь цилиндрической поверхности

$$S=\int_L \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dl=2\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}\sqrt{R^2\cos^2\varphi+R^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=2R^2.$$

10.4. Найти массу: а) участка кривой $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x_1=\dfrac{1}{2}$ и $x_2=2$, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки; б) первого витка винтовой линии $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки $\rho=kr,\quad k$ — коэффициент пропорциональности; в) всей кардиойды $r=a(1+\cos\varphi)$, если плотность $\rho=k\sqrt{r}$.

Решение. а) По формуле (3), учитывая, что $\rho=x^2$, имеем $m=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dl$. Так как $dl=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,dx$, то

$$m=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{5}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)=\frac{35}{24}\sqrt{5}.$$

б) Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π. Выразим через параметр плотность:

$\rho=kr=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k\sqrt{a^2+b^2t^2}$ и дифференциал дуги $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$

Отсюда по формуле (3) имеем

$$m=\int_0^{2\pi}k\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2t^2}\,dt=k\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2t^2}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$m = k\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+b^2t^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\left(bt+\sqrt{a^2+b^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= k\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\left(\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)\right).$$

в) Воспользуемся формулой (3). Дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi.$ При нахождении массы всей кардиойды φ изменяется от 0 до 2π. Таким образом

$$m = \int_0^{2\pi} k\sqrt{a(1+\cos\varphi)}\,a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= ka\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\,d\varphi = 2k\pi a\sqrt{2a}.$$

10.5. Найти координаты центра тяжести: а) однородной полуарки циклойды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$; б) первого полувитка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, считая плотность постоянной; в) кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$, считая плотность $\rho = 1$.

Решение. а) Координаты центра тяжести однородной полуарки циклойды вычисляем по формулам (4), считая плотность ρ постоянной величиной. Тогда

$$m = \int_0^{\pi}\rho\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = a\rho\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2a\rho\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\rho\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4a\rho.$$

Статические моменты относительно координатных осей

$$m_y=\int_0^{\pi}\rho a^2(t-\sin t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=$$

$$=2a^2\rho\int_0^{\pi}\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=2a^2\rho\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=2a^2\rho\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{3}a^2\rho.$$

$$m_x=\int_0^{\pi}\rho a^2(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=$$

$$=2a^2\rho\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=2a^2\rho\left(-2t\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=2a^2\rho\left(2-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{16}{3}a^2\rho.$$

Отсюда $x_c=\dfrac{m_y}{m}=\dfrac{8}{3}a,\quad y_c=\dfrac{m_x}{m}=\dfrac{4}{3}a.$

б) Координаты центра тяжести первого полувитка винтовой линии находим по формулам (5). Поскольку плотность постоянна, то дроби (5) можно сократить на ρ после вынесения ρ за знаки интегралов. В этом случае, при вычислении необходимых величин, ρ целесообразно опустить, приравняв ее, например, единице

$$m=\int_0^{\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2}dt=\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$m_{yz}=\int_0^{\pi}x\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt=a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}\cos t dt=a\sqrt{a^2+b^2}\sin t\Big|_0^{\pi}=0.$$

$$m_{xz}=\int_0^{\pi}y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt=a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}\sin t dt=-a\sqrt{a^2+b^2}\cos t\Big|_0^{\pi}=$$

$$=2a\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$m_{xy} = \int\limits_{AB} zdl = b\int\limits_0^{\pi} t\sqrt{a^2+b^2}dt = b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}b\pi^2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Отсюда $x_c = \dfrac{m_{yz}}{m} = 0,\quad y_c = \dfrac{m_{xz}}{m} = \dfrac{2a}{\pi},\quad z_c = \dfrac{m_{xy}}{m} = \dfrac{b\pi}{2}.$

в) Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси, то центр тяжести лежит на полярной оси, т. е. $\varphi_c = 0$.

При постоянной плотности $\rho = 1$ масса кардиоиды равна

$$m = 2\int\limits_0^{\pi} dl = 2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 8a.$$

Так как полярная ось совпадает с осью Ox, то статический момент относительно полярной оси находим по формуле

$$M_p = \int\limits_L ydl = \int\limits_0^{2\pi} r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\frac{3\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= -a^2\left(\cos\frac{3\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{32}{5}a^2.$$

Отсюда $r_c = \dfrac{M_p}{m} = \dfrac{4}{5}a.$

10.6. Вычислить: а) статический момент первого витка конической винтовой линии $x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t$ относительно плоскости xOy, считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости $\rho = kz^2$; б) моменты инерции относительно координатных осей и начала координат первого витка винтовой линии $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$

Решение. а) Статический момент пространственной линии относительно плоскости, согласно пункту **4°**, вычисляется по формуле $m_{xy} = \int\limits_L \rho(M) z dl$. Подставляя сюда заданную плотность и переходя к параметрическому виду функций, будем иметь

$$m_{xy} = k\int\limits_0^{2\pi} t^3\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = k\int\limits_0^{2\pi} t^3\sqrt{t^2+2}dt.$$

Делаем замену $t^2 + 2 = u^2, \quad tdt = udu, \quad t^2 = u^2 - 2$, тогда

$$m_{xy} = k\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\sqrt{2\pi^2+1}} (u^2-2)u^2 du = k\left(\frac{u^5}{5} - \frac{2}{3}u^3\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\sqrt{2\pi^2+1}} =$$

$$= \frac{4k\sqrt{2}}{15}\left(3(2\pi^2+1)^{\frac{5}{2}} - 5(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} + 2\right) =$$

$$= \frac{8k\sqrt{2}}{15}\left((2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}(3\pi^2-1)+1\right).$$

б) Моменты инерции относительно координатных осей находим по формулам (6). Полагая $\rho(M) = 1$, получим

$$I_x = \int\limits_L (a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 tdt + b^2\int\limits_0^{2\pi}t^2dt\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) + b^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi\left(a^2 + \frac{8}{3}b^2\pi^2\right)\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$I_y = \int\limits_L (a^2\cos^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt + b^2\int\limits_0^{2\pi}t^2dt\right) = \pi\left(a^2 + \frac{8}{3}b^2\pi^2\right)\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$I_z=\int\limits_L\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=a^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$I_0=\int\limits_L\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right).$$

10.7. Поле образовано силой $\overline{F}\{P,Q\}$, где $P=x-y$, $Q=x$. **Вычислить** работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x=\pm a$, $y=\pm a$.

Решение. Расположим начало координат в центре квадрата (рис. 16.52) и будем обходить квадрат от точки A против часовой стрелки. Уравнение прямой AB имеет вид $y=-a$. Согласно формуле (7), работа на отрезке AB равна

$$E_{AB}=\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=\int\limits_{-a}^{a}(x-y)\,dx=\int\limits_{-a}^{a}(x+a)\,dx=2a^2.$$

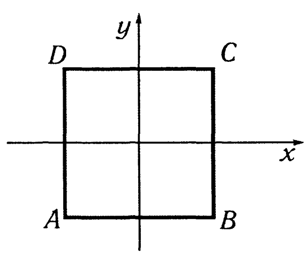

Рис. 16.52

Уравнение прямой BC: $x=a$. По формуле (7) работа на отрезке BC равна

$$E_{BC}=\int\limits_{-a}^{a}xdy=a\int\limits_{-a}^{a}dy=2a^2.$$

Уравнение прямой CD: $y = a$. Работа на отрезке CD равна

$$E_{CD} = \int_{-a}^{a} (x - y) dx = \int_{-a}^{a} (x - a) dx = 2a^2.$$

Уравнение прямой DA: $x = -a$. Работа на отрезке DA равна

$$E_{DA} = \int_{-a}^{a} x dy = -a \int_{-a}^{a} dy = 2a^2.$$

Таким образом, вся работа при перемещении единицы массы по контуру квадрата равна $E = 8a^2$.

10.8. В каждой точке M эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ приложена сила $\vec{F}$, равная по величине расстоянию от точки M до центра эллипса и направленная к центру эллипса. **Найти** работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки вдоль дуги эллипса, лежащей в первом квадранте.

Решение. Поскольку сила от произвольной точки M эллипса, лежащей в первом квадранте, направлена к центру эллипса, а ее величина равна расстоянию от точки M до центра, то ее можно представить в виде $\vec{F} = -x\vec{i} - y\vec{j}$, где величина проекции силы через параметр t имеют вид $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, знаки минус указывают на то, что направления проекций противоположны направлениям координатных осей.

Подставляя проекции силы $\vec{F}$ в формулу (7) и переходя от криволинейного интеграла к обыкновенному с переменной t, получим

$$E = \int_L P dx + Q dy = -\int_L x dx + y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 \cos t \sin t - b^2 \sin t \cos t\right) dt =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, d \sin t = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

10.9. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $A(a, a, 0)$ до точки $B\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a\right)$.

Решение. Сечение гиперболойда плоскостью представляет кривую, уравнение которой имеет вид $x^2 - z^2 = a^2$. Подставляя в формулу (7) проекции силы $\vec{F}$ и пользуясь уравнением плоскости $y = x$ и кривой $x^2 = a^2 + z^2$, получим

$$E = \int_L 2xydx + y^2dy - x^2dz = \int_a^{a\sqrt{2}} 2x^2dx + \int_a^{a\sqrt{2}} y^2dy - \int_0^a \left(a^2 + z^2\right)dz =$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Bigg|_a^{a\sqrt{2}} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_a^{a\sqrt{2}} - \left(a^2z + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = a^3\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right).$$

10.10. Найти потенциальную функцию силы $\vec{F}\{P, Q, R\}$ и определить работу силы на участке пути, если: а) $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$ (сила тяжести точки массы m) и точка перемещается из положения $A(x_1, y_1, z_1)$ в положение $B(x_2, y_2, z_2)$; б) $P = -\frac{kx}{r^3}$, $Q = -\frac{ky}{r^3}$, $R = -\frac{kz}{r^3}$, где k — $const$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (сила ньютоновского притяжения) и материальная точка из положения $A(x_1, y_1, z_1)$ удаляется в бесконечность.

Решение. а) Потенциальную функцию U силы $\vec{F}$ определяем по формулам (8) $U = -\int mgdz = -mgz$. Согласно формуле (9) искомая работа

$$E = \int_A^B dU = U(B) - U(A) = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2),$$

т. е. зависит только от разности аппликат начала и конца пути.

б) Потенциальная функция U, согласно формулам (8), равна

$$U=-k\int\frac{xdx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\int\frac{ydy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-k\int\frac{zdz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{r}.$$

Работу определяем по формуле (9) в зависимости от координат начальной и конечной точки пути

$$E=\int_A^{\infty}dU=U(\infty)-U(A)=-\frac{k}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}}.$$

10.11. Найти силу, с которой масса m_0, находящаяся в начале координат, притягивается: а) однородной полуокружностью $x^2+y^2=R^2$ (рис. 16.53); б) однородной ломаной линией ABC с координатами точек A $(a,\ 0)$, B $(0,\ a)$ и C $(-a,\ 0)$; в) дугой астроиды, лежащей в первом квадранте, если плотность кривой в каждой ее точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

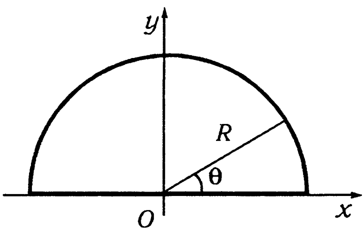

Рис. 16.53

Решение. а) Из соображений симметрии проекция равнодействующей на ось Ox равна $x=0$. Радиус полуокружности $r=R$. Обозначим угол между радиус-вектором и осью Ox за θ. Учитывая, что $dl=Rd\theta$, проекцию Y находим по формуле (10)

$$Y=m_0\rho\int_L\frac{\sin\theta}{r^2}dl=\frac{m_0\rho}{R}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\frac{m_0\rho}{R}\cos\theta\Big|_0^{\pi}=\frac{2m_0\rho}{R}.$$

б) Представим ломаную линию на рис. 16.54 в системе координат Oxy. Нетрудно заметить, что из соображений симметрии проекция равнодействующей силы на ось Ox равна нулю, а на ось Oy равна удвоенной проекции равнодействующей силы притяжения однородной материальной прямой AB.

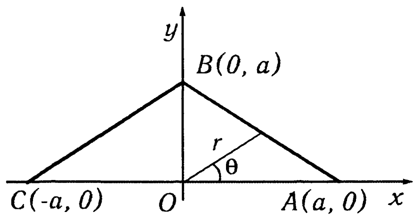

Рис. 16.54

Уравнение прямой $x + y = a$, отсюда

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{r} = \sin\theta, \quad x = a - y, \quad dl = \sqrt{2}dy.$$

Используя формулу (10), имеем

$$Y = 2\sqrt{2}\rho\int_0^a \frac{y}{r^3}dy = 2\sqrt{2}\rho\int_0^a \frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2}\rho\int_0^a \frac{ydy}{\left((a-y)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\rho\int_0^a \frac{ydy}{\left(a^2-2ay+2y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\rho\int_0^a \frac{ydy}{\left(y^2-ay+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \rho\int_0^a \frac{ydy}{\left[\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Сделаем замену переменной $y - \dfrac{a}{2} = t$; тогда $dy = dt$; $y = t + \dfrac{a}{2}$ при $y = 0$; $t = -\dfrac{a}{2}$ и при $y = a$; $t = \dfrac{a}{2}$.

Интеграл примет вид

$$Y = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{t + \frac{a}{2}}{\left(t^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Представим его в виде суммы двух интегралов $Y = Y_1 + Y_2$. Первый интеграл равен

$$Y_1 = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(t^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(t^2 + \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= -\rho \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{a^2}{4}}} \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -\rho \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2}}} \right| = 0;$$

Найдем значение второго интеграла

$$Y_2 = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}}.$$

Сделаем еще замену переменной $t = \frac{a}{2} \operatorname{tg} z$, тогда $dt = \frac{a}{2} \frac{dz}{\cos^2 z}$. При $t = \frac{a}{2}$; $z = \frac{\pi}{4}$ и при $t = -\frac{a}{2}$; $z = -\frac{\pi}{4}$. Будем иметь

$$Y_2 = 2 \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} \rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dz}{\cos^2 z \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{\cos^3 z}} = \frac{2\rho}{a} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos z dz =$$

$$= \frac{2\rho}{a} \sin z \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\rho}{a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{a} \rho.$$

Таким образом

$$Y = 2\sqrt{2}\,\frac{\rho}{a}.$$

в) В силу симметрии притяжения дугой астроиды массы, расположенной в начале координат, проекции равнодействующей на оси координат равны, т. е. $X = Y$. Для нахождения проекции, например, X воспользуемся формулой (10). Поскольку плотность кривой в каждой точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат, то $X = m_0 \int\limits_L \frac{r^3 \cos\theta}{r^2} dl$. Здесь r — расстояние некоторой точки астроиды от начала координат. Учитывая, что $\frac{x}{r} = \cos\theta$ (рис. 16.54) и $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, получим

$$X = m_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3m_0 a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^4 t\,dt = \frac{3}{5} m_0 a^2.$$

10.12. С какой силой ток I, текущий в бесконечном прямолинейном проводнике, действует на точечную магнитную массу m, находящуюся на расстоянии h от проводника.

Решение. Будем определять силу от конечного отрезка проводника при условии, что концы удаляются в разные стороны до бесконечности. Если сам проводник принять за ось x, а ось y провести через заданную точку с магнитной массой m и учесть, что в данном случае $dl = dx$, $r = \sqrt{h^2 + x^2}$, $\sin\alpha = \frac{h}{r}$, то по формуле (11) получим

$$\vec{F} = mI \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h\,dx}{\left(h^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Делая замену $x = h\operatorname{tg} t, \quad dx = \dfrac{hdt}{\cos^2 t}$, получим

$$\vec{F} = mI\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h^2 dt}{h^3 \dfrac{1}{\cos^3 t}\cos^2 t} = \frac{mI}{h}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2mI}{h}.$$

16.11. Поверхностные интегралы

1°. *Поверхностные интегралы первого рода.* Пусть во всех точках M кусочно-гладкой поверхности S определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, возьмем в каждой частичной поверхности по произволу точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим в этой точке значение функции $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$, умножив его на площадь ΔS_i. Сумма таких произведений называется интегральной суммой

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Если существует предел последовательности интегральных сумм при стремлении диаметров всех частей ΔS_i к нулю, который не зависит ни от способа разбиения поверхности S на частичные поверхности, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y, z)dS. \tag{1}$$

Вычисление поверхностного интеграла сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Если поверхность S пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz лишь в одной точке, то уравнение поверхности имеет вид $z = \varphi(x, y)$. Пусть поверхность S проектируется на плоскость Oxy в область D, тогда элемент площади $dD = dS\cos\gamma$, где γ — угол между нормалью к поверхности S и осью Oz

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Таким образом, интеграл (1) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z)\frac{dD}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (2)$$

Аналогично поверхность S проектируется на плоскости Oxz и Oyz. Значение интеграла (2) не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой выполняется интегрирование. Если проекция поверхности S на плоскость Oxy неоднозначна, т. е. прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность в двух или более точках, то при интегрировании следует разбить S на части, каждая из которых проектируется на Oxy однозначно.

2°. *Поверхностные интегралы второго рода.* Разбивая поверхность S на частичные поверхности ΔS_i, проекции которых на плоскость Oxy, соответственно, равны ΔD_i, представим интегральную сумму в виде

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i, \qquad (3)$$

где $f(M_i) = f(x_i,y_i,z_i)$ — значение функции в произвольной точке M_i некоторого частичного элемента поверхности ΔS_i.

Предел этой последовательности (3) при стремлении диаметров всех частей ΔD_i к нулю называется *поверхностным интегралом второго рода*

$$\lim_{\max \Delta D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i = \int\int_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy =$$
$$= \pm\int\int_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy, \qquad (4)$$

распространенным на выбранную сторону поверхности S. Знак плюс соответствует интегрированию по верхней стороне поверхности S, знак минус — интегрированию по нижней стороне. Сторону поверхности, обращенную в сторону положительного направления оси Oz, называют верхней, а в сторону отрицательного направления оси Oz — нижней.

Если проектировать элементы поверхности S на плоскость Oxz и Oyz, то получим два других поверхностных интеграла второго рода

$$\pm\int\int_{S} f(x,y,z)\,dxdz \quad \text{и} \quad \pm\int\int_{S} f(x,y,z)\,dydz.$$

Если сторона поверхности обращена в сторону положительного направления оси Oy, то в первом интеграле берется знак плюс, если в сторону отрицательного направления оси Oy — минус. Во втором интеграле знак, аналогично, определяется по направлению оси Ox.

Объединяя все эти интегралы, нетрудно получить поверхностный интеграл по координатам общего вида

$$\int\int_{S} P(M)\,dxdy + Q(M)\,dxdz + R(M)\,dydz,$$

где $P(M), Q(M), R(M)$ — некоторые функции от (x,y,z), определенные в точках поверхности S.

Если поверхность цилиндрическая и перпендикулярна области интегрирования, то соответствующий поверхностный интеграл по координатам равен нулю.

11.1. Вычислить интегралы: а) $\iint\limits_S xyz\,dS$, где S — часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте; б) $\iint\limits_S x^2y^2dS$, где S — полусфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Решение. а) Данный интеграл относится к поверхностным интегралам первого типа. Из уравнения поверхности находим

$$z=1-x-y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

Проекция поверхности S на плоскость Oxy есть треугольная область, ограниченная прямой $x+y=1$ и осями координат. Следовательно, по формуле (2) будем иметь

$$\iint\limits_S xyz\,dS=\iint\limits_D xy(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1 x(1-x)^3\,dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

б) Находим производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

и дифференциал поверхности

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Проекция сферы на плоскость Oxy есть круг $x^2+y^2=a^2$. Таким образом

$$I=\iint\limits_S x^2y^2dS=a\iint\limits_D\frac{x^2y^2dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, решение сводится к двойному интегралу

$$I = a\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^a\frac{\rho^5 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = \begin{vmatrix} a^2-\rho^2=t^2 \\ \rho d\rho = -tdt \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a}{4}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 2\varphi\right)d\varphi\int_a^0\left(a^2-t^2\right)^2 dt = \frac{\pi a}{4}\cdot\frac{8a^5}{15} = \frac{2\pi a^6}{15}.$$

11.2. Вычислить поверхностные интегралы:

а) $I = \iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S — внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; б) $I = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S — нижняя поверхность круга $x^2+y^2 \le R^2$; в) $I = \iint\limits_S zdxdy$, где S — внешняя поверхность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. а) Искомый интеграл относится к поверхностным интегралам второго типа. Поверхность тетраэдра состоит из четырех треугольников ABC, AOC, ABO и BOC, поэтому вычисляем интеграл по координатам общего вида, соответственно, на три интеграла.

Рассмотрим сначала интеграл по поверхности треугольника ABC. Поскольку интегрирование ведется по верхней стороне треугольника, то интеграл берется со знаком плюс

$$I_1 = \iint\limits_{ABC} xzdxdy + xydydz + yzdxdz =$$

$$= \iint\limits_{ABC} xzdxdy + \iint\limits_{ABC} xydydz + \iint\limits_{ABC} yzdxdz =$$

$$= \int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy + \int_0^1 ydy\int_0^{1-y}(1-y-z)dz + \int_0^1 zdz\int_0^{1-z}(1-x-z)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y)^2 dy + \frac{1}{2}\int_0^1 z(1-z)^2 dz = \frac{1}{8}.$$

Интеграл по поверхности треугольника ABO равен

$$I_2 = \iint\limits_{ABO} xzdxdy + \iint\limits_{ABO} xydydz + \iint\limits_{ABO} yzdxdz = 0,$$

так как $z = 0$ и плоскость ABO перпендикулярна плоскостям Oyz и Oxz.

Интеграл по поверхности треугольника ACO

$$I_3 = \iint\limits_{ACO} xzdxdy + \iint\limits_{ACO} xydydz + \iint\limits_{ACO} yzdxdz = 0,$$

так как плоскость ACO перпендикулярна плоскости Oxy и Oyz и $y = 0$.

Интеграл по поверхности треугольника OBC

$$I_n = \iint\limits_{OBC} xzdxdy + \iint\limits_{OBC} xydydz + \iint\limits_{OBC} yzdxdz = 0,$$

так как плоскость OBC перпендикулярна плоскостям Oxy и Oxz и $x = 0$.

Таким образом, $I = \frac{1}{8}$.

б) Поскольку сторона поверхности, по которой берется интеграл, обращена в сторону, противоположную оси Oz, то интеграл берется со знаком минус

$$I = -\iint\limits_{S} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Проекция поверхности S на плоскость Oxy есть круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Таким образом, при вычислении интеграла следует перейти к полярной системе координат

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\rho d\rho = -\frac{2\pi}{3}R^3.$$

в) Разобьем поверхность эллипсоида плоскостью Oxy на верхнюю и нижнюю части, тогда

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \iint\limits_D zdxdy, \quad I_1 = -\iint\limits_D zdxdy.$

Во втором интеграле $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Учитывая знак минус перед интегралом, который отражает тот факт, что нижняя поверхность эллипсоида обращена в сторону отрицательного направления оси Oz, будем иметь $I_1 = I_2$ и

$$I = 2\iint\limits_D zdxdy = 2c \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

Переходя к обобщенным полярным координатам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\cos\varphi$ и учитывая, что якобиан в этом случае равен $I_0 = ab\rho$, получим

$$I = 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = -4\pi abc \left.\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

16.12. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов

1°. Масса материальной поверхности S

$$m = \iint\limits_S \delta(M)dS, \tag{1}$$

где $\delta(M)$ — поверхностная плотность распределения массы в точке $M(x,y,z)$ поверхности S.

Если проекция D поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, на плоскость Oxy однозначна, то формула (1) принимает вид

$$m=\iint\limits_{D}\delta\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}}\,dxdy. \qquad (2)$$

Аналогично поверхность S может быть спроектирована и на другие координатные плоскости.

2°. Координаты центра тяжести поверхности

$$x_c=\frac{m_{yz}}{m}=\frac{1}{m}\iint\limits_{S}x\delta\left(M\right)dS,\quad y_c=\frac{m_{xz}}{m}=\frac{1}{m}\iint\limits_{S}y\delta\left(M\right)dS,$$

$$z_c=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{1}{m}\iint\limits_{S}z\delta\left(M\right)dS, \qquad (3)$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} — статические моменты поверхности S относительно координатных плоскостей.

3°. Моменты инерции поверхности относительно координатных осей

$$I_x=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)\left(y^2+z^2\right)dS,\quad I_y=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)\left(x^2+z^2\right)dS,$$

$$I_z=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)\left(x^2+y^2\right)dS. \qquad (4)$$

4°. Моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей

$$I_{xy}=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)z^2dS,\quad I_{xz}=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)y^2dS,\quad I_{yz}=\iint\limits_{S}\delta\left(M\right)x^2dS. \qquad (5)$$

5°. Силы притяжения масс, распределенных по поверхности. Если по некоторой поверхности S непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке $M\left(x,y,z\right)$ плотностью $\delta\left(x,y,z\right)$, то проекции на координатные оси полной силы притяжения, с которой притягивается точка $A\left(x_c,y_c,z_c\right)$ единичной массы поверхностью S, согласно закону всемирного тяготения, равны

$$F_x = \iint\limits_S \delta(M)\frac{x-x_c}{r^3}dS, \quad F_y = \iint\limits_S \delta(M)\frac{y-y_c}{r^3}dS, \tag{6}$$

$$F_z = \iint\limits_S \delta(M)\frac{z-z_c}{r^3}dS,$$

где $r=\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2}$ — есть расстояние AM.

6°. Ньютоновский потенциал поля простого слоя, расположенного по поверхности S, с плотностью $\delta(M)$, на точку $A(x_c, y_c, z_c)$ единичной массы, определяется по формуле

$$W = \iint\limits_S \delta(M)\frac{dS}{r}. \tag{7}$$

12.1. Найти массу и координаты центра тяжести : а) однородной параболической оболочки $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$; б) оболочки шара $x^2+y^2+z^2=R^2$ при $z>0$, если ее поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию оболочки.

Решение. а) В случае однородной оболочки формула (2) примет вид

$$m=\iint\limits_S \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

Вычисляя производные z'_x и z'_y, будем иметь

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$$

Проекция оболочки на плоскость Oxy есть круг $x^2+y^2=1$. Переходя к полярной системе координат, получим

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{\pi}{6}\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

В силу симметрии $x_c = y_c = 0$. Координату z_c находим по последней из формул (3)

$$z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_S z dS = \frac{1}{m}\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy.$$

Переходя к полярной системе координат, получим

$$z_c = \frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho d\varphi.$$

Делаем замену $1 + 4\rho^2 = t^2$, $\rho d\rho = \frac{1}{4} t dt$ и переходим к новой переменной интегрирования. При $\rho = 0$, $t = 1$; при $\rho = 1$, $t = \sqrt{5}$. Отсюда

$$z_c = \frac{1}{m}\frac{\pi}{8}\int\limits_1^{\sqrt{5}} \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{1}{m}\frac{\pi}{8}\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15}\right) = \frac{5\left(\sqrt{5} + 1\right)}{2\left(5\sqrt{5} - 1\right)}.$$

б) Поместим начало координат в центре шара, направив ось z по вертикали. Перейдем к сферическим координатам $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, где R — радиус оболочки шара.

Поверхностная плотность в сферических координатах будет $\delta(M) = \sqrt{x^2 + y^2} = R\sin\theta$, а дифференциал поверхности $dS = R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$.

Отсюда по формуле (1) имеем

$$m = \iint\limits_S \delta(M) dS = R^3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

В силу симметрии $x_c = y_c = 0$. Координата z_c равна $z_c = \dfrac{m_{xy}}{m}$, где статический момент m_{xy} будет

$$m_{xy} = \iint\limits_S \delta(M) z dS = R^4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{2\pi R^4}{3}.$$

Таким образом $z_c = \dfrac{4R}{3\pi}$.

12.2. Найти момент инерции боковой поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2 \quad (0 \le z \le h)$ относительно: а) координатной оси Oz; б) координатных плоскостей.

Решение. а) При нахождении момента инерции относительно оси Oz воспользуемся последней из формул (4). Для этого найдем дифференциал поверхности

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy.$$

Отсюда

$$I_z = \sqrt{2} \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Переходя к полярным координатам и учитывая, что область интегрирования D в плоскости Oxy есть круг $x^2 + y^2 = h^2$, будем иметь

$$I_z = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \rho^3 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi h^4.$$

б) Моменты инерции относительно координатных плоскостей находим по формулам (5). Учитывая, что $dS = \sqrt{2} dxdy$, получим

$$I_{xy} = \sqrt{2} \iint\limits_D z^2 dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi h^4,$$

$$I_{xz} = \sqrt{2} \iint\limits_D y^2 dxdy = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int\limits_0^h \rho^3 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi h^4,$$

$$I_{yz}=\sqrt{2}\iint_D x^2dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^h\rho^3d\rho=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi h^4.$$

12.3. Найти притяжение однородной $\rho=1$ боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ точки, расположенной в центре основания, и потенциал поверхности на эту точку, если высота цилиндра равна H.

Решение. Координаты точки центра основания равны $x_c=y_c=z_c=0$. Расстояние от произвольной точки M поверхности цилиндра до точки центра основания $r=\sqrt{a^2+z^2}$. Запишем уравнение поверхности цилиндра в параметрическом виде $x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=z$, тогда дифференциал поверхности $dS=ad\varphi dz$.

В силу симметрии проекции силы притяжения F_x и F_y равны нулю. Проекция силы на ось Oz, согласно последней формуле (6), будет

$$F_z=\iint_S\frac{zdS}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H\left(a^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}zdz=2\pi a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+H^2}}\right).$$

При нахождении потенциала поверхности на центр основания воспользуемся формулой (7)

$$W=\iint_S\frac{dS}{\sqrt{a^2+z^2}}=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H\frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}}=2\pi a\ln\frac{H+\sqrt{a^2+H^2}}{a}.$$

Глава 17
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

17.1. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня

1°. Уравнение $z = f(x, y)$ в каждой точке (x, y) некоторой области определяет значение z, которое называется *полем скаляра* z. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой значение функции остается постоянным. Вдоль каждой из линий $f(x, y) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$, где C_i – постоянные, скаляр z остается постоянным и меняется только при переходе точки (x, y) с одной линии на другую. Эти линии называются изолиниями (изобарами, изотермами и т. д.).

2°. Уравнение $u = F(x, y, z)$ в каждой точке (x, y, z) некоторого трехмерного пространства определяет поле скаляра u. *Поверхностью уровня* функции $u = F(x, y, z)$ называется поверхность $F(x, y, z) = C$, в точках которой значение функции остается постоянным. Поверхности уровней или изоповерхности имеют вид $F(x, y, z) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$ и на каждой из них скаляр u остается постоянным.

Если скалярная функция точки задана выражением $u(M)=u(x_1,x_2,...,x_n)=u(\vec{r})$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки $M(x_1,x_2,...,x_n)$, то в пространстве n измерений ей соответствует семейство гиперповерхностей уровня $u(x_1,x_2,...,x_n)=C_i$.

1.1. Построить линии уровней функции (при $z=0,1,2$):

а) $z=\frac{x^2}{4}+y^2-1$; б) $z=x-y^2$.

Решение. а) Полагая $z=0,1,2$, запишем уравнения соответствующих линий уровня:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=2,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=3.$$

На плоскости Oxy эти линии уровней представляют семейство эллипсов (рис. 17.1), симметричных относительно координатных осей.

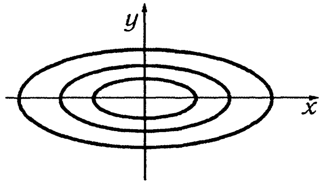

Рис. 17.1

б) Полагая $z=0,1,2$, получим уравнения линий уровня: $y^2=x$, $y^2=x-1$, $y^2=x-2$. На плоскости Oxy эти линии уровней прдставляют параболы, симметричные относительно оси Ox, с вершинами в точках: $x=0$, $x=1$, $x=2$, ветви которых не пересекаются (рис. 17.2).

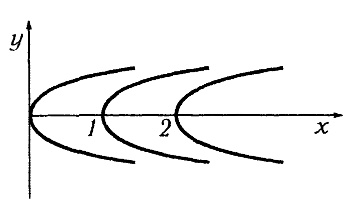

Рис. 17.2

1.2. Найти поверхности уровня функций:

а) $u = x^2 + y^2 - z$; б) $u = x + y + z$; в) $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Решение. а) Полагая $u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим уравнения соответствующих поверхностей уровня:

$$x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 = z \pm 1, \quad x^2 + y^2 = z \pm 2, \ldots$$

В декартовой системе координат $Oxyz$ эти поверхности уровней представляют семейство параболлоидов (рис. 17.3), симметричных относительно оси Oz, с вершинами в точках $z = 0$, $z = \pm 1, \ldots$

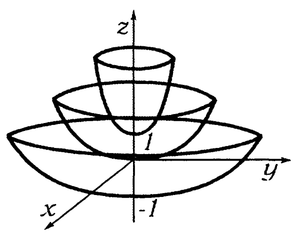

Рис. 17.3

б) Полагая $u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим уравнения поверхностей уровня: $x + y + z = 0$, $x + y + z = \pm 1$, $x + y + z = \pm 2$, которые в пространстве представляют семейство параллельных плоскостей, одинаково наклоненных к координатным осям (рис. 17.4) и отсекающих на координатных осях отрезки, соответственно равные: $x = y = z = 0$, $x = y = z = \pm 1$, $x = y = z = \pm 2, \ldots$

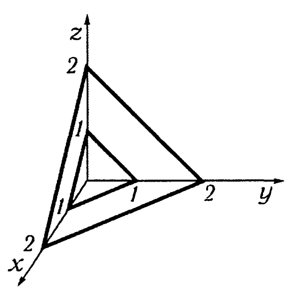

Рис. 17.4

в) Полагая $u = C_i$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ получим уравнения гиперповерхностей уровня $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C_i$, которые в 4-х мерном пространстве представляют 4-мерные сферы.

17.2. Производная в данном направлении. Градиент

1°. Если функция $u = F(x, y, z)$ дифференцируема, то производная в данном направлении $\vec{l}$ определяется по формуле

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = \vec{N} \cdot \vec{l}_0, \tag{1}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$; $\vec{l}_0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направления $\vec{l}$; $\vec{N}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ — нормальный вектор поверхности уровня.

Если точка (x, y, z) перемещается по прямой

$$x = x_0 + l\cos\alpha, \quad y = y_0 + l\cos\beta, \quad z = z_0 + l\cos\gamma$$

со скоростью $\frac{dl}{dt} = 1$, то скаляр $u = F(x, y, z)$ изменяется со скоростью $v = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl}$.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \tag{2}$$

где α — угол между вектором $\vec{l}$ и осью Ox.

Точки, в которых производная функции в любом направлении равна нулю, называются *стационарными точками* этой функции.

2°. *Градиентом скаляра* $u = F(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla F, \tag{3}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ — оператор Гамильтона (набла). Градиент есть вектор скорости наибыстрейшего изменения скаляра u в данной точке. Направление вектора прямо противоположного направлению градиента, т. е. $-\operatorname{grad} u(M_1)$ характеризует наибольшую скорость убывания функции $u(M)$ при переходе точки M через точку M_1. Направление вектора $\operatorname{grad} u$ в некоторой точке M совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня в этой точке.

Производная в направлении вектора $\vec{l}$ и градиент функции связаны формулой

$$\frac{du}{dl} = \text{Пр}_l \operatorname{grad} u,$$

и производная $\frac{du}{dl}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение

$$\left(\frac{du}{dl}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \tag{4}$$

2.1. Дана функция $z = \ln(3x^2 + 2y^3)$ и вектор $\vec{n} = 3\vec{i} + \vec{j}$. **Найти** $\operatorname{grad} z$ в точке $M(-1, 2)$ и производную по направлению вектора $\vec{n}$ в точке M.

Решение. Пользуясь определением градиента, найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{3x^2 + 2y^3}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{3x^2 + 2y^3}$, а также их значения в точке $M: \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\frac{6}{19}$ и $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \frac{12}{19}$. Отсюда $\operatorname{grad} z = -\frac{6}{19}\vec{i} + \frac{12}{19}\vec{j} = \frac{6}{19}\left(-\vec{i} + 2\vec{j}\right)$.

Для определения производной по направлению вектора $\vec{n}$ найдем направляющие косинусы вектора $\vec{n}$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда по формуле (1) будем иметь

$$\left.\frac{dz}{dn}\right|_M = -\frac{6}{19}\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{12}{19}\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{19\sqrt{10}}.$$

2.2. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1,1,1)$ в направлении вектора $\vec{l}\left\{\cos 60^\circ, \cos 60^\circ, \cos 45^\circ\right\}$ и длину $\operatorname{grad} u$ в той же точке.

Решение. Найдем частные производные функции u и их значения в точке M

$$u'_x(M) = 2, \quad u'_y(M) = 2, \quad u'_z(M) = 2.$$

Отсюда производная функции u в направлении вектора $\vec{l}$ в точке M равна $u'_l(M) = 2\cos 60^\circ + 2\cos 60^\circ + 2\cos 45^\circ = 2 + \sqrt{2}$.

Градиент функции u в точке M равен $\operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, а его длина по формуле (4) будет

$$\left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

2.3. Найти наибольшую крутизну поверхности $z^2 = xy$ в точке $M(4,2)$.

Решение. Наибольшая по абсолютной величине крутизна поверхности численно равна модулю градиента функции z в точке M. Для нахождения градиента вычислим частные производные в точке. Полагая $F(x,y,z) = z^2 - xy$, будем иметь

$$z'_x(M) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_M = \left.\frac{y}{2z}\right|_M = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$z'_y(M) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_M = \left.\frac{x}{2z}\right|_M = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\operatorname{grad} z(M) = \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, а его модуль

$$\left|\operatorname{grad} z(M)\right| = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

2.4. Найти производную функции $u = xy + yz + xz$ в точке $M_1(1,2,3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_2(5,5,15)$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{M_1M_2} = (5-1)\vec{i} + (5-2)\vec{j} + (15-3)\vec{k} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{4}{13}, \quad \cos\beta = \frac{3}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

Для определения производной функции u в направлении вектора $\overline{M_1M_2} = \vec{l}$ найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x + y$$

и их значения в точке M_1

$$u'_x(M_1) = 5, \quad u'_y(M_1) = 4, \quad u'_z(M_1) = 3.$$

Таким образом, искомая производная равна

$$\frac{du}{dl} = 5\cdot\frac{4}{13} + 4\cdot\frac{3}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = 5\cdot\frac{3}{13}.$$

2.5. С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u = \ln\left(x^2 - y^2 + z^2\right)$ при переходе точки $M\left(x, y, z\right)$ через точку $M_0\left(1,1,1\right)$?

Решение. Наибольшая по абсолютной величине скорость возрастания функции u при переходе точки M через точку M_0 совпадает с направлением градиента функции u в точке M_0 и численно равна модулю градиента функции в этой точке. Находим частные производные функции и ее градиент в точке M_0

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 - y^2 + z^2};$$

$$u'_x\left(M_0\right) = 2, \quad u'_y\left(M_0\right) = -2, \quad u'_z\left(M_0\right) = 2;$$

$$\operatorname{grad} u\left(M_0\right) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Отсюда наибольшая скорость возрастания функции при переходе точки M через точку M_0 по формуле (4) равна

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

2.6. Найти стационарные точки функции $z = x^3 - 3xy + y^3$.

Решение. В стационарных точках производная функции по любому направлению равна нулю. Для этого необходимо, чтобы все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль. Находим частные производные и приравниваем их нулю

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Решая эту систему уравнений получим две стационарные точки: (0,0) и (1,1).

2.7. Вывести формулы: а) $\operatorname{grad}\left(uv\right) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;

б) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$.

Решение. а) Пользуясь определением градиента будем иметь

$$\operatorname{grad}(uv)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\vec{k}=$$

$$=u\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+v\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+u\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+v\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+u\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}+v\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)=$$

$$=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u.$$

б) Аналогично

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\vec{k}=$$

$$=\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}\vec{i}+\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\vec{j}+\frac{v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\vec{k}=$$

$$=\frac{v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)}{v^2}=$$

$$=\frac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}.$$

2.8. Доказать ортогональность поверхностей уровня полей: $u=x^2+y^2-z^2$ и $v=xz+yz$.

Решение. Будем определять угол между поверхностями углом между нормалями к ним, которые совпадают с направлениями градиентов к поверхностям уровня

$$\operatorname{grad}u=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k},\quad \operatorname{grad}v=z\vec{i}+z\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$$

Из условия ортогональности двух векторов

$$\left(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\right) = 2xz + 2yz - 2z\left(x + y\right) = 0$$

следует ортогональность поверхностей уровня.

2.9. Вычислить $\operatorname{grad} u$, если $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. По определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} u = \frac{x\vec{i}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y\vec{j}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

17.3. Векторное поле. Дивергенция и вихрь векторного поля

1°. *Векторным полем* называется область (плоская или пространственная), каждая точка M которой характеризуется некоторой физической векторной величиной $\vec{a} = \vec{a}\left(M\right) = \vec{a}\left(\vec{r}\right)$, где $\vec{a}$ — векторная фунция точки, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — радиус вектор точки M. В декартовой системе координат вектор $\vec{a}$ равен $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $a_x = a_x\left(x, y, z\right)$, $a_y = a_y\left(x, y, z\right)$, $a_z = a_z\left(x, y, z\right)$ — проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Отсюда следует, что поле векторной величины $\vec{a}$ может быть задано тремя скалярными функциями a_x, a_y, a_z, т. е. ее проекциями на оси координат.

Векторными линиями (силовые линии, линии тока) векторного поля называют кривые, направления которых в каждой точке совпадают с направлением вектора в этой точке. Векторные линии находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{1}$$

Векторное поле, не зависящее от времени t, называется *стационарным*, а зависящее от времени — *нестационарным*.

2°. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}(M)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ называется скаляр

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\equiv\nabla\cdot\vec{a}. \tag{2}$$

Дивергенция может быть представлена в виде суммы следующих скалярных произведений

$$\operatorname{div}\vec{a}=\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}+\vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}. \tag{3}$$

Если вектор $\vec{a}$ характеризует поле скоростей текущей жидкости, то абсолютная величина $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)$ определяет мощность источника или стока. Так если $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)>0$, то точка M_0 называется *источником*, т. е. в любой бесконечно малой окрестности точки M_0 жидкость возникает. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)<0$, то точка M_0 называется *стоком*, т. е. в окрестности точки M_0 жидкость исчезает.

Если в каждой точке поля $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то векторное поле называется *соленоидальным*. В этом случае поток вектора $\vec{a}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

3°. *Вихрем (или ротором)* векторного поля $\vec{a}(M)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}\equiv\nabla\times\vec{a}. \tag{4}$$

Вихрь может быть представлен в виде суммы следующих векторных произведений

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\right]+\left[\vec{j},\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\right]+\left[\vec{k},\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\right]. \qquad (5)$$

Векторное поле, во всех точках которого $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, называется *потенциальным* (безвихревым). В этом случае существует потенциал $U=f(\vec{r})$ — скалярная функция, определяемый из уравнения $dU=a_x dx+a_y dy+a_z dz$, причем $\operatorname{grad}U=\vec{a}$.

Если векторное поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=0$ и оно называется *гармоническим*. Потенциальная функция U в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=0$ или $\Delta U=0$ и называется *гармонической*. Здесь Δ — оператор Лапласа, равный $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

3.1. Найти векторные линии следующих полей:
а) $\vec{a}=x\vec{i}-y\vec{j}$; б) $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{x}+\frac{\vec{j}}{y}+\frac{\vec{k}}{z}$.

Решение. а) Векторное поле плоское, следовательно, векторная линия находится из уравнения

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, будем иметь $\ln x=-\ln y+\ln C$; $x=\frac{C}{y}$, $xy=C$ — семейство гипербол.

б) Составим систему уравнений

$$\frac{dx}{1/x}=\frac{dy}{1/y}=\frac{dz}{1/z} \quad \text{или} \quad xdx=ydy, \quad xdx=zdz.$$

Интегрируя, получим: $x^2-y^2=C_1$, $x^2-z^2=C_2$. Таким образом, векторные линии представляют линии пересечения гиперболических цилиндров двух семейств.

3.2. Найти дивергенцию векторного поля:

а) $\vec{a} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + yz^2\vec{k}$ в точке M (—1, 2, 1);

б) $\vec{r} = yz\left(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}\right)$.

Решение. а) Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат равны: $a_x = x^2 y$, $a_y = xy^2$, $a_z = yz^2$. По определению дивергенции (2) имеем $\operatorname{div}\vec{a} = 2xy + 2xy + 2yz$. Отсюда дивергенция вектора в точке $\operatorname{div}\vec{a}(M) = -4 - 4 + 4 = -4$, т. е. точка M является стоком.

б) По определению дивергенции имеем

$$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 4yz - 2yz - 2yz = 0,$$

т. е. в поле вектора $\vec{r}$ нет ни источников, ни стоков. Данное векторное поле будет соленоидальным.

3.3. Найти $\operatorname{div}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{b} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

Решение. Найдем сначала векторное произведение

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ y & z & x \end{vmatrix} = \left(yx - z^2\right)\vec{i} + \left(yz - x^2\right)\vec{j} + \left(xz - y^2\right)\vec{k}.$$

Отсюда по формуле (2) имеем $\operatorname{div}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = y + z + x$.

3.4. Доказать, что: а) $\operatorname{div}\left(f\vec{a}\right) = f\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} f$;

б) $\operatorname{div}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$.

Решение. а) По определению дивергенции, учитывая, что f скалярная функция, имеем

$$\operatorname{div}\left(f\vec{a}\right) = \frac{\partial\left(fa_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(fa_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(fa_z\right)}{\partial z} = f\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) +$$

$$+ a_x\frac{\partial f}{\partial x} + a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z\frac{\partial f}{\partial z} = f\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} f.$$

б) Воспользуемся формулой (3), тогда

$$\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=$$

$$=\vec{i}\cdot\left(\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial x},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}\right]\right)+\vec{j}\cdot\left(\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial y},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{b}}{\partial y}\right]\right)+$$

$$+\vec{k}\cdot\left(\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial z},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{b}}{\partial z}\right]\right).$$

Учитывая свойства смешанного произведения

$\vec{i}\cdot\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial x},\vec{b}\right]=\vec{b}\cdot\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\right]$; $\vec{i}\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}\right]=-\vec{a}\cdot\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}\right]$ и т. д., получим

$$\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{b}\cdot\left(\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\right]+\left[\vec{j},\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\right]+\left[\vec{k},\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\right]\right)-$$

$$-\vec{a}\cdot\left(\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}\right]+\left[\vec{j},\frac{\partial\vec{b}}{\partial y}\right]+\left[\vec{k},\frac{\partial\vec{b}}{\partial z}\right]\right).$$

Отсюда по формуле (5)

$$\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b},$$

что и требовалось доказать.

3.5. Найти ротор векторных полей а) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$; б) $\vec{a}=x^2yz\vec{i}+xy^2z\vec{j}+xyz^2\vec{k}$.

Решение. а) Здесь $a_x=yz$, $a_y=xz$, $a_z=xy$. Пользуясь формулой (4) получим

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{i}\left(x-x\right)+\vec{j}\left(y-y\right)+\vec{k}\left(z-z\right)=0.$$

б) Здесь $a_x=x^2yz$, $a_y=xy^2z$, $a_z=xyz^2$. По формуле (4) будем иметь

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{i}\left(xz^2-xy^2\right)+\vec{j}\left(x^2y-yz^2\right)+\vec{k}\left(y^2z-x^2z\right)=$$

$$=x\left(z^2-y^2\right)\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\vec{k}.$$

3.6. Найти: а) rot $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$, если $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; б) $\operatorname{rot}\left(\vec{r}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$, если $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Решение. а) Найдем сначала скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+y+z$. Тогда

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}=x(x+y+z)\vec{i}+y(x+y+z)\vec{j}+z(x+y+z)\vec{k}.$$

Отсюда по формуле (4) получим

$$\operatorname{rot}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}.$$

б) Скалярное произведение равно $\vec{r}\cdot\vec{b}=x+y+z$. Отсюда

$$\left(\vec{r}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}=-(x+y+z)\vec{i}+(x+y+z)\vec{j}-(x+y+z)\vec{k}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\operatorname{rot}\left(\vec{r}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}=(-1-1)\vec{i}+(-1+1)\vec{j}+(+1+1)\vec{k}=-2\vec{i}+2\vec{k}.$$

3.7. Является ли функция

$$U=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

гармонической?

Решение. Функция U является гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U=0$. Находя вторые частные производные $\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}=2a_1$, $\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}=2a_2$, $\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}=2a_3$, получим $\Delta U=2\left(a_1+a_2+a_3\right)$. То есть данная функция будет гармонической, если выполняется условие $a_1+a_2+a_3=0$.

3.8. Доказать, что векторное поле вектора $\vec{a}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является гармоническим.

Решение. Векторное поле называется гармоническим, если оно является одновременно соленоидальным $\operatorname{div}\vec{a}=0$ и потенциальным $\operatorname{rot}\vec{a}=0$. Действительно

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^2 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}+$$

$$+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}+$$

$$+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}=$$

$$=\frac{3x^2+3y^2+3z^2-3(x^2+y^2+z^2)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}=0.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{i}\left[-\frac{3yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}+\frac{3yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right]+$$

$$+\vec{j}\left[-\frac{3xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}+\frac{3xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right]+$$

$$+\vec{k}\left[-\frac{3yx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}+\frac{3yx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right]=0.$$

3.9. Доказать, что: а) $\operatorname{rot}\left(f\vec{a}\right)=\left[\operatorname{grad}f,\vec{a}\right]+f\operatorname{rot}\vec{a}$;

б) $\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}+\dfrac{d\vec{a}}{d\vec{b}}-\dfrac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$.

Решение. а) По формуле (5) имеем

$$\operatorname{rot}(f\vec{a})=\left[\vec{i},\frac{\partial(f\vec{a})}{\partial x}\right]+\left[\vec{j},\frac{\partial(f\vec{a})}{\partial y}\right]+\left[\vec{k},\frac{\partial(f\vec{a})}{\partial z}\right]=$$

$$=\left[\vec{i},\left(\vec{a}\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\right)\right]+\left[\vec{j},\left(\vec{a}\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\right)\right]+\left[\vec{k},\left(\vec{a}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right),\vec{a}\right]+f\left(\left[\vec{i},\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\right]+\left[\vec{j},\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\right]+\left[\vec{k},\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\right]\right)=$$

$$=\left[\operatorname{grad}f,\vec{a}\right]+f\operatorname{rot}\vec{a}.$$

б) Векторное произведение есть вектор, т. е.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+$$

$$+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

Проекция ротора этого вектора на ось Ox равна

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)=b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-$$

$$-b_x\frac{\partial a_y}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

Проекция на ось Ox правой части доказываемого равенства равна

$$a_x\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)-b_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+b_x\frac{\partial a_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+$$

$$+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}-a_x\frac{\partial b_x}{\partial x}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}=a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}+a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial y}-$$

$$-b_x\frac{\partial a_z}{\partial z}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}.$$

Легко проверить, что обе эти проекции равны. Аналогично проверяется равенство проекций на оси Oy, Oz, что и доказывает данное выражение.

17.4. Дифференциальные операции 2-го порядка

4.1. Используя векторный смысл оператора Гамильтона ∇, **доказать** дифференциальные операции 2-го порядка:

а) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \nabla(\nabla,\vec{a})$,

б) $\operatorname{div}\operatorname{grad} U = (\nabla,\nabla)U = \nabla^2 U = \Delta U$,

в) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = (\nabla,[\nabla,\vec{a}]) \equiv 0$,

г) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = [\nabla,\nabla]U \equiv 0$,

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = [\nabla,[\nabla,\vec{a}]]$,

е) $\operatorname{div}(\Delta\vec{a}) = \Delta(\operatorname{div}\vec{a})$.

Решение. а) Используя оператор $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ и градиент $\operatorname{grad} f = \nabla f$, будем иметь

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \operatorname{grad}(\nabla,\vec{a}) = \nabla(\nabla,\vec{a}).$$

б) Действительно, используя $(\nabla,\nabla) = \nabla^2 = \Delta$, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

в) Используя выражение $\operatorname{div}\vec{r} = (\nabla,\vec{r})$ и $\operatorname{rot}\vec{a} = [\nabla,\vec{a}]$, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = (\nabla,\operatorname{rot}\vec{a}) = (\nabla,[\nabla,\vec{a}]) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Данная операция приводит к нулю, поскольку мы имеем смешанное произведение компланарных векторов.

г) Действительно

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=\operatorname{rot}(\nabla U)=[\nabla,\nabla]U=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}=0.$$

Данная операция приводит к нулю, поскольку мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов.

д) Поскольку $\operatorname{rot}\vec{a}=[\nabla,\vec{a}]$, то

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}=[\nabla,[\nabla,\vec{a}]].$$

е) Действительно

$$\operatorname{div}(\Delta\vec{a})=\frac{\partial(\Delta a_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta a_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta a_z)}{\partial z}.$$

Используя оператор Лапласа Δ, приведем это выражение к виду

$$\operatorname{div}(\Delta\vec{a})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)=\Delta\operatorname{div}\vec{a}.$$

4.2. Найти: а) $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, если $U=x^3y^2z$; б) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$, если $\vec{a}=x^4\vec{i}+y^4\vec{j}+z^4\vec{k}$; в) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a}=x^2y\vec{i}+y^2z\vec{j}+z^2x\vec{k}$.

Решение. а) Найдем сначала градиент функции $U=x^3y^2z$

$$\operatorname{grad} U=3x^2y^2z\vec{i}+2x^3yz\vec{j}+x^3y^2\vec{k}.$$

Отсюда $\operatorname{div}\operatorname{grad} U=6xy^2z+2x^3z=2xz(3y^2+x^2)$.

б) Найдем сначала дивергенцию вектора $\vec{a}$

$$\operatorname{div}\vec{a} = 4x^3 + 4y^3 + 4z^3.$$

Отсюда градиент

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = 12x^2\vec{i} + 12y^2\vec{j} + 12z^2\vec{k} = 12\left(x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}\right).$$

в) Полагая $a_x = x^2 y$, $a_y = y^2 z$, $a_z = z^2 x$, найдем ротор вектора $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = -y^2\vec{i} - z^2\vec{j} - x^2\vec{k}.$$

Отсюда $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, т. е. векторное поле вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ потенциально.

4.3. Найти: а) $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$; б) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{c}u)$, если $\vec{c}$ — постоянный вектор.

Решение. а) Найдем сначала градиент произведения двух скалярных функций

$$\operatorname{grad}(uv) = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

Дивергенция этого вектора равна

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv) = u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$+ v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$

$$+ v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = u\operatorname{div}\operatorname{grad} v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v\operatorname{div}\operatorname{grad} u.$$

б) Найдем сначала $\operatorname{rot}(\vec{c}u)$, учитывая, что $\vec{c}$ — постоянный вектор $\vec{c} = c\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$

$$\operatorname{rot}(\vec{c}u)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)c\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)c\vec{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)c\vec{k}.$$

Отсюда

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{c}u)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)c\vec{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)c\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)c\vec{k}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)c\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)c\vec{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)c\vec{k}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(c\vec{i}+c\vec{j}+c\vec{k}\right)=$$
$$=\left(c\frac{\partial}{\partial x}+c\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)-\Delta u\vec{c}=$$
$$=(\vec{c},\nabla)\operatorname{grad} u-\Delta u\vec{c}.$$

17.5. Интегралы теории поля и теории потенциала

1°. *Поток вектора.* Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность S называется поверхностный интеграл 2-го рода, который может быть сведен к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$Q=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iint\limits_S a_n dS=\iint\limits_S a_x dydz+a_y dxdz+a_z dxdy=$$
$$=\iint\limits_S\left(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma\right)dS, \qquad (1)$$

где $\vec{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

Вычисление интеграла (1) может быть представлено в виде суммы трех двойных интегралов

$$\iint\limits_{S}(\vec{a},\vec{n})dS=\iint\limits_{S_1}a_x\left(x(y,z),y,z\right)dydz+$$

$$+\iint\limits_{S_2}a_y\left(x,y(x,z),z\right)dxdz+\iint\limits_{S_3}a_z\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy. \qquad (2)$$

где S_1, S_2, S_3 — проекция поверхности S на плоскости Oyz, Oxz, Oxy; переменные $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ находятся из уравнения поверхности S, разрешая его относительно соответствующих координат.

Если вектор $\vec{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости или газа, то поверхностный интеграл определяет количество жидкости или газа, протекающей за единицу времени через поверхность S в заданном направлении. Переход к другой стороне поверхности S меняет направление нормали на противоположное, а следовательно, и знак поверхностного интеграла.

При явном задании поверхности $z=f(x,y)$ элемент площади имеет вид

$$dS=\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\,dxdy, \qquad (3)$$

а направляющие косинусы нормали к поверхности находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{-z_x'}{\pm\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}},\quad \cos\beta=\frac{-z_y'}{\pm\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1_x}{\pm\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (1) выражения (3), (4), находим еще одну формулу для вычисления потока вектора $\vec{a}$ через поверхность

$$Q=\iint\limits_{S}\left[a_x\left(-z'_x\right)+a_y\left(-z'_y\right)+a_z\right]dxdy. \tag{5}$$

Здесь предполагается, что нормаль образует острый угол с осью Oz, следовательно, $\cos\gamma>0$ и в формулах (4) берется знак «+». В случае $\cos\gamma<0$ в формулах (4) следует брать знак «–».

2°. *Формула Остроградского-Гаусса.* Если V — некоторая замкнутая область пространства, ограниченная гладкой поверхностью S, и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны со своими частными производными первого порядка в области V, включая границу S, то справедлива формула Остроградского – Гаусса

$$\iint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{6}$$

Если поверхностный интеграл второго типа заменить поверхностным интегралом первого типа, то формула (2) примет вид

$$\iint\limits_{S}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{7}$$

где α,β,γ — углы между внешней нормалью к поверхности S и координатными осями.

В векторной форме формула Остроградского – Гаусса имеет вид

$$\iint\limits_{S}(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz, \tag{8}$$

где $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ или $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$.

Формула (8) определяет поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S в направлении ее внешней нормали $\vec{n}$.

3°. *Формула Грина.* Пусть L — граница некоторой области S в плоскости Oxy и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны, вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ в области S, включая границу L. В этом случае справедлива формула Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{9}$$

которая преобразует криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру, в двойной интеграл по области S, ограниченный этим контуром. Обход контура L выбирается так, чтобы область S оставалась слева, т. е. против часовой стрелки.

4°. *Формула Стокса.* Если L — некоторый замкнутый контур поверхности S и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S, включая границу L, то справедлива формула Стокса

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz. \tag{10}$$

Следует заметить, что сторона поверхности и направление обхода контура определяются так же, как и в случае формулы Грина. Если в качестве поверхности S взять плоскую область на плоскости Oxy, так что $z = 0$, то формула (10) преобразуется в формулу Грина.

Если поверхностный интеграл второго типа заменить поверхностным интегралом первого типа, то формула Стокса примет вид

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\gamma \right) dS, \tag{11}$$

где $\cos\alpha = \cos\left(\widehat{x\vec{n}}\right)$, $\cos\beta = \cos\left(\widehat{y\vec{n}}\right)$, $\cos\gamma = \cos\left(\widehat{z\vec{n}}\right)$ — направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S.

5°. *Работа поля. Циркуляция вектора.* Работа поля $\vec{a}$ вдоль кривой L определяется интегралом

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz. \tag{12}$$

Если кривая L — замкнутая, то интеграл (12) называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой L, обозначается

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$$

и характеризует вращательную способность поля на контуре L.

Если замкнутая кривая L ограничивает поверхность S, то имеет место формула Стокса, которая в векторной форме примет вид

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, dS \tag{13}$$

и означает, что циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность S, ограниченную этим контуром L.

6°. *Потенциал.* Скалярная величина U называется потенциалом векторного поля $\vec{a}$, если $\operatorname{grad} U = \vec{a}$. Само же векторное поле $\vec{a}$ в этом случае называется потенциальным. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}$ является равенство нулю вихря этого поля $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$. Поскольку

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

то потенциальная функция U с точностью до произвольного постоянного слагаемого определяется линейным интегралом

$$U = \int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_A^B dU = U(B) - U(A). \tag{14}$$

Линейный интеграл не зависит от формы кривой AB и определяется разностью значений потенциального поля в конце и начале пути интегрирования. Поэтому за путь проще всего взять ломаную со звеньями, параллельными координатным осям, а за начальную точку A — начало координат.

5.1. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении внешней нормали.

Решение. Используя формулу (1), имеем

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n})\,dS = \iint_S x^2 dydz - y^2 dxdz + z^2 dxdy.$$

Таким образом, задача сводится к вычислению трех интегралов. Преобразуя эти поверхностные интегралы в двойные по формуле (2), будем иметь

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n})\,dS = \iint_{S_1} x^2 dydz - \iint_{S_2} y^2 dxdz + \iint_{S_3} z^2 dxdy =$$

$$= \iint_{S_1} \left(R^2 - y^2 - z^2\right) dydz - \iint_{S_2} \left(R^2 - x^2 - z^2\right) dxdz +$$

$$+ \iint_{S_2} \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n})\,dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\, d\rho - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\, d\rho +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\, d\rho = \frac{\pi R^4}{8}.$$

5.2. Найти поток векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + z\vec{j} + 2y^3\vec{k}$ через часть поверхности $4x^2 + y^2 = 4 - z$, лежащую в первом октанте $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении нормали, образующей острый угол с осью Oz.

Решение. Для нахождения потока воспользуемся формулой (1). Разрешим уравнение поверхности относительно z и найдем производные

$$z = 4 - 4x^2 - y^2, \quad z'_x = -8x, \quad z'_y = -2y.$$

Элемент площади поверхности и направляющие косинусы нормали к поверхности S находятся по формулам (3), (4). Поверхность S представляет эллиптический параболоид (рис. 17.5).

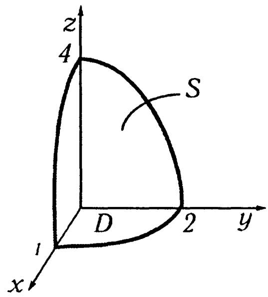

Рис. 17.5

Спроектируем его на плоскость Oxy и рассмотрим четвертую часть D. По условию нормаль образует острый угол с осью Oz, следовательно, $\cos\gamma > 0$ и в формулах (4) перед корнями следует брать знак (+). Расчетная формула примет вид (5). Координаты вектора $\vec{a}$ по условию равны $a_x = xy$, $a_y = z = 4 - 4x^2 - y^2$, $a_z = 2y^3$, отсюда

$$Q = \iint\limits_D \left(8x^2y + \left(4 - 4x^2 - y^2\right)2y + 2y^3\right)dxdy =$$

$$= 8\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} ydy = 4\int_0^1 y^2\Big|_0^{2\sqrt{1-x^2}} dx = 16\int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = \frac{32}{3}.$$

5.3. Найти поток вектора $\vec{a} = z\vec{i} + \frac{1}{6}x\vec{j} + \frac{2}{9}y\vec{k}$ через часть поверхности $x + 2y + 3z = 1$, лежащую в первом октанте $x \geq 0$,

$y \geq 0,\quad z \geq 0$, в направлении нормали, образующей острый угол с осью Oz.

Решение. Воспользуемся формулой (5). Для этого найдем проекции вектора на оси координат: $a_x = z = \frac{1}{3}(1-x-2y)$, $a_y = \frac{1}{6}x,\quad a_z = \frac{2}{9}y$ и производные $z'_x = -\frac{1}{3},\quad z'_y = -\frac{2}{3}$:

$$Q = \iint\limits_{S_{xy}} \left(\frac{1}{3}(1-x-2y)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{9}y \right) dxdy.$$

Проекция поверхности на плоскость Oxy представляет область S_{xy}, ограниченную прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+2y=1$ (рис. 17.6). Отсюда

$$Q = \frac{1}{9}\int_0^1 dx \int_0^{y=\frac{1}{2}(1-x)} dy = \frac{1}{9}\int_0^1 y\Big|_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{18}\left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{36}.$$

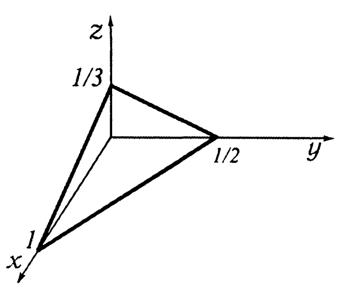

Рис. 17.6

5.4. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через полную поверхность конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{H^2},\quad 0 \leq z \leq H$.

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского – Гаусса (8), тогда

$$\iint\limits_S (\vec{a},\vec{n})dS = \iiint\limits_V \left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz =$$

$$=3\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[\left(x^2+y^2\right)z+\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H}dy=$$

$$=3\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[\left(x^2+y^2\right)\left(H-\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(H^3-\left(\frac{H}{R}\right)^3\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)\right]dy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_S (\vec{a},\vec{n})dS = 3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left[\rho^2\left(h-\frac{H}{R}\rho\right)+\frac{1}{3}\left(H^3-\frac{H^3}{R^3}\rho^3\right)\right]\rho d\rho=$$

$$=6\pi\left(\frac{R^4H}{4}-\frac{H}{R}\frac{R^5}{5}+\frac{H^3}{3}\frac{R^2}{2}-\frac{1}{3}\frac{H^3}{R^3}\frac{R^5}{5}\right)=\frac{3\pi}{5}\left(\frac{1}{2}R^2+H^2\right)HR^2.$$

5.5. С помощью формулы Остроградского – Гаусса **вычислить** $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, взятый по наружной поверхности тетраэдра, образованной плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Сопоставляя данный интеграл с левой частью формулы (6), находим, что $P=x^3$, $Q=y^3$, $R=z^3$. Найдем первые производные $\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z}=3z^2$.

На основании формулы (6) задача сводится к вычислению интеграла

$$3\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=3\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}dy\int\limits_0^{a-x-y}\left(x^2+y^2+z^2\right)dz=$$

$$=3\int_0^a dx\int_0^{a-x}\left(x^2(a-x)-x^2y+y^2(a-x)-y^3+\frac{1}{3}(a-x-y)^3\right)dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^a\left(x^2(a-x)^2+\frac{1}{3}(a-x)^4\right)dx=0,2a^5.$$

5.6. Вычислить $\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$ по внешней поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостью $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте.

Решение. По формуле Остроградского – Гаусса (7), где $P=x,\quad Q=y,\quad R=z$, имеем

$$\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=3\iiint\limits_V dxdydz=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\frac{1}{2}.$$

5.7. Вычислить

$$I=\iint\limits_S\left(x^2\cos\left(\widehat{\vec n,\vec i}\right)+y^2\cos\left(\widehat{\vec n,\vec j}\right)+z^2\cos\left(\widehat{\vec n,\vec k}\right)\right)dS$$

по внешней поверхности параболоида $x^2+y^2+2az=a^2,\quad z=0$, расположенной во втором октанте.

Решение. Согласно формуле (7) обозначим $P=x^2$, $Q=y^2$, $R=z^2$. Найдем производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}=2x,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=2y,\quad \dfrac{\partial R}{\partial z}=2z$. По формуле Остроградского-Гаусса имеем

$$I=2\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz=2\iint\limits_S dxdy\int_0^{\frac{1}{2a}\left(a^2-x^2-y^2\right)}(x+y+z)dz=$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_S\left((x+y)\left(a^2-x^2-y^2\right)+\frac{1}{4a}\left(a^2-x^2-y^2\right)^2\right)dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$I=\frac{1}{a}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int\limits_{0}^{a}\left(a^{2}-\rho^{2}\right)\rho^{2}d\rho+\frac{1}{4a^{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{a}\left(a^{2}-\rho^{2}\right)^{2}d\rho=$$

$$=-\frac{\pi}{16a^{2}}\frac{\left(a^{2}-\rho^{2}\right)^{3}}{3}\Bigg|_{0}^{a}=\frac{\pi a^{4}}{48}.$$

5.8. Вычислить с помощью теоремы Остроградского – Гаусса поток вектора $\vec{a}=\left(y^{2}+z\right)\vec{i}+3y^{2}\vec{j}+6x^{2}y\vec{k}$ в сторону внешней нормали через полную поверхность тела, лежащего в первом октанте $(x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0)$ и ограниченного поверхностью S: $x+2y+2z=2$.

Решение. Поверхность ограничена координатными плоскостями $x=0,\quad y=0,\quad z=0$ и плоскостью $x+2y+2z=2$ (рис. 17.7).

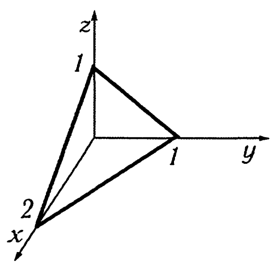

Рис. 17.7

Воспользуемся формулой (8). Находим дивергенцию вектора

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{2}+z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(3y^{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(6x^{2}y\right)=6y.$$

Поверхность S проектируется на плоскость Oxy в область, ограниченную осями Ox, Oy и прямой $x + 2y = 2$. Отсюда

$$Q=\iiint\limits_{V}6ydxdydz=6\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{1-\frac{x}{2}}dy\int\limits_{0}^{1-\frac{x}{2}-y}ydz=6\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{1-\frac{x}{2}}yz\Bigg|_{0}^{1-\frac{x}{2}-y}dy=$$

$$= 6\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} \left(\left(1-\frac{x}{2}\right)y - y^2\right)dy = 6\int_0^2 \left(\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)^3 dx = -\frac{2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

5.9. Проверить формулу Грина для интеграла: а) $\oint\limits_L \left(\dfrac{dx}{y} - \dfrac{dy}{x}\right)$, взятого по контуру $\Delta\ ABC$ с вершинами $A\ (1,1)$, $B\ (2,1)$, $C\ (2,2)$; б) $\int\limits_L (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, взятого по окружности $x^2+y^2=x$.

Решение. а) В данном интеграле $P(x,y)=\dfrac{1}{y}$, $Q(x,y)=-\dfrac{1}{x}$. Частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2}$. Следовательно, по формуле Грина будем иметь

$$\oint_L \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}\right) = \iint_S \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)dxdy.$$

Область интегрирования показана на рис. 17.8 и ограничена прямыми: $y=x$, $x=2$, $y=1$. Найдем двойной интеграл по площади треугольника

$$\iint_S \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dxdy = \int_1^2 dx \int_1^x \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dy = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2}+1\right)dx = \frac{1}{2}.$$

Найдем теперь значение криволинейного интеграла непосредственно по контуру треугольника. Уравнение AB: $y=1$, $dy=0$; уравнение BC: $x=2$, $dx=0$; уравнение CA: $y=x$, $dy=dx$. Отсюда

$$\oint\limits_L \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right) = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = \int\limits_1^2 dx - \int\limits_1^2 \frac{dy}{2} + \int\limits_1^2 \left(\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x} \right) = \frac{1}{2}.$$

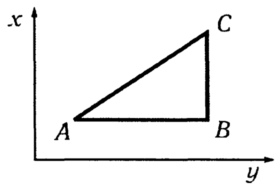

Рис. 17.8

б) В данном интеграле $P = xy + x + y$, $\quad Q = xy + x - y$. Частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 1$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$. По формуле Грина

$$\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint\limits_S (y - x)dxdy.$$

Область интегрирования показана на рис. 17.9. Переходя к полярным координатам, двойной интеграл по области S равен

$$\iint\limits_S (y - x)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\varphi \cos\varphi - \sin^4\varphi \right) d\varphi = -\frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{8}.$$

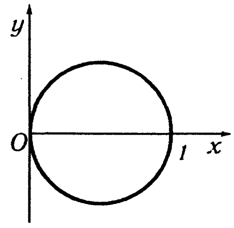

Рис. 17.9

Найдем теперь значение криволинейного интеграла непосредственно. Для этого представим нашу окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ в параметрическом виде $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$. Криволинейный интеграл в этом случае будет

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}(\cos t\sin t+\sin t)+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t\right)\left(-\frac{1}{2}\sin t dt\right)+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}(\cos t\sin t+\sin t)+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin t\right)\frac{1}{2}\cos t dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin^2 t-\cos^2 t\right)dt=-\frac{\pi}{8}.$$

5.10. Показать с помощью формулы Стокса, что $\int\limits_L yzdx+xzdy+xydz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это вычислением интеграла по контуру $\Delta\, OAB$ с вершинами $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,1,0)$ и $B\,(1,1,1)$.

Решение. Согласно формуле Стокса (10) обозначим $P =$ yz, $Q = xz$, $R = xy$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=z,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=x,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=x.$$

Подставляя эти производные в формулу Стокса, получим

$$\int\limits_L yzdx+xzdy+xydz=$$

$$=\iint\limits_S(z-z)dxdy+\iint\limits_S(x-x)dydz+\iint\limits_S(y-y)dxdz=0.$$

Треугольник OAB показан на рис. 17.10. Запишем уравнения его сторон. Уравнение OA: $x = y$, $z = 0$; уравнение AB: $x = 1$, $y = 1$; уравнение OB: $x = y = z$. Представим криволинейный интеграл в виде суммы интегралов

$$\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BO}=\int\limits_{0}^{1}\left(x\cdot 0dx+x\cdot 0dx+x^2d0\right)+\int\limits_{0}^{1}\left(zd0+zd0+dz\right)+$$

$$+\int\limits_{0}^{1}x^2dx+y^2dy+z^2dz=1-1=0.$$

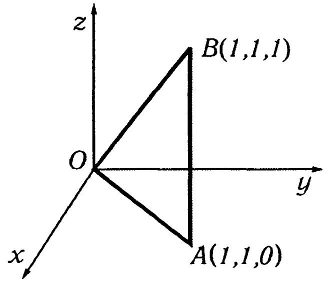

Рис. 17.10

5.11. Применяя формулу Стокса, **найти** интеграл

$$I=\int\limits_{L}xdx+\left(x+y\right)dy+\left(x+y+z\right)dz,$$

где L кривая $x^2+y^2=a^2$, $z=x+y$ и проверить результаты непосредственным вычислением.

Решение. Согласно формуле Стокса (10) обозначим $P=x$, $Q=x+y$, $R=x+y+z$. Найдем производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=1.$$

Тогда по формуле (10) будем иметь

$$\int\limits_{L}xdx+\left(x+y\right)dy+\left(x+y+z\right)dz=\iint\limits_{S}dxdy+\iint\limits_{S}dydz-\iint\limits_{S}dxdz.$$

Найдем первый интеграл в правой части последнего выражения. В сечении цилиндра $x^2+y^2=a^2$ плоскостью $z=x+y$ имеет эллипс, проекция которого на плоскость Oxy есть круг. Тогда в полярной системе координат получим

$$\iint_S dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho = \pi a^2.$$

Проекции сечения цилиндра плоскостью на координатные плоскости Oyz и Oxz, в силу симметрии, будут одинаковые по площади эллипсы. Следовательно, два последних интеграла в сумме равны нулю. Таким образом, $I = \pi a^2$.

При непосредственном вычислении криволинейного интеграла, целесообразно кривую L представить в параметрическом виде

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = a(\cos t + \sin t), \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Значение криволинейного интеграла будет

$$I = -a^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + \int_0^{2\pi} a^2 (\cos t + \sin t)\cos t dt +$$

$$+2a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi a^2.$$

5.12. Найти работу сил поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ при перемещении точки массы m по замкнутой линии, состоящей из: отрезка прямой $x + z = 1$, $y = 0$; отрезка прямой $y + z = 1$, $x = 0$ и четверти окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (рис. 17.11) по направлению стрелки.

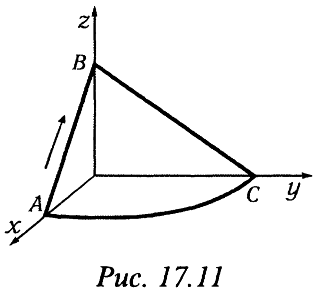

Рис. 17.11

Решение. Воспользуемся формулой (12). Учитывая, что $a_x = xy$, $a_y = yz$, $a_z = xz$, используя уравнения заданных линий, будем иметь

$$\int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} xzdz + \int\limits_{BC} yzdy + \int\limits_{CA} xydx =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-z)zdz + \int\limits_0^1 y(1-y)dy + \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

5.13. Найти циркуляцию вектора: а) $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j}$ вдоль окружности радиуса R с центром в начале координат; б) $\vec{r}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

Решение. а) Поскольку имеет место плоский случай, то воспользуемся формулой Грина

$$\oint\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Учитывая, что $a_x = x^2 - y, \quad a_y = y^2 + x$, и переходя к полярным координатам, получим

$$\oint\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho = 2\pi R^2.$$

б) Воспользуемся формулой (12). Учитывая, что $a_x = x$, $a_y = y, \quad a_z = z$, и используя систему параметрических уравнений винтовой линии, будем иметь

$$\int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_0^{2\pi} a\cos t(-a\sin tdt) + \int\limits_0^{2\pi} a\sin t\, a\cos tdt + \int\limits_0^{2\pi} btbdt = 2\pi^2 b^2.$$

5.14. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + 4x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ по линии $ABCA$ пересечения с координатными плоскостями той части поверхности S: $4x^2 + y^2 = (z-2)^2$, которая лежит в первом октанте. A, B, C — точки пересечения поверхности с координатными осями.

Решение. Сделаем чертеж эллиптического конуса в первом октанте (рис. 17.12). Вычислим циркуляцию непосредственно по определению

$$C=\oint(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=\oint yzdx+4x^2dy+y^2dz.$$

Дуга AB является частью эллипса $4x^2+y^2=4$, здесь $z=0, dz=0$

$$I_{AB}=\int\limits_{AB}4x^2dy=\int\limits_0^2\left(4-y^2\right)dy=\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}.$$

Линия BC является прямой $y=2-z$, здесь $x=0$, $dx=0$

$$I_{BC}=\int\limits_{BC}y^2dz=\int\limits_0^2(z-2)^2\,dz=\left(\frac{(z-2)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Линия CA является прямой $2x+z=2$, здесь $y=0$, $dy=0$ и $I_{CA}=0$.

Таким образом, $C=I_{AB}+I_{BC}=8$.

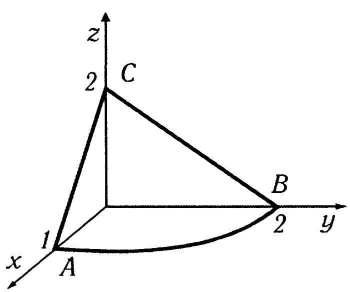

Рис. 17.12

5.15. С помощью теоремы Стокса **найти** циркуляцию вектора $\vec{a}=x^2y^3\vec{i}+2\vec{j}+z^2\vec{k}$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плоскостью $z=0$.

Решение. Сечение L сферы и плоскости есть окружность $x^2+y^2=R^2$. Поскольку $a_x=x^2y^3$, $a_y=2$, $a_z=z^2$, то формула (13) примет вид

$$\oint\limits_L(\vec{a},d\vec{r})=-3\iint\limits_S x^2y^2dxdy.$$

Проекция поверхности сферы на плоскость Oxy есть круг радиуса R. Переходя к полярным координатам, получим

$$\oint\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = -3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R \rho^2\cos^2\varphi\rho^2\sin^2\varphi\rho d\rho =$$

$$= -\frac{3R^6}{6}\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)\right)d\varphi = -\frac{\pi R^6}{4}+\frac{\pi R^6}{8} = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

5.16. Найти по теореме Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$ по линии $ABCA$ пересечения с координатными плоскостями той части поверхности $x^2+9y^2=9-z$, которая лежит в области: $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0$.

Решение. Находим ротор поля

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y^2}{\partial y} - \frac{\partial 2yz}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial y^2}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial 2yz}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{k} = (2y-2y)\vec{i} + \vec{j} = \vec{j}.$$

Поверхность $x^2+9y^2=9-z$ является эллиптическим параболоидом и показана в первом октанте на рис. 17.13.

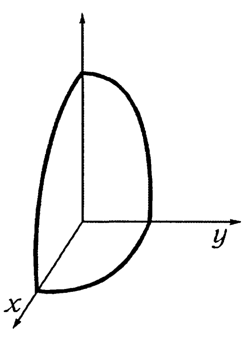

Рис. 17.13

По теореме Стокса

$$C=\iint_S(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,dS=\iint_S\cos\beta\,dS.$$

В данном случае $\cos\beta>0$ и $\cos\beta\,dS=dxdz$. Отсюда

$$C=\iint_{S_{xz}}dxdz=\int_0^3dx\int_0^{9-x^2}dz=\int_0^3 z\Big|_0^{9-x^2}dx=\int_0^3\left(9-x^2\right)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=18.$$

15.17. Найти потенциал поля:

а) $\vec{a}=\left(6xy-xy^2\right)\vec{i}+\left(3x^2-x^2y\right)\vec{j}$; б) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

Решение. а) Поле плоское. Убедимся, что оно потенциально: $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}=\dfrac{\partial a_x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}=6x-2xy$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial y}=6x-2xy$, т. е. $\operatorname{rot}\vec{a}=0$.

За путь интегрирования примем ломаную OAB, где $O\,(0,0)$, $A\,(x,0)$, $B\,(x,y)$. Тогда

$$U=\int_{OAB}(\vec{a},d\vec{r})+C=\int_O^A(\vec{a},d\vec{r})+\int_A^B(\vec{a},d\vec{r})+C,$$

$$(\vec{a},d\vec{r})=\left(6xy-xy^2\right)dx+\left(3x^2-x^2y\right)dy.$$

Поскольку вдоль прямой OA имеем $y=0$, $dy=0$, то

$$\int_O^A(\vec{a},d\vec{r})=0.$$

На прямой AB имеем $dx=0$

$$\int_A^B(\vec{a},d\vec{r})=\int_0^y\left(3x^2-x^2y\right)dy=3x^2y-\frac{x^2y^2}{2}+C.$$

б) Убедимся сначала, что заданное поле потенциально, т. е. $\operatorname{rot}\vec{a}=0$.

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z}=x,\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}=z.$$

За путь интегрирования примем ломаную $OABC$, где $O\,(0,0,0)$, $A\,(x,0,0)$, $B\,(x,y,0)$, $C\,(x,y,z)$. Тогда

$$U = \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) + C = \int_O^A (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_B^C (\vec{a}, d\vec{r}) + C,$$

где $(\vec{a}, d\vec{r}) = yzdx + xzdy + xydz$.

Поскольку вдоль прямой OA имеем $y = 0$, $dy = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, то

$$\int_O^A (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

На прямой AB имеем $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, следовательно,

$$\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

На прямой BC имеем $dx = 0$, $dy = 0$ и

$$\int_B^C (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^z xydz = xyz + C.$$

Таким образом, $U = xyz + C$.

5.18. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (y^2 - z^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - (2xz + 1)\vec{k}$$

а) потенциальным; б) соленоидальным. Если поле потенциально, **найти** его потенциал.

Решение. а) Находим ротор поля

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2xy & -(2xz+1) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-2xz-1)}{\partial y} - \frac{\partial 2xy}{\partial z} \right)\vec{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(y^2 - z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(-2xz-1)}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial 2xy}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - z^2)}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= (-2z + 2z)\vec{j} + (2y - 2y)\vec{k} = 0.$$

Следовательно, поле $\vec{a}$ — потенциально.

б) Найдем дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2x - 2y = 0.$$

Следовательно, поле соленоидально.

Поскольку поле потенциально, то потенциал поля находим по формуле (14), где в качестве пути интегрирования возьмем ломаную $OABM$, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям (рис. 17.14).

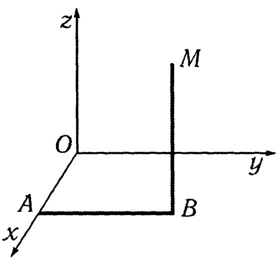

Рис. 17.14

$$U(x,y,z) = \int\limits_{OM} \left(y^2 - z^2\right)dx + 2xydy - (2xz+1)dz = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BM}.$$

На отрезке OA: $y = 0$, $z = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, следовательно

$$I_{OA} = \int\limits_0^x 0 \cdot dx = 0.$$

На отрезке AB: $x = const$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, отсюда

$$I_{AB} = \int\limits_0^y 2xydy = xy^2.$$

На отрезке BM: $x = const$, $y = const$, $dx = 0$, $dy = 0$ и

$$I_{BM} = -\int\limits_0^z (2xz+1)dz = -xz^2 - z + C.$$

Таким образом, $U(x,y,z) = xy^2 - xz^2 - z + C$.

Глава 18
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

18.1. Комплексные числа

1°. *Комплексным числом* называется выражение вида $x + iy$, где x, y — вещественные числа, а i — мнимая единица, степени которой равны: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т. д. Числа x и y называются *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются, соответственно: $x = Re\, z$, $y = Im\, z$.

На плоскости переменных Oxy всякому комплексному числу $z = x + iy$ в соответствие ставится некоторая точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y. Плоскость, на которой изображено комплексное число, называется комплексной плоскостью. Ось Ox — называется *действительной* осью, а ось Oy — *мнимой* осью.

Два комплексных числа называются взаимно-сопряженными, если они отличаются только знаком перед мнимой частью. Так число $x - iy$ является сопряженным числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$. Отсюда следует, что $\bar{\bar{z}} = z$.

2°. Арифметические действия над комплексными числами выполняются по правилам действий над многочленами с заменой степеней числа i их значениями а) $x+0i=x, \quad 0+yi=yi,$

б) $x+yi=x_1+y_1i$, если $x=x_1$ и $y=y_1$,

в) $(x+yi)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i,$

г) $(x+yi)(x_1+y_1i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i.$

3°. *Тригонометрическая форма комплексного числа.* Комплексное число $z = x + iy$ на плоскости изображается точкой $M\ (x, y)$ или радиус-вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ Длина этого вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|z|$, а угол φ, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, называется *аргументом* комплексного числа. Все аргументы числа z отличаются на целые кратные $2\pi k$ $(k=0,1,2,...)$ и обозначаются $\operatorname{Arg} z$. Если значение $\operatorname{Arg} z$ удовлетворяет неравенству $0\le \operatorname{Arg} z<2\pi$, то оно называется главным значением и обозначается $\arg z$. Поскольку $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то $z=x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Рассмотрим некоторые действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

а) $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=$
$=rr_1(\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)).$

б) $\dfrac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=\dfrac{r}{r_1}(\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)).$

в) $(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$

г) $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k=0,1,2,...,n-1.$

Формулы в) и г) называются *формулами Муавра.*

4°. *Показательная форма комплексного числа.* Если воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, то любое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ может быть представлено в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}.$$

Отсюда логарифм комплексного числа будет

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),$$

где φ_0 — значение аргумента φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi_0 \le \pi$. При $k = 0$ получим главное значение логарифма, которое равно $\ln r + i\varphi_0$.

5°. *Алгебраические уравнения.* Уравнение вида

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \ne 0,$$

где a_n — постоянные коэффициенты (в общем случае комплексные), называется алгебраическим уравнением степени n. Число z_0 называется корнем уравнения, если при подстановке его в уравнение последнее тождество удовлетворяется.

Теорема Гаусса. Уравнение степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Если уравнение имеет корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m < n)$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m = n)$, соответственно, то его можно разложить на множители $a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m} = 0$. Если коэффициенты уравнения действительные числа, то комплексному корню $z_0 = x_0 + iy_0$ соответствует сопряженное число $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$, являющееся также корнем этого уравнения, причем корни z_0 и $\bar{z}_0$ одинаковой кратности.

6°. Число a называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если для любого сколь угодно малого положительного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число N, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Если для любого сколь угодно большого положительного числа $M > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > M$, то последовательность комплексных чисел называется сходящейся к бесконечности и записывается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

1.1. Выполнить действия: а) $(3+2i)(2-3i)$; б) $(1-i)^3$; в) $\dfrac{2i}{1+i}$.

Решение. а) Воспользуемся правилом умножения многочленов, тогда получим $(3+2i)(2-3i)=6-9i+4i-6i^2=12-5i$.

б) Возведем в куб, учитывая степени числа i

$$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=-2-2i=-2(1+i).$$

в) Умножим числитель и знаменатель на сопряженное число

$$\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2\frac{1+i}{2}=1+i.$$

1.2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексные числа: а) $z=-2i$; б) $z=-1+i\sqrt{3}$. Изобразить на плоскости.

Решение. а) Найдем сначала модуль и аргумент данного числа. Поскольку $x=0$, $y=-2$, то модуль $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$, а аргумент: $-2=2\sin\varphi$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом:

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right),\quad z=2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Изобразим число на плоскости, откладывая по оси Ox его вещественную часть $\operatorname{Re} z=0$. а по оси Oy мнимую часть $\operatorname{Im} z=-2$ (рис. 18.1).

б) Находим модуль и аргумент:

$$x=-1,\quad y=\sqrt{3},\quad r=\sqrt{1+3}=2,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=-\sqrt{3},\quad \varphi=\frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом: $z=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. На плоскости комплексное число показано точкой М (рис. 18.2).

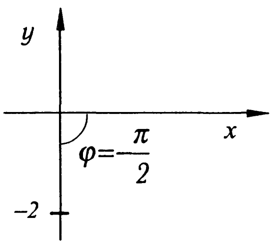

Рис. 18.1

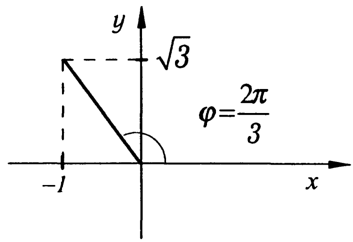

Рис. 18.2

1.3. Найти действительную и мнимую части комплексного числа: а) $z=\dfrac{3\sqrt{3}-i^7}{2\left(\sqrt{3}+2i^3\right)}$; б) $z=\dfrac{8+19i^3}{40}-\dfrac{1-i^5}{2+i}$.

Решение. а) Упростим запись комплексного числа $z=\dfrac{3\sqrt{3}+i}{2\left(\sqrt{3}-2i\right)}$. Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, и выполним очевидные преобразования

$$z=\frac{\left(3\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+2i\right)}{2\left(\sqrt{3}-2i\right)\left(\sqrt{3}+2i\right)}=\frac{9+6\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-2}{2(3+4)}=\frac{7\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\cdot 7}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Отсюда, $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Упростим запись комплексного числа $z=\dfrac{8-19i}{40}-\dfrac{1-i}{2+i}$. Умножим числитель и знаменатель второй дроби на число, сопряженное знаменателю

$$z=\frac{8-19i}{40}-\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8-19i}{40}-\frac{2-i-2i-1}{4+1}=$$

$$=\frac{8-19i}{40}-\frac{1-3i}{5}=\frac{8-19i-8+24i}{40}=\frac{5i}{40}=\frac{1}{8}i.$$

Отсюда, $\operatorname{Re} z = 0, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{8}$.

1.4. По формуле Муавра **вычислить**: а) $(-1+i)^5$;

б) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$.

Решение. а) Представим данное число в тригонометрическом виде:

$$x=-1, \quad y=1, \quad r=\sqrt{2}, \quad \varphi=\frac{3\pi}{4}, \quad (-1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Возведем теперь его в пятую степень

$$(-1+i)^5 = 2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4(1-i).$$

б) Преобразуем данное выражение следующим образом

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\frac{27}{64}\left(\sqrt{3}+i\right)^6.$$

Представим комплексное число в круглых скобках в тригонометрическом виде:

$$x=\sqrt{3}, \quad y=1, \quad r=2, \quad \varphi=\frac{\pi}{6}, \quad \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Отсюда $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=27(\cos\pi+i\sin\pi)=-27.$

1.5. Найти: а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Решение. а) Запишем подкоренное значение числа в тригонометрическом виде:

$$x=-1, \quad y=0, \quad r=1, \quad \varphi=\pi, \quad -1=1(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Отсюда по формуле Муавра получим

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right);\quad k=0,1,2,3;$$

$$\sqrt[4]{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm1\pm i).$$

б) Комплексное число под знаком корня запишем в тригонометрическом виде: $x=-2$, $y=2$, $r=2\sqrt{2}$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, $-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Отсюда по формуле Муавра

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

получим три значения, соответственно:

$$k=0:\frac{\sqrt[6]{8}\sqrt{2}}{2}(1+i)=1+i,$$

$$k=1:\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{5\pi}{12}+i\cos\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$k=2:\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$$

1.6. Решить уравнения: а) $x^3+8=0$; б) $z^4+4z^2+3=0$.

Решение. а) Поскольку уравнение третьей степени, то оно имеет три корня:

$$x=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

При $k=0$, $x_1=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$;

при $k=1$, $x_2=2(-1+i0)=-2$;

при $k=2$, $x_3=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$.

б) Обозначим $z^2=w$, тогда $w^2+4w+3=0$, корни этого уравнения $w_1=-1$, $w_2=-3$ и заданное уравнение примет вид $(z^2+1)(z^2+3)=0$. Откуда $z_{1,2}=\pm i$; $z_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$.

1.7. Решить систему

$$\begin{cases} (2+i)z_1+(2-i)z_2=6, \\ (3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8. \end{cases}$$

Решение. Учитывая, что числа z_1 и z_2 комплексные числа, запишем заданную систему в виде

$$\begin{cases} (2+i)(x_1+iy_1)+(2-i)(x_2+iy_2)=6, \\ (3+2i)(x_1+iy_1)+(3-2i)(x_2+iy_2)=8 \end{cases}$$

и перемножим скобки

$$\begin{cases} 2x_1+2iy_1+ix_1-y_1+2x_2+2iy_2-ix_2+y_2=6, \\ 3x_1+3iy_1+2ix_1-2y_1+3x_2+3iy_2-2ix_2+2y_2=8. \end{cases}$$

Приравнивая в обоих уравнениях действительные и мнимые части, получим систему из четырех уравнений

$$\begin{gathered} 2x_1-y_1+2x_2+y_2=6, \\ x_1+2y_1-x_2+2y_2=0, \\ 3x_1-2y_1+3x_2+2y_2=8, \\ 2x_1+3y_1-2x_2+3y_2=0. \end{gathered}$$

При решении этой системы воспользуемся формулами Крамера. Сначала найдем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Отсюда неизвестные

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$y_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$y_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом, искомые числа будут $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 2 - i.$

1.8. Вычислить сумму

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi, \quad \varphi \neq 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Решение. Поскольку $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то $\sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$, $\sin 2\varphi = \operatorname{Im} e^{i2\varphi}, \ldots$ Таким образом, сумма будет равна

$$S = \operatorname{Im} e^{i\varphi} + \operatorname{Im} e^{i2\varphi} + \ldots + \operatorname{Im} e^{in\varphi} = \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right).$$

Обозначая $q = e^{i\varphi}$, воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии $S = \dfrac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$, тогда получим

$$S=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}\left(1-e^{in\varphi}\right)}{1-e^{i\varphi}}=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi+i\frac{\varphi}{2}n}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}.$$

На основании формул Эйлера сумму можно записать в виде

$$S=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{\varphi}{2}+i\frac{\varphi}{2}n}=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{\varphi}{2}(1+n)}=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{1+n}{2}\varphi.$$

1.9. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-in^2}{1+in^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i^n}{2n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{i^k}{5^k}$; г) $z_n=1+z+\ldots+z^n$, $|z|<1$.

Решение. а) Предел представляет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому разделим числитель и знаменатель на n^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-in^2}{1+in^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-i}{\frac{1}{n^2}+i}=\frac{-i}{i}=-1.$$

б) Поскольку $\left|i^n\right|=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i^n}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{2n}\right)=1.$

в) Данный предел представляет предел суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $q=\frac{i}{5}$. Таким образом

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{5^k}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{i}{5}}=\frac{5(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{5}{26}(5+i).$$

г) Поскольку $|z|<1$, то члены суммы представляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Сумма членов при $n \to \infty$, соответственно, равна $S = \frac{1}{1-z}$, где z — знаменатель прогрессии.

18.2. Функции комплексной переменной

1°. Если каждой комплексной переменной $z = x + iy$, принадлежащей области D, можно поставить в соответствие одно или несколько значений другой комплексной переменной $w = u + iv$, то переменную w называют функцией z в области D и обозначают $w = f(z)$.

Поскольку комплексное число z задается двумя действительными числами x и y, а комплексное число w двумя действительными числами u и v, то переменные u и v являются функциями x и y, т. е. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Область D, ограниченная замкнутой не пересекающейся линией L, называется односвязной (рис. 18.3). Область, ограниченная двумя замкнутыми не пересекающимися линиями (рис. 18.4), называется двухсвязной и т. д.

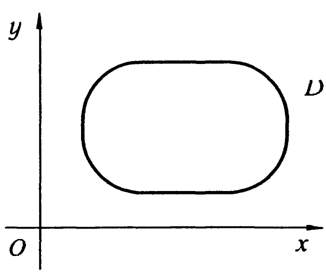

Рис. 18.3

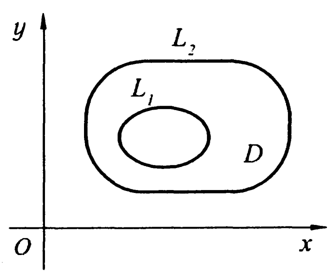

Рис. 18.4

Число $A \neq \infty$ называется пределом функции $w = f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Предел функции принято обозначать $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Если для любого $R > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(z)| > R$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

2°. Если воспользоваться известными разложениями

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \\ \sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

то нетрудно заметить, что для функции комплексного переменного справедлива формула

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z, \tag{2}$$

которая называется *формулой Эйлера*.

Из формулы Эйлера следуют выражения

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3}$$

Пользуясь формулой (2), можно записать

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{4}$$

Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{5}$$

выражаются через тригонометрические функции по формулам

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz. \quad (6)$$

Фунции z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ имеют обратные функции $z^{\frac{1}{n}}$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, вообще говоря, многозначные.

Логарифмическую функцию

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \quad (7)$$

где $\ln|z| + i\arg z = \ln z$ — *главное значение логарифмической функции*, можно представить в виде

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i. \quad (8)$$

2.1. Найти значение функции: а) $w = z^3 - z$ при $z = 1 + i$; б) $w = e^z$ при $z = \frac{\pi}{2}i$.

Решение.

а) Имеем $w = (1+i)^3 - (1+i) = 1 + 3i - 3 - i - 1 - i = -3 + i$.

б) По формуле (2) $w = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

2.2. Дана функция $f(z) = x^2 - yi$, где $z = x + yi$. **Найти**: а) $f(1-i)$; б) $f(i)$.

Решение. а) Имеем $x = 1$, $y = -1$. Подставляя в функцию, получим $f(1-i) = 1 + i$.

б) Аналогично $x = 0$, $y = 1$ и $f(i) = -i$.

2.3. Какие линии заданы уравнениями а) $z = 2\cos t + i\sin t$; б) $z = t + \frac{i}{t}$.

Решение. а) Поскольку $z = x + yi$, то $x = 2\cos t$, $y = \sin t$. Исключая отсюда параметр t, получим $\frac{x^2}{4} = \cos^2 t$, $y^2 = \sin^2 t$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, т. е. кривая представляет эллипс.

б) Имеем $x=t$ и $y=\frac{1}{t}$, откуда $y=\frac{1}{x}$ — уравнение гиперболы.

2.4. Найти область однолистности функции $w=z^2$.

Решение. Пусть $z_1 \neq z_2$, а $z_1^2=z_2^2$. Запишем последнее равенство в показательной форме $r_1^2 e^{2i\varphi_1}=r_2^2 e^{2i\varphi_2}$. Отсюда модули равны $r_1=r_2$, а аргументы связаны соотношением $2\varphi_1=2\varphi_2+2k\pi$ $(k=0,1,\ldots)$. Поскольку $z_1 \neq z_2$, то $\varphi_1=\varphi_2+\pi$, т. е. аргументы отличаются друг от друга на π. Таким образом, областью однолистности будет любая полуплоскость.

2.5. Найти: а) $\cos i$; б) $\sin(2-i)$; в) $\operatorname{ch}(1+3i)$.

Решение. а) Используя первую из формул (3), имеем

$$\cos i=\frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}=\frac{e^{-1}+e}{2}=\operatorname{ch} 1.$$

б) Используя вторую из формул (3) и формулы (4), находим

$$\sin(2-i)=\frac{e^{2i+1}-e^{-2i-1}}{2i}=\frac{ee^{2i}-e^{-1}e^{-2i}}{2i}=$$

$$=\frac{e(\cos 2+i\sin 2)-e^{-1}(\cos 2-i\sin 2)}{2i}=$$

$$=\frac{\cos 2\left(e-e^{-1}\right)+i\sin 2\left(e+e^{-1}\right)}{2i}=$$

$$=\sin 2\frac{e+e^{-1}}{2}-i\cos 2\frac{e-e^{-1}}{2}=\sin 2\operatorname{ch}1-i\cos 2\operatorname{sh}1.$$

в) Имеем

$$\operatorname{ch}(1+3i)=\frac{e^{1+3i}+e^{-(1+3i)}}{2}=\frac{1}{2}\left(e(\cos 3+i\sin 3)+e^{-1}(\cos 3-i\sin 3)\right)=$$

$$=\cos 3\frac{e+e^{-1}}{2}+i\sin 3\frac{e-e^{-1}}{2}=\cos 3\operatorname{ch}1+i\sin 3\operatorname{sh}1.$$

2.6. Найти: а) $\operatorname{Ln}(1-i)$ и $\ln(1-i)$; б) i^{1+i}; в) 3^i.

Решение. а) Обозначим $1-i=z$ и найдем модуль и аргумент $r=|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{\pi}{4}$.

Отсюда по формуле (7)

$$\operatorname{Ln}(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right),$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Учитывая, что $\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$, из формулы (8) получим главное значение

$$\ln(1-i)=\operatorname{Ln} z-2k\pi i=\frac{1}{2}\ln 2+i\arg z=\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}.$$

б) Пользуясь свойствами логарифма, имеем

$$i^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln} i}=e^{(1+i)\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}=$$

$$=e^{Lni}e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}=ie^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

в) Имеем

$$3^i=e^{i\operatorname{Ln}3}=e^{i(\ln 3+2k\pi i)}=e^{i\ln 3}e^{-2k\pi}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+i\sin\ln 3),$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

18.3. Производная функции комплексного переменного

1°. Производной функции комплексного переменного $w=f(z)$ в точке z называется предел отношения приращения функции Δw к приращению независимой переменной $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ при стремлении Δz к нулю по любому закону и обозначается

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{1}$$

Функция $w=f(z)$, имеющая производную в данной точке $z\in D$, называется *дифференцируемой* в этой точке. Если функция $f(z)$ дифференцируема и имеет непрерывную производную в каждой точке области D, то она называется *аналитической* (регулярной) в области D. Функция $f(z)$ аналитическая в точке $z_0\in D$ является аналитической и в некоторой окрестности этой точки.

Если функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической в области D и в каждой точке $z\in D$ существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$, то эти производные удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

которые называют *условиями Коши – Римана.*

Условия Коши – Римана являются необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $w=f(z)$ в точке $z\in D$.

В полярных координатах условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{3}$$

Производная функции $w=f(z)$ выражается через частные производные функций u, v по формулам, соответственно

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \qquad (5)$$

2°. Формулы дифференцирования и ряд свойств, характерных для функций действительной переменной без изменения переносятся и на функции комплексной переменной.

Если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции в области D, то имеют место формулы

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z);$$

$$(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z)\neq 0.$$

Производные элементарных функций находятся по следующим формулам

$$(z^n)'=nz^{n-1}, \qquad (\arcsin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(e^z)'=e^z, \qquad (\arccos z)'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}, \qquad (\operatorname{arctg} z)'=\frac{1}{1+z^2},$$

$$(\sin z)'=\cos z, \qquad (\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,$$

$$(\cos z)'=-\sin z, \qquad (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z.$$

3°. Действительная и мнимая части аналитической в некоторой области D функции $f(z)=u+iv$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, называются *сопряженной парой гармонических функций*.

Аналитическая функция с точностью до постоянной (комплексной) определяется по своей действительной или мнимой части. Например, если $u(x, y)$ действительная часть аналитической в области D функции, то мнимая часть

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx+u'_x dy, \qquad (6)$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка в области D.

Если $v(x,y)$ мнимая часть, то действительная часть будет

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -v'_x dy+v'_y dx. \qquad (7)$$

3.1. Выяснить, являются ли аналитическими функции: а) $f(z)=e^{3z}$; б) $w=z\operatorname{Re}z$; в) $f(z)=z^5$; г) $w=\operatorname{Ln}z$; д) $w=\overline{z}$. **Найти** производные.

Решение. а) Представим функцию в виде

$$e^{3z}=e^{3(x+iy)}=e^{3x}(\cos 3y+i\sin 3y),$$

откуда

$$u(x,y)=e^{3x}\cos 3y, \quad v(x,y)=e^{3x}\sin 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=3e^{3x}\cos 3y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3e^{3x}\sin 3y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=3e^{3x}\sin 3y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=3e^{3x}\cos 3y.$$

Поскольку условия (2) выполнены, то функция дифференцируема. Производную находим по формуле (4)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3e^{3x}\cos 3y+i\,3e^{3x}\sin 3y=$$

$$=3e^{3x}(\cos 3y+i\sin 3y)=3e^{3(x+iy)}=3e^{3z}.$$

Производная может быть найдена и иначе:

$$f'(z)=\left(e^{3z}\right)'_z=3e^{3z}.$$

б) Представим функцию в виде

$$w = u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy,$$

откуда

$$u = x^2, \quad v = xy, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Условия (2) не выполняются за исключением только точки $x = 0$, $y = 0$, следовательно, функция дифференцируема только в точке $z = 0$.

в) Полагая $z = re^{i\varphi}$, получим

$$f(z) = z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = r^5 \cos 5\varphi + ir^5 \sin 5\varphi,$$

откуда

$$u = r^5 \cos 5\varphi, \quad v = r^5 \sin 5\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 5r^4 \cos 5\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -5r^5 \sin 5\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 5r^4 \sin 5\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 5r^5 \cos 5\varphi.$$

Поскольку условия (3) выполнены, функция дифференцируема. По формуле (5) имеем

$$f'(z) = (z^5)' = \frac{r}{z}\left(5r^4 \cos 5\varphi + i\, 5r^4 \sin 5\varphi\right) =$$

$$= \frac{5r^5}{z}(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \frac{5z^5}{z} = 5z^4.$$

г) Имеем $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, откуда

$$u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1.$$

Поскольку условия (3) выполнены, то по формуле (5) получим $w' = (\operatorname{Ln} z)' = \frac{r}{z}\frac{1}{r} = \frac{1}{z}$.

д) Имеем $w = u + iv = x - iy$, откуда

$$u = x, \quad v = -y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Поскольку условия (2) не выполнены, функция не дифференцируема.

3.2. Найти производные: а) $f(z) = z^2 e^{-z}$; б) $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

Решение. а) Функция $f(z)$ представляет произведение двух аналитических на всей плоскости функций, поэтому воспользуемся формулами пункта 2°.

$$f'(z) = 2ze^{-z} + z^2\left(-e^{-z}\right) = ze^{-z}(2 - z).$$

б) Функция $f(z)$ представляет частное двух аналитических на всей плоскости функций за исключением точек πk, $k \in Z$. Производная по формулам пункта 2° будет $f'(z) = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

3.3. Дана мнимая часть $v(x, y) = e^x \sin y$ дифференцируемой функции $f(z)$. **Найти** эту функцию.

Решение. Находим производные $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$.

Из условий Коши-Римана имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y. \tag{8}$$

Интегрируя по x первое из этих выражений, получим

$$u = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция. Для определения функции $\varphi(y)$ продифференцируем функцию u по y и сравним с (8)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y + \varphi'(y) = -e^x \sin y.$$

Отсюда $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi(y) = C$.

Следовательно, $u = e^x \cos y + C$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$f(z) = u + iv = e^x \cos y + C + ie^x \sin y =$$
$$= e^x (\cos y + i \sin y) + C = e^z + C.$$

3.4. Дана действительная часть функции

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

Проверить гармоничность функции и найти аналитическую функцию.

Решение. Проверим сначала гармоничность заданной функции. Вычисляя производные, имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ на всей плоскости. Следовательно, $u(x, y)$ — функция гармоническая.

Для отыскания мнимой части воспользуемся формулой (6)

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -(-2y + x)dx + (2x + y)dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} (2y_0 - x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} (2x + y)dy = 2xy_0 - \frac{x^2}{2} - 2x_0 y_0 - \frac{x_0^2}{2} + 2xy +$$

$$+ \frac{y^2}{2} - 2xy_0 - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy - 2x_0 y_0 - \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + C.$$

Отсюда

$$f(z) = x^2 - y^2 + xy + \left[-\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + C\right]i =$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 - \frac{1}{2}x^2 i + xy + \frac{1}{2}y^2 i + Ci =$$

$$= (x + iy)^2 - \frac{1}{2}i(x^2 + 2xyi - y^2) + Ci = z^2 - \frac{1}{2}z^2 i + Ci.$$

18.4. Интеграл от функции комплексной переменной

1°. Пусть L — произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая в области D. Граничные точки кривой обозначим z_0 и z_n. Разобьем дугу L произвольным способом на n элементарных дуг точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$ и составим сумму

$$S_n = f(z_0)\Delta z_0 + f(z_1)\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\Delta z_{n-1},$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю при $n \to \infty$, называется интегралом функции $f(z)$ по дуге L и обозначается

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{|\Delta z_k|_{\max} \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k. \tag{1}$$

Основные свойства интеграла от функции комплексной переменной аналогичны свойствам интегралов от функций действительного переменного:

1) $\int_L (f_1(z) \pm f_2(z))\,dz = \int_L f_1(z)\,dz \pm \int_L f_2(z)\,dz,$

2) $\int_L \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_L f(z)\,dz,$

где α — действительная или комплексная постоянная,

3) если дуга $\bar{L}$ совпадает с дугой L, но имеет противоположное направление, то $\int_{\bar{L}} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz,$

4) если дуга L состоит из дуг $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)\,dz.$$

Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то интеграл сводится к двум криволинейным интегралам 2-го рода от функций действительных переменных

$$\int_L f(z)dz=\int_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_L v(x,y)dx+u(x,y)dy. \quad (2)$$

Если дуга L задана параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, причем $z(t)=x(t)+iy(t)$, то интеграл по комплексному аргументу вычисляется по формуле

$$\int_L f(z)dz=\int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)dt. \quad (3)$$

2°. *Теорема Коши.* Если $f(z)$ является аналитической функцией в некоторой односвязной области D, то интеграл по любому замкнутому контуру l равен нулю

$$\oint_l f(z)dz=0. \quad (4)$$

Пусть $f(z)$ аналитическая функция в многосвязной области D, ограниченной замкнутым контуром L. Рассмотрим n замкнутых контуров $l_1,l_2,...,l_n$, расположенных внутри L таких, что каждый из них лежит вне остальных. Теорема Коши в многосвязной области примет вид

$$\oint_L f(z)dz=\oint_{l_1} f(z)dz+\oint_{l_2} f(z)dz+...+\oint_{l_n} f(z)dz. \quad (5)$$

3°. Пусть L гладкая или кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D и соединяющая точки z_0 и z, где z_0 некоторая фиксированная точка. Тогда выражение $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$ является функцией от z аналитической в области D, причем $\Phi'(z)=f(z)$.

Как и для действительных функций, выражение $\Phi(z)+C$, где C — произвольная постоянная, называется *первообразной* функцией или *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$.

Если $F(z)$ — одна из первообразных для функции $f(z)$, то имеет место формула Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma = F(z)-F(z_0). \tag{6}$$

При вычислении первообразной функции используются обычные формулы интегрирования.

4°. *Интегральная формула Коши.* Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D. Если точка $z_0 \in D$ лежит внутри замкнутого контура $l \subset D$, то справедлива формула

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{7}$$

5°. Производные высших порядков от аналитической функции $f(z)$ в области D находятся по формуле

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma. \tag{8}$$

Из аналитичности функции в некоторой точке следует и аналитичность производных.

4.1. Вычислить $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz$, если L прямолинейный отрезок, соединяющий начало координат с точкой 1 + *i*.

Решение. Уравнение отрезка, проходящего через точки 0 и $1+i$, в параметрическом виде имеет вид $x=t$, $y=t$, где параметр t изменяется от 0 до 1. Уравнение отрезка в комплексной форме $z=(1+i)t$.

Отсюда $\operatorname{Im} z = t$, $dz=(1+i)dt$. По формуле (3) получим

$$\int_L \operatorname{Im} z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

4.2. Вычислить $\int\limits_L |z|dz$, если L верхняя полуокружность $|z|=1$ с обходом против часовой стрелки.

Решение. Поскольку $z=x+iy$, то имеем

$$\int\limits_L |z|dz=\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+i\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dy.$$

Уравнение кривой L в параметрическом виде будет $x=\cos t$, $y=\sin t$, где $0\le t\le\pi$. Учитывая, что $dx=-\sin t dt$, $dy=\cos t dt$ и $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ в точках кривой, получим

$$\int\limits_L |z|dz=-\int\limits_0^\pi \sin t dt+i\int\limits_0^\pi \cos t dt=\cos t\Big|_0^\pi+i\sin t\Big|_0^\pi=-2.$$

4.3. Вычислить $\int\limits_L f(z)dz$, если $f(z)=\left(y^2+x\right)+x^2i$, L — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A=2-i$ и $z_B=3+2i$.

Решение. Поскольку имеем $u=y^2+x$, $v=x^2$, то по формуле (2)

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L\left(y^2+x\right)dx-\int\limits_L x^2dy+i\int\limits_L x^2dx+\left(y^2+x\right)dy.$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию двух криволинейных интегралов второго рода. Для их вычисления составим уравнение прямой AB:

$$\frac{y+1}{2+1}=\frac{x-2}{3-2},\quad y=3x-7,\quad x=\frac{1}{3}(y+7).$$

Откуда $dy=3dx$, $dx=\frac{1}{3}dy$ и

$$\int\limits_L f(z)dz=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}\left[y^2+\frac{1}{3}(y+7)\right]dy-3\int\limits_2^3 x^2dx+i\int\limits_2^3 x^2dx+$$

$$+i\int_{-1}^{2}\left[y^2+\frac{1}{3}(y+7)\right]dy=\frac{1}{9}\left(y^3+\frac{y^2}{2}+7y\right)\Bigg|_{-1}^{2}-x^3\Bigg|_{2}^{3}+$$

$$+i\frac{x^3}{3}\Bigg|_{2}^{3}+\frac{i}{3}\left(y^3+\frac{y^2}{2}+7y\right)\Bigg|_{-1}^{2}=-\frac{31}{2}+\frac{82}{3}i.$$

4.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{i}^{1-i} z^2dz.$

Решение. Поскольку подынтегральная функция z^2 аналитическая, то по формуле (6) будем иметь

$$\int\limits_{i}^{1-i} z^2dz=\frac{1}{3}z^3\Bigg|_{i}^{1-i}=\frac{1}{3}\left[(1-i)^3-i^3\right]=\frac{1}{3}(1-3i-3+i+i)=-\frac{2+i}{3}.$$

4.5. Вычислить $\int\limits_L \frac{dz}{z+3}$, если L — эллипс $x=2\cos t,\;\; y=\sin t.$

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z+3}$ является аналитической в области, ограниченной этим эллипсом, поэтому по формуле (4) $\oint\limits_L \frac{1}{z+3}=0.$

4.6. Вычислить $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z dz}{z+i}.$

Решение. В области, ограниченной окружностью $|z|=2$, подынтегральная функция не будет аналитической, т.к. в точке $z=-i$ терпит разрыв. Функция $f(z)=\sin z$ внутри круга аналитична. Используя формулу (7), получим

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z dz}{z+i}=\oint\limits_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{z+i}=2\pi i f(-i)=$$

$$=-2\pi i\sin i=-2\pi i\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}=\pi\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

4.7. Вычислить $\int\limits_L \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$, если L — замкнутый контур, однократно обходящий точку $z=-1$.

Решение. Воспользуемся формулой (8), полагая $f(\varsigma)=e^z$. Тогда получим

$$\int\limits_L \frac{e^z dz}{(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2 e^z}{dz^2} = \pi i\left(e^z\right)_{z=-1} = \frac{\pi i}{e}.$$

4.8. Вычислить $\int\limits_L \frac{dz}{(z-1)^4 (z+1)^4}$, если L — замкнутый контур, однократно обходящий точку $z=1$.

Решение. Полагая $f(\varsigma)=\frac{1}{(z+1)^4}$, воспользуемся формулой (8)

$$\int \frac{\frac{1}{(z+1)^4}dz}{(z-1)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3(z+1)^{-4}}{dz^3} = -\frac{5\pi i}{16}.$$

4.9. Вычислить $\int\limits_L \frac{2z+i-1}{(z-1)(z+i)}dz$, если L — окружность $|z|=2$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция $f(z)$ имеет разрывы в точках $z=1$ и $z=-i$, то она будет аналитической в трехсвязной области. Трехсвязная область представляет круг с граничной окружностью γ (рис. 18.5), из которого вырезаны два круга $|z-1|<r$ и $|z+i|<r$, где r — радиус окружностей, значительно меньший радиуса заданной окружности.

Отсюда, по теореме Коши для многосвязной области (5) будем иметь

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz + \int\limits_{l_2} f(z)dz.$$

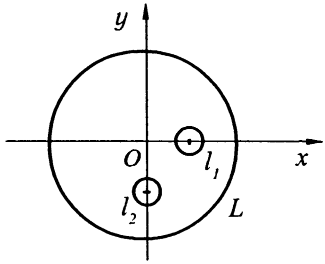

Рис. 18.5

Если преобразовать подынтегральную функцию следующим образом

$$\frac{2z+i-1}{(z-1)(z+i)}=\frac{z-1+z+i}{(z-1)(z+i)}=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-1},$$

то получим

$$\int_L \frac{2z+i-1}{(z-1)(z+i)}dz=\int_{l_1}\frac{dz}{z+i}+\int_{l_1}\frac{dz}{z-1}+\int_{l_2}\frac{dz}{z+i}+\int_{l_2}\frac{dz}{z-1}.$$

Первый и четвертый интегралы по формуле (4) равны нулю, т.к. подынтегральные функции являются аналитическими в этих областях. Второй и третий интегралы по формуле (7) равны $2\pi i$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$\int_L \frac{2z+i-1}{(z-1)(z+i)}=4\pi i.$$

18.5. Ряды Тейлора и Лорана

1°. Пусть дана функция $f(z)$ аналитическая в окрестности некоторой точки a, ограниченной окружностью C. Функция $f(z)$ внутри своего круга сходимости может быть представлена *рядом Тейлора*

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots, \tag{1}$$

где коэффициенты ряда иногда вычисляют, пользуясь интегральной формулой Коши

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - a)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Если $a = 0$, то равенство (1) принимает вид

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \ldots \tag{3}$$

и называется разложением функции $f(z)$ в ряд *Маклорена.*

2°. Пусть функция $f(z)$ аналитическая внутри кольца $r < |z - a| < R$ с концентрическими окружностями C_1, C_2 и центром в точке $z = a$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в ряд может быть записано в виде

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots +$$
$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots, \tag{4}$$

которое называется *рядом Лорана.* Коэффициенты ряда Лорана определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5}$$

где C — любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке a.

Запишем выражение (4) в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \tag{6}$$

где

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7}$$

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (8)$$

Ряд (7) называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд (8) называется *главной частью* ряда Лорана. Область сходимости ряда (7) определяется неравенством $|z-a|<R$, а ряда (8) неравенством $|z-a|>r$.

Рядом Лорана для аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ называется ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad (9)$$

сходящийся в некотором кольце $r<|z-a|<\infty$, причем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ — называется правильной частью, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ — главной частью ряда.

Если $a=0$, то формула (9) имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n, \quad (r<|z|<\infty), \qquad (10)$$

где $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ — правильная часть ряда, а $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$ — главная часть.

При разложении функции в ряд Лорана иногда целесообразно использовать известные разложения в ряд Тейлора функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, биномиальный ряд и т. д.

3°. Если ряд Лорана содержит главную часть, то точка a называется *изолированной* особой точкой аналитической функции $f(z)$ в кольце $0<|z-a|<R$.

Если ряд Лорана содержит в главной части конечное число членов, т. е. $\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$, то изолированная особая точка a называется *полюсом n-го порядка* функции $f(z)$, а коэффициент c_{-1} называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно полюса a. Если $n=1$, полюс называется *простым*.

Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется: *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=a$, *существенно особой*, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Если правильная часть ряда Лорана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ с радиусом сходимости $r>0$ и кругом сходимости $|z-a|<r$ совпадает с $f(z)$, то точка a называется *правильной точкой* аналитической функции $f(z)$.

5.1. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z+i$ функцию $f(z)=z^6$.

Решение. Вычислим производные функции $f(z)=z^6$:

$$f'(z)=6z^5;\quad f''(z)=30z^4;\quad f'''(z)=120z^3;$$

$$f^{(4)}(z)=360z^2;\quad f^{(5)}(z)=720z;\quad f^{(6)}(z)=720;\quad f^{(7)}(z)=0;..$$

Найдем значения производных в точке $a=-i$:

$$f(i)=-1;\quad f'(i)=-6i;\quad f''(i)=30;\quad f'''(i)=120i;$$

$$f^{(4)}(i)=-360;\quad f^{(5)}(i)=-720i;\quad f^{(6)}(i)=720.$$

Подставляя эти значения в ряд (1), получим

$$f(z)=-1-6i(z+i)+15(z+i)^2+20i(z+i)^3-$$

$$-15(z+i)^4-6(z+i)^5+(z+i)^6.$$

5.2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z)=\ln\left(1+e^z\right)$, ограничиваясь первыми четырьмя членами.

Решение. Вычислим производные:

$$f'(z)=\frac{e^z}{1+e^z},\quad f''(z)=\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^2},\quad f'''(z)=\frac{e^z-e^{3z}}{\left(1+e^z\right)^4},$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{\left(e^z-3e^{3z}\right)\left(1+e^z\right)-4e^z\left(e^z-e^{3z}\right)}{\left(1+e^z\right)^5}.$$

Найдем значения производных в точке $z=0$:

$$f(0)=\ln 2,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{1}{4},\quad f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=-\frac{1}{8}.$$

Подставляя эти значения в ряд (2), получим

$$\ln\left(1+e^{z}\right)=\ln 2+\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{8}-\frac{z^{4}}{192}.$$

5.3. Исследовать сходимость ряда: а) $\ldots+\dfrac{1}{2^{3}(z+1)^{3}}+$

$$+\frac{1}{2^{2}(z+1)^{2}}+\frac{1}{2(z+1)}+1+\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^{2}}{3^{2}}+\frac{(z+1)^{3}}{3^{3}}+\ldots$$

б) $\ldots+\dfrac{(4-3i)^{3}}{z^{3}}+\dfrac{(4-3i)^{2}}{z^{2}}+\dfrac{4-3i}{z}+1+\dfrac{z}{5i}+\dfrac{z^{2}}{(5i)^{2}}+\dfrac{z^{3}}{(5i)^{3}}+\ldots$

Решение. а) Рассмотрим два ряда

$$\frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{2^{2}(z+1)^{2}}+\frac{1}{2^{3}(z+1)^{3}}+\ldots \tag{11}$$

$$1+\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^{2}}{3^{2}}+\frac{(z+1)^{3}}{3^{3}}+\ldots \tag{12}$$

Сделаем замену в ряде (11) $z+1=\dfrac{1}{\varsigma}$, тогда получим

$$\frac{\varsigma}{2}+\frac{\varsigma^{2}}{2^{2}}+\frac{\varsigma^{3}}{2^{3}}+\ldots$$

Новый ряд является степенным рядом. Радиус сходимости по признаку Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^{n}}=2$. Отсюда, ряд сходится, если $|\varsigma|<2$ или $\left|\dfrac{1}{z+1}\right|<2$. Таким образом, ряд (11) сходится при $|z+1|>\dfrac{1}{2}$, т. е. вне круга радиуса $r=\dfrac{1}{2}$ с центром в точке $z=-1$.

Найдем теперь радиус сходимости ряда (12):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} = 3.$$

Следовательно, область сходимости ряда (12) будет $|z+1|<3$. Объединяя результаты, делаем вывод, что областью сходимости заданного ряда является кольцо $\frac{1}{2}<|z+1|<3$.

б) Рассмотрим два ряда

$$\frac{4-3i}{z}+\frac{(4-3i)^2}{z^2}+\frac{(4-3i)^3}{z^3}+\ldots \qquad (13)$$

$$1+\frac{z}{5i}+\frac{z^2}{(5i)^2}+\frac{z^3}{(5i)^3}+\ldots \qquad (14)$$

Ряды (13), (14) представляют геометрические прогрессии соответственно со знаменателями $\frac{4-3i}{z}$ и $\frac{z}{5i}$. Если знаменатели по абсолютной величине меньше единицы, т. е. $\left|\frac{4-3i}{z}\right|<1$ и $\left|\frac{z}{5i}\right|<1$, то ряды сходятся. Поскольку модули комплексных чисел равны $|4-3i|=\sqrt{16+9}=5$, $|5i|=5$, то $\frac{5}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$ или $|z|>5$ и $|z|<5$. Так как эти неравенства несовместимы, то заданный ряд расходится.

5.4. Разложить в ряды Лорана по степеням $z-z_0$ функции: а) $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$; б) $f(z)=\sin\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$; в) $f(z)=e^{\frac{z}{z+1}}$, $z_0=\infty$; г) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

Решение. а) Представим функцию в виде простейших дробей

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2},$$

откуда $A(z-2)+B(z-1)=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получим $A=-1$ и $B=1$. Таким образом,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}.$$

Так как аналитичность функции нарушается в точках $z=1$ и $z=2$, то областью сходимости ряда Лорана будет кольцо $1<|z|<2$. Рассматривая первый и второй члены разложения функции $f(z)$ как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{z}{2}$ и $\frac{1}{z}$, разложение можно записать в виде

$$f(z)=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right).$$

б) Воспользуемся заменой $\frac{1}{z-2}=\varsigma$ и разложим функцию в ряд

$$\sin\varsigma=\frac{\varsigma}{1!}-\frac{\varsigma^3}{3!}+\frac{\varsigma^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{\varsigma^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Переходя к старой переменной, будем иметь

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}},$$

т. е. ряд Лорана содержит только главную часть. Область сходимости ряда определяется неравенством $0<|z-2|<\infty$.

в) Полагая $z=\frac{1}{\varsigma}$, будем иметь $f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=e^{\frac{1/\varsigma}{1/\varsigma+1}}=e^{\frac{1}{1+\varsigma}}$. Введем обозначение $f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=\varphi(\varsigma)$, тогда

$$\varphi'(\varsigma)=-\frac{1}{(1+\varsigma)^2}e^{\frac{1}{1+\varsigma}};\quad \varphi''(\varsigma)=\left[\frac{2}{(1+\varsigma)^3}+\frac{1}{(1+\varsigma)^4}\right]e^{\frac{1}{1+\varsigma}},\dots$$

При $\varsigma=0$, получим $\varphi(0)=e$, $\varphi'(0)=-e$, $\varphi''(0)=3e,\dots$ Таким образом

$$\varphi(\varsigma)=e\left(1-\frac{\varsigma}{1!}+\frac{3\varsigma^2}{2!}+\dots\right)$$

или

$$e^{\frac{z}{z+1}}=e\left(1-\frac{1}{1!z}+\frac{3}{2!z^2}+\dots\right).$$

Поскольку единственной особой точкой функции является точка $z=-1$, то ряд сходится вне единичного круга. Введем обозначение $\frac{1}{z}=\varsigma$ и разложим $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд

$$e^{\varsigma}=1+\frac{\varsigma}{1!}+\frac{\varsigma^2}{2!}+\dots+\frac{\varsigma^n}{n!}+\dots$$

Переходя к старой переменной, будем иметь

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+\frac{z}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\dots$$

Здесь правильная часть содержит два члена, остальные члены составляют главную часть.

Поскольку единственной особой точкой функции является точка $z=0$, то область сходимости ряда будет определяться неравенством $0<|z|<\infty$.

5.5. Найти особые точки и определить их тип для функции:

а) $\dfrac{z+1}{z(z-1)(z+2)^3}$; б) $\dfrac{1}{\left(z^2+i\right)^3}$; в) $\operatorname{ctg}^2 z$; г) $\cos\dfrac{1}{z-2i}$;

д) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; е) $e^{\frac{1}{z^2}}$.

Решение. а) Особыми точками являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Точки $z=0$ и $z=1$ — полюсы первого порядка, а точка $z=-2$ — полюс третьего порядка.

б) Приравниваем знаменатель к нулю $z^2+i=0$, откуда $z^2=-i$. Запишем правую часть в тригонометрическом виде и воспользуемся формулой Муавра

$$\sqrt{-i}=\sqrt{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}$$

$(k=0,1)$. Таким образом, корни будут равны $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ — два полюса третьего порядка.

в) Представим $\operatorname{ctg}^2 z=\dfrac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$. Приравняем знаменатель к нулю $\sin^2 z=0$. Отсюда точки $z_k=k\pi,\quad k=0,\pm1,\ldots$ — полюсы второго порядка.

г) Разложение функции в ряд

$$\cos\frac{1}{z-2i}=1-\frac{1}{2!(z-2i)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-2i)^{2n}}+\ldots$$

представляет главную часть ряда Лорана и точка $z=2i$ является изолированной особой точкой. Поскольку $\lim\limits_{z\to2i}\cos\dfrac{1}{z-2i}$ не существует, то точка $z=2i$ — есть существенно особая точка.

д) Нетрудно заметить, что разложение функции в ряд представляет только главную часть ряда Лорана и точка $z = 0$ — изолированная особая точка. Поскольку

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{4\left(\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

т. е. конечен, то точка $z = 0$ — устранимая особая точка.

е) Функция терпит разрыв в точке $z = 0$. Делая замену $\frac{1}{z^2}=\varsigma$, представим функцию в виде ряда

$$e^{\frac{1}{z^2}}=e^{\varsigma}=1+\frac{\varsigma}{1!}+\frac{\varsigma^2}{2!}+\ldots=1+\frac{1}{z^2 1!}+\frac{1}{z^4 2!}+\ldots+\frac{1}{\left(z^{2n}\right)n!}+\ldots.$$

т. е. разложение представляет главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z = 0$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z^2}}$ не существует, то точка $z = 0$ есть существенно особая точка.

18.6. Вычеты и их применение к вычислению интегралов

1°. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D за исключением некоторой точки $z = a$, называемой полюсом или изолированной особой точкой. Если C замкнутый контур, содержащий точку a и расположенный в области аналитической функции $f(z)$, то величину $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$ называют *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки a и обозначают

$$\operatorname{res}\left[f(z),a\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz. \qquad (1)$$

Вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} главной части разложения этой функции в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ в окрестности точки a.

Если a — полюс первого порядка функции $f(z)$, то ее вычет находится по формуле

$$\operatorname{res}\left[f(z),a\right]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{2}$$

Если a — полюс n-го порядка, то вычет функции относительно ее полюса равен

$$\operatorname{res}\left[f(z),a\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}\left[(z-a)^n f(z)\right]}{dz^{n-1}}. \tag{3}$$

Если полюс функции $f(z)$ находится в точке $z=\infty$, то

$$res\left[f(z),\infty\right]=-c_{-1}. \tag{4}$$

Если функция $f(z)$ может быть представлена в виде $f(x)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические в точке a функции, причем $f_1(a)\neq 0$, $f_2(a)=0$, $f_2'(a)\neq 0$, то вычет относительно простого полюса a равен

$$res\left[f(z),a\right]=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \tag{5}$$

2°. *Основная теорема о вычетах*. Если $f(z)$ — аналитическая функция в области D за исключением конечного числа полюсов $a_1,a_2,\ldots,a_k$, ограниченных контуром C, то интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ равен сумме вычетов функции $f(z)$ относительно этих полюсов умноженной на $2\pi i$, т. е.

$$\int\limits_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(z),a_k\right]. \tag{6}$$

3°. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости кроме конечного числа полюсов a_k $(k=1,2,\ldots)$ расположенных над действительной осью и произведение $z^2|f(z)|\le M$, $M>0$ ограничено в окрестности бесконечно удаленной точки. В этом случае определенный интеграл функции действительного переменного вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[f(z),a_k\right], \tag{7}$$

т. е. равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее полюсов a_k, расположенных в верхней полуплоскости.

4°. *Лемма Жордана.* Если функция $f(z)$ аналитична на действительной оси и в верхней полуплоскости имеет конечное число полюсов, причем $f(z)=e^{imz}F(z)$, где при $m>0$ $F(z)\to 0$, когда $z\to\infty$ по любому закону, так что $\operatorname{Im} z\ge 0$, то справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z),a_k\right]. \tag{8}$$

6.1. Найти вычеты функций: а) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$; в) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$; г) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+10}$; д) $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$; е) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+2)^3}$.

Решение. а) Точки $z=-1$, $z=2$ являются простыми полюсами функции $\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$. Следовательно, по формуле (2) имеем

$$\operatorname{res}\left[f(z),-1\right]=\lim_{z\to-1}\left[(z+1)\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}\right]=\lim_{z\to-1}\frac{z^2}{z-2}=-\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),2\right]=\lim_{z\to2}\left[(z-2)\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}\right]=\frac{4}{3}.$$

б) Полюсами функции $f(z)=\dfrac{1}{(z-3i)(z+3i)}$ будут точки $3i$ и $-3i$. Таким образом

$$\operatorname{res}\left[f(z),3i\right]=\lim_{z\to3i}\left[(z-3i)\frac{1}{(z-3i)(z+3i)}\right]=\lim_{z\to3i}\frac{1}{z+3i}=\frac{1}{6i}=-\frac{i}{6},$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),-3i\right]=\lim_{z\to-3i}\left[(z+3i)\frac{1}{(z-3i)(z+3i)}\right]=-\frac{1}{6i}=\frac{i}{6}.$$

в) Функция имеет полюс в точке i, следовательно

$$\operatorname{res}\left[f(z),i\right]=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z+i}{z-i}\right]=\lim_{z\to i}(z+i)=2i.$$

г) Корни знаменателя комплексно-сопряженные числа $z=-1\pm3i$ являются полюсами функции. Запишем функцию в виде $f(z)=\dfrac{1}{(z+1-3i)(z+1+3i)}$. Отсюда вычеты

$$\operatorname{res}\left[f(z),-1+3i\right]=\lim_{z\to-1+3i}\left[(z+1-3i)\frac{1}{(z+1-3i)(z+1+3i)}\right]=\frac{1}{6i}=-\frac{i}{6},$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),-1-3i\right]=\lim_{z\to-1-3i}\frac{z+1+3i}{(z+1-3i)(z+1+3i)}=-\frac{1}{6i}=\frac{i}{6}.$$

д) Так как функция имеет два полюса $z=\pm i$ второго порядка, то воспользуемся формулой (3)

$$\operatorname{res}\left[f(z),i\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d\left[(z-i)^2\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]}{dz}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d\left[(z-i)^2\dfrac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]}{dz}=\lim_{z\to i}\frac{d\dfrac{z^2}{(z+i)^2}}{dz}=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[2\frac{z}{z+i}\frac{z+i-z}{(z+i)^2}\right]=-\frac{i}{4};$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),-i\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d\left[(z+i)^2\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]}{dz}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{d\dfrac{z^2}{(z-i)^2}}{dz}=\lim_{z\to -i}\left[\frac{2z}{z-i}\frac{z-i-z}{(z-i)^2}\right]=\frac{i}{4};$$

е) Функция имеет полюс $z=-2$ третьего порядка. По формуле (3) будем иметь

$$\operatorname{res}\left[f(z),-2\right]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2\left[(z+2)^3\dfrac{z^3}{(z+2)^3}\right]}{dz^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{d^2\left(z^3\right)}{dz^2}=3\lim_{z\to -2}z=-6.$$

6.2. Найти вычеты функции: а) $f(z)=\operatorname{ctg}z$ относительно точки $z=0$; б) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ относительно точки $a=0$; в) $f(z)=z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$ относительно точки $a=\infty$.

Решение. а) Функция имеет полюс в точке $a = 0$. Поскольку функцию можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, то воспользуемся формулой (5)

$$\operatorname{res}\left[f(z), 0\right] = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

б) Заменяя $\dfrac{1}{z} = \varsigma$ запишем данную функцию в виде разложения в ряд Лорана

$$\sin\varsigma = \frac{\varsigma}{1!} - \frac{\varsigma^3}{3!} + \frac{\varsigma^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\varsigma^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Переходя к старой переменной, будем иметь

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z1!} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!} + \ldots$$

Коэффициент c_{-1} главной части ряда Лорана является вычетом функции $f(z)$ относительно полюса и равен 1.

в) Воспользуемся формулой (4). Для этого разложим заданную функцию в ряд Лорана, ограничиваясь первым членом главной части

$$f(z) = z\cos^2\frac{\pi}{z} = \frac{z}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{z}\right) = \frac{z}{2}\left(1 + 1 - \frac{4\pi^2}{z^2 2!} + \ldots\right) = z - \frac{\pi^2}{z} + \ldots$$

Поскольку $\operatorname{res}\left[f(z), \infty\right] = -c_{-1}$, то вычет равен π^2.

6.3. Найти интегралы: а) $\displaystyle\int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+4)(z-1)}$, где C — окружность $|z| = 3$; б) $\displaystyle\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}$, где C — окружность $|z| = 1$.

Решение. а) Представим подынтегральную функцию в виде $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}$. Полюсы $2i$, $-2i$, 1 находятся внутри замкнутого контура $|z|=3$. Воспользуемся основной теоремой о вычетах. Находим

$$\operatorname{res}\left[f(z),2i\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)z^2}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}=\frac{1}{2+i},$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),-2i\right]=\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)z^2}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}=\frac{1}{2-i},$$

$$\operatorname{res}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)z^2}{(z^2+4)(z-1)}=\frac{1}{5}.$$

По формуле (6) получим

$$\int\limits_C\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z-1)}=2\pi i\left[\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}+\frac{1}{5}\right]=$$

$$=2\pi i\left(\frac{2-i+2+i}{5}+\frac{1}{5}\right)=2\pi i.$$

б) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ имеет один полюс $a=0$ второго порядка и два полюса в точках $\pm 3i$. Поскольку внутри контура находится только полюс $a=0$, то

$$\int\limits_C\frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}=2\pi i\operatorname{res}\left[f(z),0\right].$$

где

$$\operatorname{res}\left[f(z),0\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d\dfrac{z^2e^z}{z^2(z^2+9)}}{dz}=\lim_{z\to 0}\frac{d\dfrac{e^z}{z^2+9}}{dz}=\frac{1}{9}.$$

Таким образом

$$\int\limits_C\frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}=\frac{2\pi i}{9}.$$

6.4. Вычислить определенные интегралы: а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$;
б) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+9}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$; г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$, $a>1$.

Решение. а) Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$ в верхней полуплоскости является аналитической всюду кроме полюса третьего порядка i. Произведение $z^2 f(z)$ при $|z|\to\infty$ ограничено, именно $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^3}=0$. Находим вычет функции

$$\operatorname{res}\left[f(z),i\right]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^2\left[(z-i)^3\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right]}{dz^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2\frac{1}{(z+i)^3}}{dz^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=\frac{3}{16i}.$$

Отсюда по формуле (7) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=2\pi i\frac{3}{16i}=\frac{3\pi}{8}.$$

б) Подынтегральная функция является действительной частью функции $\frac{e^{ix}}{x^2+9}$ причем ее значения совпадают со значениями функции $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+9}$ на действительной оси. Поскольку, согласно лемме Жордана, функция $F(z)=\frac{z}{z^2+9}$ при $z\to\infty$ в пределе ограничена, т. е. $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$ и в верхней полуплоскости иммеет в точке $3i$ полюс, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[f(z), 3i\right] = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi}{3e^3}.$$

Таким образом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+9} = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{3e^3}$, откуда в силу четности функции $\frac{\cos x}{x^2+9}$ получим $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{6e^3}$.

в) Подынтегральная функция совпадает с мнимой частью функции $\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, которая на действительной оси имеет одинаковые значения с функцией $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$.

Функция $f(z)$ удовлетворяет лемме Жордана, т. е. $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{z^2-2z+10} = 0$, имеет в верхней полуплоскости в точке $a = 1+3i$ полюс, следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10} dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[f(z), 1+3i\right].$$

Поскольку

$$\operatorname{res}\left[f(z), 1+3i\right] = \lim_{z\to 1+3i} \frac{(z-1-3i)ze^{iz}}{(z-1-3i)(z-1+3i)} = \frac{(1+3i)e^{i-3}}{6i},$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10} dx = \frac{\pi}{3}(1+3i)e^{i-3} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + \frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)i.$$

Используя очевидное выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$$

и сравнивая мнимые части, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3}e^{-3}\left(3\cos 1+\sin 1\right).$$

Следует заметить, что сравнивая действительные части, получим значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3}e^{-3}\left(3\cos 1-\sin 1\right).$$

г) Сделаем замену

$$z = e^{ix}, \quad dz = ie^{ix}dx = izdx, \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Учитывая, что при изменении x от 0 до 2π точка z описывает окружность единичного радиуса, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} = \int_C \frac{\frac{1}{iz}dz}{a+\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Подынтегральная функция в силу $a>1$ внутри единичной окружности C имеет только один простой полюс $-a+\sqrt{a^2-1}$. Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} = 2\pi i\frac{2}{i}res\left[\frac{1}{z^2+2az+1}, -a+\sqrt{a^2-1}\right] =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{z+a-\sqrt{a^2-1}}{\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(z+a+\sqrt{a^2-1}\right)} =$$

$$= 4\pi\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

18.7. Конформное отображение

1°. Пусть дана функция $w = f(z)$ — аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Каждому значению $z = x + iy$ соответствует определенное значение $w = u + iv$, т. е. каждой точке (x, y) на плоскости Oxy ставится в соответствие определенная точка (u, v) на плоскости Ouv. Соответственно, некоторой линии L на плоскости Oxy ставится в соответствие определенная линия L' на плоскости Ouv. Линия L', полученная при помощи аналитической функции $w = f(z)$, называется *отображением* линии L на плоскость Ouv.

Отображение области D, задаваемое функцией $w = f(z)$, называется *конформным*, если функция $f(z)$ является однолистной и аналитической в области D, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в области D. Конформное отображение в каждой точке области D обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов.

Коэффициент растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ определяется выражением $k = |f'(z_0)|$, причем, если $k > 1$ имеет место растяжение, при $k < 1$ — сжатие.

Аргумент производной $\varphi = \arg f'(z_0)$ определяет угол поворота, на который необходимо повернуть касательную к кривой L в точке z_0, чтобы получить касательную в точке $w_0 = f(z_0)$ к кривой L', причем, если $\varphi > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$ — по часовой. Две произвольные линии, пересекающиеся в точке (x_0, y_0) под углом α, отображаются с помощью функции $w = f(z)$ в две соответствующие линии, пересекающиеся в точке (u_0, v_0) под тем же самым углом α.

2°. Если известно, что три точки z_1, z_2, z_3 плоскости z отображаются, соответственно, в точки w_1, w_2, w_3 плоскости w, то отображение определяется дробно-линейной функцией по формуле

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}. \qquad (1)$$

Если какая-либо из точек z_1, z_2, z_3 или w_1, w_2, w_3 является бесконечно удаленной, то разности, содержащие эту точку, заменяются в формуле (1) единицами.

7.1. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = 2z^2 - z$.

Решение. Находим производную в точке z_0

$$w' = 4z-1, \quad w'\big|_{1+i} = 4(1+i)-1 = 3+4i.$$

Отсюда

$$k = \left|f'(z_0)\right| = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5, \quad \varphi = \arg f'(z_0) = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

7.2. Выяснить, какая часть плоскости аргумента z сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией: а) $w = e^{z-1}$; б) $w = \ln(z+1)$.

Решение. а) Вычисляем производную $w' = e^{z-1}$; $k = \left|e^{z-1}\right|$.

Так как $k > 1$ при $\operatorname{Re} z > 1$, то при $\operatorname{Re} z > 1$ полуплоскость растягивается. При $\operatorname{Re} z < 1$ $k < 1$, следовательно, при $\operatorname{Re} z < 1$ полуплоскость сжимается.

б) Находим производную $w' = \dfrac{1}{z+1}$, $k = \left|\dfrac{1}{z+1}\right|$.

Так как $k > 1$ при $|z+1| < 1$, то при $|z+1| < 1$ область растягивается. Соответственно, при $|z+1| > 1$ $k < 1$ и область $|z+1| > 1$ сжимается.

7.3. Найти отображение, переводящее точки $i, 0, 1-i$ в точки $2, 1+i, -i$.

Решение. Подставим координаты данных точек в формулу (1)

$$\frac{w-2}{w-(1+i)}\frac{-i-(1+i)}{(1+i)-2} = \frac{z-i}{z}\frac{1-i}{-i},$$

откуда после несложных преобразований получим

$$w=\frac{z(2i+3)-2i}{2(z+i-2)}.$$

7.4. При помощи функции $w=z^3$ **отобразить** на плоскость w точки $(1,1)$, $(3,0)$, $(0,2)$.

Решение. Точке (1, 1) на плоскости z соответствует число $z=1+i$. Таким образом $w=(1+i)^3=1+3i-3-i=-2+2i$. На плоскости w это будет точка (–2, 2).

Точке (3, 0) на плоскости z соответствует число $z=3$, тогда $w=3^3=27$, т. е. на плоскости w точка (27, 0).

Точке (0, –2) на плоскости z соответствует число $z=-2i$. Тогда $w=(-2i)^3=8i$, т. е. на плоскости w точка (0, 8).

7.5. Отобразить параболу $y=x^2$ на плоскость w при помощи функции $w=z^2$.

Решение. Поскольку $z=x+iy$, то

$$w=(x+iy)^2=x^2+2xyi-y^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Обозначим $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Присоединяя к этим равенствам уравнение параболы $y=x^2$ и исключая переменные x и y, получим в плоскости Ouv кривую

$$u=x^2-y^4,\quad v=2x^3,\quad u=\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

7.6. Найти отображение с помощью функции $w=\frac{1}{z}$ на плоскость w кривых, расположенных в плоскости z: а) $x^2+y^2=1$; б) x = 1.

Решение. а) Поскольку $z=x+yi$ и $w=u+iv$, то

$$w=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+y)(x-yi)}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2},$$

откуда $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Присоединяя к этим равенствам $x^2+y^2=1$ и исключая из них x и y, получим $u=x$, $v=-y$, $u^2+v^2=1$, т. е. на плоскости w это будет окружность.

б) Исключая из уравнений $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, переменные x и y, будем иметь

$$u=\frac{1}{1+y^2},\quad v=-\frac{y}{1+y^2},\quad v=-uy,\quad v^2=u^2\left(\frac{1}{u}-1\right),$$

$$u^2-u+v^2=0,\quad \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=1.$$

Глава 19
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

19.1. Преобразование Лапласа, основные свойства и нахождение изображений функций

1°. Пусть дана кусочно-непрерывная функция $f(t)$ действительного переменного t, заданная на $[0,\infty)$. При $t<0$ $f(t)=0$. С возрастанием t (при t > 0) модуль функции $f(t)$ ограничен некоторой показательной функцией $|f(t)|\le Me^{st}$, где M и s — постоянные. Число s — называется показателем роста функции. Преобразование, при котором функция $f(t)$ преобразуется в функцию $F(p)$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt, \qquad (1)$$

называется *преобразованием Лапласа*. Здесь $p=a+ib$ — комплексное переменное. Предположение, что $\operatorname{Re} p=a>s$, обеспечивает абсолютную сходимость несобственного интеграла (1) для всех точек p, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} p>s$.

Функция $F(p)$ называется *изображением Лапласа*, а функция $f(t)$ *оригиналом* или *начальной функцией*. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ принято обозначать $f(t)\to F(p)$ или $F(p)=L[f(t)]$.

Считаем, что в точках разрыва первого рода $t=t_0$ значение оригинала равно полусумме его предельных значений слева и справа от этой точки $f(t_0)=\frac{1}{2}(f(t_0-0)+f(t_0+0))$.

2°. Свойства преобразования Лапласа:

1. $C\,f(t)\to C\,F(p)$, где C — некоторая постоянная.

2. $f_1(t)+f_2(t)\to F_1(p)+F_2(p)$.

3. Свойство линейности: $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)\to\sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p)$, где C_i — некоторые постоянные величины.

4. Теорема подобия: $f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$.

5. Теорема запаздывания: $f(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p)$, где постоянная $\tau>0$.

6. Теорема смещения: $e^{\alpha t}f(t)\to F(p-\alpha)$ при $\mathrm{Re}(p-\alpha)>s$.

7. Дифференцирование оригинала: $f'(t)\to pF(p)-f(0)$. Если $f(0)=0$, то при дифференцировании оригинала изображение умножается на p. Если $f(t)$ имеет производную $f^{(n)}(t)$, то

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

8. Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(t)dt\to\frac{F(p)}{p}$.

9. Дифференцирование изображения:

$$t^nf(t)\to(-1)^nF^{(n)}(p),\quad n=1,2,\ldots$$

10. Интегрирование изображения: $\frac{1}{t}f(t)=\int_p^{\infty}F(p)dp$.

11. Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция $F(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau$.

Теорема свертывания оригиналов. Изображение свертки двух оригиналов равно произведению их изображений

$$\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau \to F(p)\cdot G(p),$$

где $F(p)\to f(t), \quad G(p)\to g(t)$.

3°. При вычислении изображений $F(p)$ функций $f(t)$, помимо рассмотренных свойств, целесообразно пользоваться таблицей изображений:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	13	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	14	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
4	$e^{\alpha t}\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	15	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	16	$\frac{t^n}{n!}\cos\beta t$	$\frac{\operatorname{Re}\left((p+\beta i)^{n+1}\right)}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
6	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	17	$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t$	$\frac{\operatorname{Im}\left((p+\beta i)^{n+1}\right)}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
7	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$	18	$\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$	$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$
8	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$	19	$\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p(p^2+\alpha^2)}$
9	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	20	$\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{\beta^2-\alpha^2}$	$\frac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$
10	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	21	$\frac{1}{\alpha^2}\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{\alpha t}{\sqrt{2}}$	$\frac{p}{p^4+\alpha^4}$
11	$\cos\alpha(t-t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$	22	$\cos\frac{\alpha t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4+\alpha^4}$

1.1. Найти изображение фунций: а) $f(t)=t$; б) $f(t)=\sin 2t$; в) $f(t)=\cos 2t$.

Решение. а) Воспользуемся преобразованием Лапласа $F(p)=\int\limits_0^\infty te^{-pt}dt$. Интегрируя по частям, получим

$$F(p)=-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p^2}.$$

б) По формуле (1): $F(p)=\int\limits_0^\infty \sin 2te^{-pt}dt$. Интегрируя по частям дважды $\sin 2t=u$; $e^{-pt}dt=dv$, получим

$$F(p)=-\frac{1}{p}\sin 2te^{-pt}\Big|_0^\infty+\frac{2}{p}\int\limits_0^\infty \cos 2te^{-pt}dt=\frac{2}{p}\int\limits_0^\infty \cos 2te^{-pt}dt.$$

Полагая $\cos 2t=u$; $e^{-pt}dt=dv$, получим

$$F(p)=\frac{2}{p}\left(-\frac{1}{p}\cos 2te^{-pt}\Big|_0^\infty-\frac{2}{p}\int\limits_0^\infty \sin 2te^{-pt}dt\right)=\frac{2}{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p}F(p)\right).$$

Отсюда $F(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$.

в) Если обозначить $F(p)=\int\limits_0^\infty \cos 2te^{-pt}dt$, то из предыдущего примера будем иметь $\dfrac{2}{p}F(p)=\dfrac{2}{p}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{p}\dfrac{2}{p^2+4}\right)$. Откуда $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$.

1.2. Найти изображение функций: а) $f(t)=2+3a^t$; б) $f(t)=\sin^3 t$; в) $\operatorname{sh} at\cos bt$.

Решение. а) Преобразуем функцию $f(t)=2+3e^{t\ln a}$, воспользуемся свойствами (1), (2) и табличной формулой (3), тогда будем иметь $F(p)=\dfrac{2}{p}+\dfrac{3}{p-\ln a}$.

б) По формуле Эйлера имеем

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3\left(e^{it} - e^{-it}\right)}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right) = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t.$$

Используя свойство (3) и табличную формулу (5) окончательно получим

$$F(p) = \frac{3}{4}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4}\frac{3}{p^2+9} = \frac{6}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}.$$

в) Так как

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2},$$

то

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{at}\cos bt - \frac{1}{2}e^{-at}\cos bt.$$

Применяя дважды табличную формулу (10), получим

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{a\left(p^2 - a^2 - b^2\right)}{\left((p-a)^2+b^2\right)\left((p+a)^2+b^2\right)}.$$

1.3. Найти изображение функций: а) $f(t) = t^2 \sin at$; б) $f(t) = \sin^2 t$; в) $f(t) = \int\limits_0^t \cos 3t\,dt$; г) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение. а) Пользуясь табличной формулой (5), имеем $\sin at \to \frac{a}{p^2+a^2}$. Применяя теорему (9) о дифференцировании изображения, получим

$$t^2 \sin at \to (-1)^2\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'' \quad \text{или} \quad t^2 \sin at \to 2a\frac{3p^2 - a^2}{\left(p^2+a^2\right)^3};$$

$$F(p)=2a\frac{3p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^3}.$$

б) Применяя теорему о дифференцировании оригинала, имеем $f'(t)\to pF(p)-f(0)$.

Так как $f(0)=0$, $f_t'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t\to\frac{2}{p^2+4}$, то $\frac{2}{p^2+4}=pF(p)$ или $F(p)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

в) Применяя табличную формулу (6), получим $\cos 3t\to\frac{p}{p^2+9}$. Используя теорему (8) об интегрировании оригинала, имеем

$$\int_0^t\cos 3tdt\to\frac{1}{p}\frac{p}{p^2+9}=\frac{1}{p^2+9},\text{ т. е. }F(p)=\frac{1}{p^2+9}.$$

г) По табличной формуле (5) имеем $\sin t\to\frac{1}{p^2+1}$. Используя теорему (10) об интегрировании изображения, получим

$$\frac{\sin t}{t}\to\int_p^\infty\frac{dp}{p^2+1}=\operatorname{arctg}p\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p,\text{ т. е. }F(p)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p.$$

1.4. Найти изображение оригинала: а) $\int_0^t e^{-3\tau}\text{ch }5\tau d\tau$; б) $f(t)=e^{2t}\sin 4t\cos 2t$; в) $e^{3(t-1)}\cos 2(t-1)$.

Решение. а) Интегрирование по τ и умножение на $e^{-3\tau}$ учитывается с помощью теорем об интегрировании оригинала и смещения. Находим по таблице изображение функции $\text{ch }3t\to\frac{p}{p^2-25}$. Применяя теорему смещения (6), получим

$$e^{-3t}\text{ch }5t\to\frac{p+3}{(p+3)^2-25}.$$

Отсюда по теореме об интегрировании оригинала (8) имеем

$$\int_0^t e^{-3t}\operatorname{ch} 5\tau d\tau \to \frac{1}{p}\frac{p+3}{p^2+6p-16}.$$

б) Произведение синуса на косинус равно

$$\sin 4t\cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 6t + \sin 2t),$$

отсюда по таблице и свойству линейности

$$\frac{1}{2}(\sin 6t+\sin 2t)\to\frac{1}{2}\left(\frac{6}{p^2+36}+\frac{2}{p^2+4}\right).$$

Применяя к полученному изображению теорему смещения, получим

$$e^{2t}\frac{1}{2}(\sin 6t+\sin 2t)\to\frac{1}{2}\left(\frac{6}{(p-2)^2+36}+\frac{2}{(p-2)^2+4}\right)=$$

$$=\frac{3}{p^2-4p+40}+\frac{1}{p^2-4p+8}.$$

в) По таблице находим изображение оригинала

$$\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4}.$$

Применим к полученному изображению теорему смещения

$$e^{3t}\cos 2t \to \frac{p-3}{(p-3)^2+4}=\frac{p-3}{p^2-6p+13}.$$

На основании теоремы запаздывания, имеем

$$e^{3(t-1)}\cos 2(t-1)\to\frac{(p-3)e^{-p}}{p^2-6p+13}.$$

19.2. Нахождение оригинала по изображению

1°. При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях пользуются таблицей изображений. Если же переход не удается осуществить с помощью таблицы, то применяют *формулу обращения интеграла Лапласа*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}F(p)dp, \quad (1)$$

где за путь интегрирования принята любая прямая $\operatorname{Re}p=\sigma$, параллельная мнимой оси.

Использование формулы (1), как правило, требует применения теории вычетов. В ряде случаев это вычисление оказывается довольно сложным, поэтому пользуются теоремами разложения.

2°. *Первая теорема.* Если функция $F(p)$ аналитическая в окрестности некоторой бесконечно удаленной точки и ее изображение может быть разложено в степенной ряд по степеням $\frac{1}{p}$, т. е. $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}$, то оригинал находится по формуле

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!},\quad t\geq 0\quad (f(t)=0\ \text{при}\ t<0). \quad (2)$$

3°. *Вторая теорема.* Если функция $F(p)$ однозначна и имеет конечное число особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n$ в конечной части плоскости, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[e^{pt}F(p);a_k\right]. \quad (3)$$

Если изображение $F(p)$ представляет правильную рациональную дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$, где $P(p),Q(p)$ — многочлены степени m и n, соответственно $(m<n)$, $a_1,a_2,\ldots a_r$ — корни многочлена $Q(p)$ с кратностями равными $r_1,r_2,\ldots,r_l$ $(r_1+r_2+\ldots+r_l=n)$, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-a_k)^{r_k}e^{pt}F(p)\right]. \quad (4)$$

В случае простых корней $a_1, a_2, \ldots, a_n$ знаменателя $Q(p)$ отыскание оригинала значительно упрощается и может быть найдено по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}. \tag{5}$$

В ряде случаев для изображений, являющихся дробно-рациональной функцией от p, могут быть использованы приемы, применяемые при интегрировании рациональных дробей.

Если многочлен $Q(p)$ раскладывается на простейшие множители вида

$$Q(p) = (p-a_1)^{r_1} (p-a_2)^{r_2} \ldots (p-a_l)^{r_l} \quad (r_1 + r_2 + \ldots + r_l = n),$$

то функция $F(p)$ может быть представлена суммой элементарных дробей

$$F(p) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{r_i} \frac{A_{i,m}}{(p-a_i)^{r_i - m + 1}}, \tag{6}$$

где

$$A_{i,m} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \to a_i} \left(\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left[(p-a_i)^{r_i} F(p) \right] \right). \tag{7}$$

4°. В задачах, где отыскание оригинала затруднено и требуется хотя бы приближенно определить $f(t)$, используют разложение изображения в асимптотический ряд

$$F(p) \simeq \frac{F(0)}{p} + \frac{F'(0)}{p^2} + \ldots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{p^n} + \ldots \tag{8}$$

2.1. Найти оригиналы функций: а) $F(p) = \dfrac{p-4}{p^2 - 4p + 5}$;

б) $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+4)}$; в) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p-2)(p+3)}$;

г) $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2 (p-2)^3}$.

Решение. а) Преобразуем функцию $F(p)$ таким образом, чтобы воспользоваться таблицей изображений. Выделим в знаменателе полный квадрат

$$\frac{p-4}{p^2-4p+5}=\frac{p-4}{(p-2)^2+1}=\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-\frac{2}{(p-2)^2+1}.$$

Воспользуемся формулами 10 и 9 таблицы:

$$\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\to e^{2t}\cos t,\quad 2\frac{1}{(p-2)^2+1}\to 2e^{2t}\sin t.$$

Таким образом, $\dfrac{p-4}{p^2-4p+5}\to e^{2t}(\cos t-2\sin t)$.

б) Представим дробь в виде двух простейших дробей

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+4}.$$

Неопределенные коэффициенты находим из тождества $1=A(p^2+4)+(Bp+C)(p+1)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получим

$$A+B=0,\quad B+C=0,\quad 4A+C=1,$$

откуда $$A=\frac{1}{5},\quad B=-\frac{1}{5},\quad C=\frac{1}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}=\frac{1}{5}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{5}\frac{p-1}{p^2+4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{p}{p^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}\right).$$

Пользуясь формулами 3, 6 и 5 таблицы, будем иметь

$$f(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

в) Так как имеет место случай простых корней $a_1=0$, $a_2=-1$, $a_3=2$, $a_4=-3$, то воспользуемся формулой (5):

$P(p)=p^2+1,\ Q(p)=p(p+1)(p-2)(p+3)=p^4+2p^3-5p^2-6p,$
$Q'(p)=4p^3+6p^2-10p-6$. Отсюда

$$\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}=-\frac{1}{6},\quad \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}=\frac{1}{2},\quad \frac{P(a_3)}{Q'(a_3)}=\frac{1}{6},\quad \frac{P(a_4)}{Q'(a_4)}=-\frac{1}{3}.$$

По формуле (5) оригинал будет равен

$$f(t)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}.$$

г) Разложим функцию $F(p)$ по формуле (6) на простейшие дроби $F(p)=\dfrac{A_{1,1}}{(p+1)^2}+\dfrac{A_{1,2}}{p+1}+\dfrac{A_{2,1}}{(p-2)^3}+\dfrac{A_{2,2}}{(p-2)^2}+\dfrac{A_{2,3}}{p-2}$.

Коэффициенты находим по формуле (7)

$$A_{1,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to-1}\left[(p+1)^2\frac{p}{(p+1)^2(p-2)^3}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{p}{(p-2)^3}=\frac{1}{27},$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to-1}\left(\frac{d}{dp}\left[(p+1)^2\frac{p}{(p+1)^2(p-2)^3}\right]\right)=$$

$$=\lim_{p\to-1}\left[\frac{1}{(p-2)^3}-\frac{3p}{(p-2)^4}\right]=0,$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to2}\left[(p-2)^3\frac{p}{(p+1)^2(p-2)^3}\right]=\lim_{p\to2}\frac{p}{(p+1)^2}=\frac{2}{9},$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to2}\left(\frac{d}{dp}\left[(p-2)^3\frac{p}{(p+1)^2(p-2)^3}\right]\right)=$$

$$=\lim_{p\to2}\left[\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{2p}{(p+1)^3}\right]=-\frac{1}{27},$$

$$A_{2,3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 2}\left(\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-2)^3\frac{p}{(p+1)^2(p-2)^3}\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\left[-\frac{4}{(p+1)^3}+\frac{6p}{(p+1)^4}\right]=0.$$

Таким образом,

$$F(p)=\frac{1}{27}\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{2}{9}\frac{1}{(p-2)^3}-\frac{1}{27}\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Используя формулу 4 таблицы, получим

$$f(t)=\frac{1}{27}te^{-t}+\frac{2}{9}\frac{t^2}{2}e^{2t}-\frac{1}{27}te^{2t}=\frac{t}{27}\left(e^{-t}+3te^{2t}-e^{2t}\right).$$

2.2. Найти оригинал изображения: а) $F(p)=e^{-2p}\dfrac{p}{p^2+4}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

Решение. а) По таблице находим, что $\dfrac{p}{p^2+4}\to\cos 2t$. Учитывая множитель e^{-2p} по теореме запаздывания, получим $e^{-2p}\dfrac{p}{p^2+4}\to\cos 2(t-2)$.

б) Разложим изображение на простейшие дроби

$\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}=\dfrac{Ap+B}{p^2+4}+\dfrac{Cp+D}{p^2+1}$, откуда

$$p=Ap^3+Ap+Bp^2+B+Cp^3+Dp^2+4Cp+4D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим

$$0=A+C,\quad 0=B+D,\quad 1=A+4C,\quad 0=B+4D,$$

откуда $A=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=B=0$. Таким образом,

$$\frac{p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}=-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}\to\frac{1}{3}\left(\cos t-\cos 2t\right).$$

2.3. Найти оригинал функции $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$, используя первую теорему разложения.

Решение. Разложим функцию в ряд по степеням $\frac{1}{p}$

$$\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{2!p^2}+\frac{1}{4!p^4}-\frac{1}{6!p^6}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2!p^3}+\frac{1}{4!p^5}-\frac{1}{6!p^7}+\ldots$$

Используя формулу (2), получим

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!2!}+\frac{t^4}{4!4!}-\frac{t^6}{6!6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{\left((2n!)\right)^2}.$$

19.3. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1°. Пусть дано обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t), \tag{1}$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — постоянные коэффициенты.

Требуется найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ldots,\quad x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа, переходим к операторному уравнению (или вспомогательному уравнению в изображениях)

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ — изображение искомого решения; $Q(p)$ — некоторый многочлен, зависящий от начальных условий (2); $F(p)$ — изображение функции $f(t)$. Решая операторное уравнение, получим

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

откуда, найдя оригинал для $X(p)$, находим искомое решение $x(t)$.

2°. При рассмотрении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами после использования преобразования Лапласа получим систему операторных уравнений линейных относительно изображений искомых функций. Решая систему операторных уравнений, находим изображения, откуда, переходя к оригиналам, получим искомое решение.

3.1. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

а) $x'' - 5x' + 6x = 2te^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

в) $y''' - y'' = e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$;

г) $y^{(4)} - y = \operatorname{sh} t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$.

Решение. а) Переходя к изображению

$$\left(p^2 X(p) - px(0) - x'(0)\right) - 5\left(pX(p) - x(0)\right) + 6X(p) = \frac{2}{(p-1)^2},$$

получим $\left(p^2 - 5p + 6\right) X(p) = \dfrac{2}{(p-1)^2}$, откуда

$$X(p)=\frac{2}{(p-2)(p-3)(p-1)^2}.$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие

$$\frac{2}{(p-2)(p-3)(p-1)^2}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{(p-1)^2}.$$

Приравняем числители

$$2=A(p-3)(p-1)^2+B(p-2)(p-1)^2+$$
$$+C(p-1)(p-3)(p-3)+D(p-3)(p-2).$$

Полагая $p=1$, получим $2=2D$, т. е. $D=1$; полагая $p=3$, получим $2=4B$, $B=\frac{1}{2}$; полагая $p=2$, получим $A=-2$. Сравним коэффициенты при p^3, тогда $0=A+B+C$, откуда $C=\frac{3}{2}$.

Таким образом, $X(p)=-\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{p-3}+\frac{3}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}$.

Переходя к оригиналу, окончательно будем иметь

$$x=-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^{t}+te^{t}=\left(t+\frac{3}{2}\right)e^{t}-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}.$$

б) Переходим к изображениям

$$\left(p^2-2p+2\right)Y(p)=2\frac{p-1}{(p-1)^2+1},$$

откуда $Y(p)=2\frac{p-1}{\left((p-1)^2+1\right)^2}$. Пользуясь табличной формулой (7) и теоремой смещения (6), будем иметь $y=te^{t}\sin t$.

в) Переходим к изображениям

$$\left(p^3Y(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)\right)-\left(p^2Y(p)-py(0)-y'(0)\right)=\frac{1}{p-1},$$

$$Y(p)p^2(p-1)=\frac{1+p(p-1)^2}{p-1},\quad Y(p)=\frac{1}{p^2(p-1)^2}+\frac{1}{p}.$$

Разложим рациональную дробь на простейшие

$$\frac{1}{p^2(p-1)^2}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{(p-1)^2}.$$

Приравниваем числители

$$1=A(p-1)^2+Bp(p-1)^2+Cp^2(p-1)+Dp^2.$$

Полагая $p=0$, получим $A=1$. Полагая $p=1$, находим, что $D=1$. Сравнивая коэффициенты при p^3 и p^2, будем иметь $0=B+C$, $0=A-2B-C+D$, откуда $B=2$, $C=-2$. Таким образом, $Y(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}$. Переходим к оригиналу:

$$y=x+3-2e^x+xe^x=x+3+(x-2)e^x.$$

г) Переходим к изображениям

$$\left(p^4Y(p)-p^3y(0)-p^2y'(0)-py''(0)-y'''(0)\right)-Y(p)=\frac{1}{p^2-1},$$

$$Y(p)=\frac{p^2}{(p^2-1)(p^4-1)}.$$

Разложим рациональную дробь на простейшие

$$\frac{p^2}{(p^2-1)(p^4-1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{(p+1)^2}+\frac{Ep+F}{p^2+1}$$

и приравняем числители

$$p^2=A(p-1)(p+1)^2(p^2+1)+B(p+1)^2(p^2+1)+$$
$$+C(p+1)(p-1)^2(p^2+1)+D(p-1)^2(p^2+1)+$$
$$+(Ep+F)(p-1)^2(p+1)^2.$$

Полагая $p=1$, получим $B=\frac{1}{8}$. Полагая $p=-1$, получим $D=\frac{1}{8}$. Полагая $p=i$ и приравнивая действительные и мнимые величины, получим $E=0$, $F=-\frac{1}{4}$. Сравним коэффициенты при p^5 и свободные члены, тогда

$$0=A+C+E,\quad 0=-A+C+B+D+F,$$

откуда $A=C=0$. Таким образом

$$Y(p)=\frac{1}{8}\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{p^2+1}.$$

Переходя к оригиналу, окончательно получим

$$y=\frac{1}{8}\left(te^t+te^{-t}\right)-\frac{1}{4}\sin t=\frac{1}{4}(t\operatorname{ch}t-\sin t).$$

3.2. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений: а) $x'-3x-4y=0,\quad y'-4x+3y=0;\quad x(0)=1,\quad y(0)=1;$ б) $x''-y'=0,\ x'-y''=2\cos t;\ x(0)=y'(0)=0,\ x'(0)=y(0)=2;$ в) $x'-y-z=0,\ y'-z-x=0,\ z'-x-y=0;\ x(0)=-1,\ y(0)=1,\ z(0)=0;$ г) $x''+y'=2\sin t,\ y''+z'=2\cos t,\ z''-x=0;\ x(0)=z(0)=y'(0)=0,$ $x'(0)=y(0)=-1,\quad z'(0)=1.$

Решение. а) Перейдя к изображениям, получим

$$\begin{cases} pX(p)-x(0)-3X(p)-4Y(p)=0,\\ pY(p)-y(0)-4X(p)+3Y(p)=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-3)X(p)-4Y(p)=1,\\ -4X(p)+(p+3)Y(p)=1. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $X(p), Y(p)$

$$X(p)=\frac{6}{5}\frac{1}{p-5}-\frac{1}{5}\frac{1}{p+5},\quad Y(p)=\frac{3}{5}\frac{1}{p-5}+\frac{2}{5}\frac{1}{p+5}.$$

Переходя к оригиналу, окончательно получим

$$x=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t},\quad y=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}.$$

б) Переходя к изображениям, получим

$$\begin{cases} p^2X(p)-px(0)-x'(0)-pY(p)+y(0)=0, \\ pX(p)-x(0)-p^2Y(p)+py(0)+y'(0)=\dfrac{2p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Подставляя граничные условия и разрешая систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, будем иметь

$$X(p)=\frac{2p^2}{p^4-1}=\frac{1}{p^2-1}+\frac{1}{p^2+1},\quad Y(p)=\frac{2p^3}{p^4-1}=\frac{p}{p^2-1}+\frac{p}{p^2+1}.$$

Переходя к оригиналу, окончательно получим

$$x=\operatorname{sh} t+\sin t,\quad y=\operatorname{ch} t+\cos t.$$

в) Переходя к изображениям, будем иметь

$$\begin{cases} pX(p)-x(0)-Y(p)-Z(p)=0, \\ pY(p)-y(0)-Z(p)-X(p)=0, \\ pZ(p)-z(0)-X(p)-Y(p)=0. \end{cases}$$

Подставляя граничные условия, получим

$$\begin{cases} pX(p)-Y(p)-Z(p)=-1, \\ -X(p)+pY(p)-Z(p)=1, \\ -X(p)-Y(p)+pZ(p)=0. \end{cases}$$

Разрешаем эту систему относительно $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$. Главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix}=p^3-3p-2.$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 0 & -1 & p \end{vmatrix}=-\frac{p^2-p-2}{p^3-3p-2}=-\frac{1}{p+1},$$

$$Y(p)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & p \end{vmatrix}=\frac{p^2-p-2}{p^3-3p-2}=\frac{1}{p+1}.$$

$$Z(p)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{0}{\Delta}=0.$$

Переходя к оригиналу, будем иметь

$$x=-e^{-t},\quad y=e^{t},\quad z=0.$$

г) Переходя к изображениям, получим

$$\begin{cases} p^2X(p)-px(0)-x'(0)+pY(p)-y(0)=\dfrac{2}{p^2+1}, \\ p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pZ(p)-z(0)=\dfrac{2p}{p^2+1}, \\ p^2Z(p)-pz(0)-z'(0)-X(p)=0. \end{cases}$$

Подставляя сюда граничные условия, будем иметь

$$\begin{cases} pX(p)+Y(p)=-\dfrac{2p}{p^2+1}, \\ pY(p)+Z(p)=-\dfrac{p^2-1}{p^2+1}, \\ -X(p)+p^2Z(p)=1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $X(p), Y(p), Z(p)$, получим

$$X(p)=-\frac{1}{p^2+1}, \quad Y(p)=-\frac{p}{p^2+1}, \quad Z(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Переходя к оригиналам, окончательно получим

$$x=-\sin t, \quad y=-\cos t, \quad z=\sin t.$$

Глава 20
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

20.1. Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных. Уравнения первого порядка

1°. Дифференциальным уравнением в частных производных называется равенство, содержащее независимые переменные, функцию от этих переменных и частные производные от неизвестной функции по независимым переменным. Уравнение в частных производных с искомой функцией z от двух независимых переменных x и y в общем случае имеет вид

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots\right) = 0, \qquad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение. Решением уравнения в частных производных называется функция, обращающая это уравнение в тождество. Под простейшим дифференциальным уравнением в частных производных будем понимать уравнение, позволяющее найти решение непосредственным интегрированием.

2°. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами вида

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z,$$

где $X=X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$.

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$ и найдем ее решения $\varphi(x,y,z)=C_1$, $\psi(x,y,z)=C_2$.

В этом случае общий интеграл исходного уравнения будет $\Phi(\varphi(x,y,z),\ \psi(x,y,z))=0$, где $\Phi(\varphi,\psi)$ — произвольная дифференцируемая функция от φ,ψ .

Уравнения в частных производных обычно имеют семейство решений, зависящее от произвольных функций, число которых определяется порядком дифференциального уравнения.

1.1. Решить дифференциальное уравнение: а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, где $z=z(x,y)$; б) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=0$.

Решение. а) Интегрируя дважды по x и представляя постоянные интегрирования функцией от y, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+\varphi(y),\quad z=x^3+x\varphi(y)+\psi(y),$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — произвольные функции.

б) Интегрируя дважды по x, получим $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf_1(y)+f_2(y)$.

Теперь интегрируем дважды по y

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_2(y)+f_3(y)+\varphi_1(x),$$

где $f_2(y)=\int f_1(y)dy$, $f_3(y)=\int f_2(y)dy$;

$$z=x\psi_1(y)+\psi_2(y)+y\varphi_1(x)+\varphi_2(x),$$

где $\psi_1(y)=\int f_2(y)dy$, $\psi_2(y)=\int f_3(y)dy$.

Уравнение 4-го порядка, следовательно, четыре произвольные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(y), \psi_2(y)$.

1.2. Решить уравнение: а) $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$; б) $zy\frac{\partial z}{\partial x}-zx\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

Решение. а) Составим систему уравнений $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$, откуда $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$, $\partial z=0$.

Решая уравнения, получим $x^2+y^2=C_1$, $z=C_2$. Общий интеграл примет вид $\Phi(x^2+y^2, z)=0$ или $z=\psi(x^2+y^2)$, где ψ - произвольная дифференцируемая функция от x^2+y^2.

б) Составим систему уравнений $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$, откуда $x^2-y^2=C_1$, $y^2-z^2=C_2$.

Общий интеграл будет $\Phi(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ или $z^2=y^2+\varphi(x^2-y^2)$, где φ – произвольная функция.

20.2. Классификация уравнений второго порядка и приведение к каноническому виду

1°. Уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных x и y в общем случае имеют вид

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (1)$$

где A, B, C — функции x и y; F — известная функция аргументов.

В зависимости от соотношений между коэффициентами уравнения в области D подразделяются на три основных типа:

$AC - B^2 < 0$ — уравнение гиперболического типа;

$AC - B^2 > 0$ — уравнение эллиптического типа;

$AC - B^2 = 0$ — уравнение параболического типа.

Дифференциальное уравнение

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \tag{2}$$

называется *характеристическим* для уравнения (1) и имеет два интеграла

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2, \tag{3}$$

которые называются *характеристиками*.

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка принято называть *уравнениями математической физики*.

2°. Для приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду используют характеристики.

Уравнение гиперболического типа имеет два семейства действительных и различных характеристик (3). Делая замену переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Для уравнения эллиптического типа общие интегралы уравнения характеристик комплексно сопряжены

$$\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C_{1,2},$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Делая замену $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

В случае уравнения параболического типа оба семейства характеристик совпадают, т. е. имеется только одна характеристика φ (x,y) = C. Делая замену $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная функция, независимая с $\varphi(x, y)$, для которой определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

получим каноническое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Приведение уравнения (1) к каноническому виду имеет практический интерес, поскольку решение значительно упрощается.

2.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Здесь $A = y^2$, $B = -xy$, $C = x^2$. Так как $AC - B^2 = x^2 y^2 - (xy)^2 = 0$, то данное уравнение параболического типа.

Уравнение характеристик имеет вид $y^2 dy^2 + 2xydxdy + x^2 dx^2 = 0$ или $(ydy + xdx)^2 = 0$. Интегрируя уравнение $ydy+xdx=0$, получим $x^2+y^2=C$. Сделаем замену переменных $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial \xi}x+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial \xi}y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$=2\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)x+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)y+2\frac{\partial u}{\partial \xi}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}y^2+2\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)y=2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)y.$$

Подставляем значения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в дифференциальное уравнение

$$x^2y^2 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+2xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-$$

$$-8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2x^2\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

Отсюда $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2x^2\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$

20.3. Метод Даламбера

Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — смещение точки струны, имеющей координату x, относительно положения равновесия в момент времени t. Здесь $a^2 = \frac{T}{\rho}$, T — натяжение, а ρ — линейная плотность струны.

Будем искать решение задачи Коши для бесконечной струны $-\infty < x < \infty$, т. е. когда концы струны не оказывают заметного влияния на колебания в средней части. Для определения закона колебаний струны необходимо знать в начальный момент положения точек струны и их скорость. Эти параметры определяются начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции.

Используем для решения уравнения колебаний струны метод характеристик (метод Даламбера), который основывается на замене переменных $\xi = x + at$, $\eta = x - at$. Уравнение (1) в этом случае приводится к каноническому уравнению вида $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, которое имеет общее решение $u(\xi,\eta) = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)$, где Φ_1, Φ_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Возвращаясь к старым переменным x,t и выбирая функции Φ_1, Φ_2 таким образом, чтобы функция $u = u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (2), приходим к решению исходного уравнения (1) в форме Даламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (3)$$

3.1. Найти решение волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для бесконечной струны ($-\infty < x < \infty,\ t > 0$) при начальных условиях:

$$u(x,0)=e^{-x^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin 2x.$$

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера, учитывая, что $a = 1$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x-t)^2}+e^{-(x+t)^2}\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{dz}{\sin 2z}=e^{-(x^2+t^2)}\,\frac{e^{2xt}+e^{-2xt}}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{d\,\mathrm{tg}\,z}{2\,\mathrm{tg}\,z}=e^{-(x^2+t^2)}\,\mathrm{ch}\,2xt+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x+t)}{\mathrm{tg}(x-t)}\right|.$$

20.4. Метод разделения переменных

Решение, найденное методом разделения переменных (иногда его называют методом Фурье), получают обычно в форме бесконечного ряда, отрезок же этого ряда дает приближенное решение уравнения.

4.1. Найти частное решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=f(x),\ u'_t(x,0)=F(x), \qquad (3)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ заданы в интервале $[0,l]$, причем $f(0)=F(l)=0$.

Решение. В такой постановке уравнение описывает процесс колебаний струны длиной l, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$. Смещение точки струны относительно положения равновесия зависит от x и от времени t: $u = u\,(x,t)$.

Здесь $a^2 = \dfrac{t}{\rho}$, где T — натяжение, а ρ — линейная плотность струны.

Если под $u\,(x,t)$ понимать ток или напряжение, а $a^2 = \dfrac{1}{CL}$, где C — емкость, L — индуктивность, то волновое уравнение описывает процесс электрических колебаний в проводах.

Если под $u\,(x,t)$ понимать продольное удлинение, а $a^2 = \dfrac{1}{v^2}$, где v — скорость распространения динамических усилий вдоль стержня, то волновое уравнение описывает процесс распространения продольных колебаний в стержне.

Одно и то же дифференциальное уравнение описывает совершенно различные физические задачи лишь только потому, что эти задачи имеют один и тот же характер поведения искомых величин. Для определенности рассмотрим уравнение малых колебаний струны.

Волновое уравнение является уравнением гиперболического типа. Будем искать его решение методом Фурье. Представим решение в виде произведения двух функций

$$u=X(x)T(t), \tag{4}$$

из которых одна зависит только от x, а другая только от y (разделение переменных).

Поскольку нас интересует ненулевое решение $u \neq 0$, то $X(x) \neq 0$ и $T(t) \neq 0$. Подставляя (4) в уравнение (1), получим $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$ или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (5)$$

Так как левая часть не зависит от x, а правая от t, то равенство (5) возможно лишь в том случае, когда обе части равны одной и той же постоянной величине, которую мы обозначим через $-\lambda$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (6)$$

и

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \cdot \qquad (7)$$

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (6) и выясним, при каком значении λ оно имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям (2).

Числовые значения λ называют *собственными значениями* (числами), а соответствующие им ненулевые решения – *собственными функциями*, поэтому этот метод встречается под названием метода собственных функций. (Поставленную таким образом задачу часто называют *задачей Штурма-Лиувилля*).

Исследуем три случая.

1. $\lambda < 0$. Тогда характеристическое уравнение $r^2 + \lambda = 0$ имеет различные вещественные корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ и общее решение будет $X = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

Удовлетворяя граничным условиям (2), имеем

$$0 = C_1 + C_2,$$
$$0 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и решение будет нулевым.

2. $\lambda = 0$. Тогда уравнение (6) примет вид $X'' = 0$, а решение будет $X = C_1 x + C_2$.

Удовлетворяя граничным условиям (2), получим $0 = C_1 0 + C_2$; $0 = C_1 l + C_2$. Откуда $C_1 = C_2 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda > 0$. Характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ и общее решение будет $X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Из граничных условий (2) имеем $0 = C_1$, $0 = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l$.

Чтобы получить ненулевое решение полагаем, что $C_2 \neq 0$, а $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Отсюда

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad (k=1,2, \ldots.) \tag{8}$$

и ненулевое решение примет вид

$$X_k = C_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad (k=1,2, \ldots.). \tag{9}$$

Подставляя λ_k в уравнение (7), получим $T_k'' = \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0$. Общее решение этого уравнения будет

$$T_k = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t = 0, \tag{10}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные.

Подставляя найденные решения (9),(10) в (4), находим

$$u(x,t) = \left(a_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + b_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$ — произвольные постоянные.

Вследствие линейности и однородности решаемого уравнения сумма его решений также будет его решением

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+b_k\sin\frac{ak\pi}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x. \quad (11)$$

Из начальных условий (3) находим произвольные постоянные a_k, b_k. Из первого условия получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}t)=f(x). \quad (12)$$

Дифференцируя (11) по t, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}(-a_k\sin\frac{ak\pi}{l}t+b_k\cos\frac{ak\pi}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Используя второе условие (3), отсюда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x=F(x). \quad (13)$$

Выражения (12), (13) представляют собой разложения функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряды Фурье по синусам на интервале $[0,l]$. Отсюда коэффициенты a_k, b_k будут

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \quad (k=1,2, ...).$$

Таким образом, решение (11), при найденных значениях a_k, b_k, является искомым решением волнового уравнения, удовлетворяющим заданным граничным (2) и начальным (3) условиям.

4.2. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 \le x \le l) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \tag{3}$$

Решение. Уравнение (1) является уравнением параболического типа и описывает процесс распространения тепла $u(x,t)$ в однородном теплоизолированном с боков стержне длины l; t — время; a — коэффициент температуропроводности.

Решение будем искать методом Фурье

$$u = X(x)T(t), \tag{4}$$

где функция $X=X(x)$ — зависит только от x, а $T = T(t)$ — только от t, причем $X \ne 0$ и $T \ne 0$.

Подставляя (4) в (1), будем иметь $X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$ или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку левая часть зависит только от t, а правая только от x, то равенство возможно, если обе части равны одной и той же величине. Обозначим ее через $-\lambda$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0. \tag{6}$$

Мы уже показали, что ненулевые решения уравнения (5) существуют только при $\lambda = -\lambda_k$ (см.(8) задача 4.1.) и имеют вид (9) см. там же.

Подставим λ в уравнение (6) и представим его в виде $T' + (\frac{ak\pi}{l})^2 T = 0$. Его общим решением будет $T_k = A_k e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t}$, где A_k — произвольные постоянные. Таким образом, решение (4) уравнения (1) будет

$$u_k(x,t)=b_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (k=1,2, \dots),$$

где $b_k=C_kA_k$ — произвольные постоянные.

Нетрудно заметить, что

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{7}$$

также является решением уравнения (1), удовлеторяющим граничным условиям (3).

Выберем теперь коэффициенты b_k таким образом, чтобы функция (7) удовлетворяла и начальному условию (2). Подставляя (7) в (2), получим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\,. \tag{8}$$

Выражение (8) представляет разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам.

Отсюда

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\,. \tag{9}$$

Таким образом, сумма ряда (7), где коэффициенты b_k определяются по формулам (9), есть частное решение уравнения теплопроводности (1).

Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x;\ x<\dfrac{l}{2}, \\ 1-x;\ x>\dfrac{l}{2}, \end{cases}$$

тогда по формуле (9) коэффициенты равны

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{k\pi}{l}xdx + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx =$$

$$= \frac{2}{l}\Big(-\frac{xl}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}} + \frac{l}{k\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k\pi}{l}xdx + 2\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}xdx -$$

$$-\frac{2}{l}\Big(-\frac{xl}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l} + \frac{l}{k\pi}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{4l}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

Решение (7) в этом случае примет вид

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x\,.$$

4.3. Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

для прямоугольника, удовлетворяющее граничным условиям:

а)

$$u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при} \quad y = \dfrac{b}{2}; \\ \varphi_2(x) & \text{при} \quad y = -\dfrac{b}{2}; \\ 0 & \text{при} \quad x = 0,\ x = a; \end{cases} \qquad (2)$$

б)

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y = \pm\dfrac{b}{2}; \\ \psi_1(x) & \text{при} \quad x = 0; \\ \psi_2(x) & \text{при} \quad x = a; \end{cases} \qquad (2')$$

в)

$$u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при} \quad y = \dfrac{b}{2}; \\ \varphi_2(x) & \text{при} \quad y = -\dfrac{b}{2}; \\ \psi_1(x) & \text{при} \quad x = 0; \\ \psi_2(x) & \text{при} \quad x = a; \end{cases} \tag{2''}$$

Решение. а) Уравнение Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ является уравнением эллиптического типа. Поскольку по условию требуется найти решение уравнения Лапласа в области D, удовлетворяющее на замкнутом контуре L, ограничивающим область D, заданным граничным условиям, то имеет место *задача Дирихле*. Воспользуемся методом Фурье. Представим решение в виде произведения двух функций

$$u=X(x)\,Y(y), \tag{3}$$

которое удовлетворяло бы уравнению (1) и последнему из условий (2).

Подставляя (3) в (1), находим $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = -\lambda$. Отсюда

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0. \tag{4}$$

Функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0)=X(a)=0. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (4) будет

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), находим $C_1=0$, $C_1 \cos \lambda\, a + C_2 \sin \lambda\, a = 0$.

Таким образом, ненулевое решение будет, если $C_2 \neq 0$, а $\sin \lambda a = 0$, откуда $\lambda a = \pi k$ $(k=1,2,3, \ldots)$. или $\lambda = \dfrac{k\pi}{a}$. Окончательно, решение при $\lambda = \dfrac{k\pi}{a}$ примет вид

$$X(x) = C\sin\frac{k\pi x}{a} \quad (k=1,2,3,\ \ldots.).$$

Подставляя во $-\lambda^2 = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ второе из уравнений (4), получим

$$Y'' - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y = 0. \tag{7}$$

Находя корни соответствующего характеристического уравнения, решение уравнения (7) примет вид

$$Y = C_1' e^{\frac{k\pi}{a}y} + C_2' e^{-\frac{k\pi}{a}y} = C_1 \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}y + C_2 \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, основное решение (3) будет

$$u = (A\operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}y + B\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y)\sin\frac{k\pi}{a}x,$$

где A, B — произвольные постоянные.

Представим решение в виде суммы основных решений

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y)\sin\frac{k\pi}{a}x. \tag{8}$$

Функция u удовлетворяет уравнению Лапласа и последнему из условий (2). Подберем постоянные A_k и B_k так, чтобы удовлетворились первые два из условий (2)

$$\begin{aligned} u(x,\frac{b}{2}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a} + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a})\sin\frac{k\pi}{a}x = \varphi_1(x). \\ u(x,-\frac{b}{2}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a} - B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a})\sin\frac{k\pi}{a}x = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Разлагая функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды Фурье по синусам на промежутке $(0, a)$, получим

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{a};\quad \varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{a},\tag{10}$$

где $a_k=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_1(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx;\quad b_k=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_2(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx.$

Сравнивая коэффициенты рядов (9) и (10), имеем

$$A_k\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}+B_k\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a}=a_k,$$

$$A_k\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}-B_k\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a}=b_k.$$

Определяя отсюда коэффициенты A_k, B_k и подставляя в (8), получим

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k+b_k}{2\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{a}+\frac{a_k-b_k}{2\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{a}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}.\tag{11}$$

Если $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi(x)$, то $a_k=b_k=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx$

и выражение (11) примет вид

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}}\sin\frac{k\pi x}{a}.$$

б) Чтобы воспользоваться результатами предыдущего решения, введем новые координаты $x'=y+\frac{b}{2}$, $y'=x-\frac{a}{2}$, тогда граничные условия (2') приводятся к виду (2) и числа a и b меняются ролями, а в решение (11) вместо функций φ_1 и φ_2 войдут ψ_1 и ψ_2. Если вернуться к переменным x и y, то решение примет вид

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_k+b_k}{2\operatorname{ch}\frac{k\pi a}{2b}}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)+$$

$$+\frac{a_k-b_k}{2\operatorname{sh}\frac{k\pi a}{2b}}\operatorname{sh}\frac{k\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\Big)\sin\frac{k\pi}{b}\Big(y-\frac{b}{2}\Big). \qquad (12)$$

где

$$a_k=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_1(y)\sin\frac{k\pi}{b}\Big(y+\frac{b}{2}\Big)dy,$$

$$b_k=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_2(y)\sin\frac{k\pi}{b}\Big(y+\frac{b}{2}\Big)dy,$$

в) Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям (2''), равно сумме решений (11) и (12).

4.4. Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u=0 \qquad (1)$$

для прямоугольника, удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{при} \quad x{=}0,\, x=a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{cases}\varphi_1(x) & \text{при} \quad y=\dfrac{b}{2};\\[2mm] \varphi_2(x) & \text{при} \quad y=-\dfrac{b}{2}.\end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Поскольку на границе заданы производные, то имеет место вторая основная граничная задача — *задача Неймана*. Решаем задачу методом Фурье.

Решение ищем в виде

$$u=X(x)\,Y(y), \qquad (3)$$

тогда $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$, откуда

$$X''+\lambda^2 X=0, \qquad Y''-\lambda^2 Y=0. \tag{4}$$

Чтобы решение (3) удовлетворяло первому из граничных условий (2), необходимо

$$X'(0)=X'(a)=0. \tag{5}$$

Общее решение первого уравнения (4) будет $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$. Из условий (5) следет, что $X'(x)=-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda\ C_2\cos\lambda x$ и при $x=0$ $C_2=0$, $\sin\lambda a=0$ и $\lambda=\frac{k\pi}{a}$ (k=0,1,2, ...). Таким образом,

$$X(x)=C\cos\lambda x.$$

Решая вторoе уравнение (4)(см. предыдщий пример 4.1, а), окончательное решение примет вид

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi y}{a}+B_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi y}{a})\cos\frac{k\pi}{a}x+A_0y+B_0, \tag{6}$$

где A_0, B_0 — неопределенные коэффициенты, отвечающие случаю k=0.

Из вторых граничных условий (2) имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}(A_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi b}{2a}+B_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi b}{2a})\cos\frac{k\pi}{a}x+A_0=\varphi_1(x),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}(-A_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi b}{2a}+B_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi b}{2a})\cos\frac{k\pi}{a}x+A_0=\varphi_2(x). \tag{7}$$

Разлагая $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды по $\cos\frac{k\pi}{a}x$ в промежутке $(0, a)$ имеем

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{a},\quad \varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cos\frac{k\pi x}{a}, \tag{8}$$

где $a_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_1(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \quad b_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_2(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx.$

Из сравнения коэффициентов рядов (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} &A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a} + B_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a} = \frac{a}{k\pi}a_k, \\ &-A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a} + B_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a} = \frac{a}{k\pi}b_k \end{aligned} \quad (k=1,2,\ldots). \tag{9}$$

Для $k=0$ из (9) непосредственно получим $A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad B_0 = \frac{b_0}{2}$. Последние равенства удовлетворяются только, если $a_0=b_0$. Определяя A_k, B_k *из* системы (9) и подставляя их в (6), окончательно получим

$$u = \frac{a_0}{2}y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - b_k}{\frac{2k\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{a} + \frac{a_k + b_k}{\frac{2k\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{a}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}.$$

4.5. Найти решение уравнения Лапласа, заданного в полярной системе координат

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию периодичности как функции θ $u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$ и граничным условиям: а) на окружности

$$u(R_1,\theta) = \varphi_1(\theta), \quad u(R_2,\theta) = \varphi_2(\theta), \tag{2}$$

т. е. для кольца $-\infty < \theta < \infty$, $R_1 < r < R_2$; б) для круга $u(R,\theta) = \varphi(\theta)$, $0 < r < R$, $-\infty < \theta < \infty$; в) внешности круга $u(R,\theta) = \varphi(\theta)$, $R < r < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$.

Решение. а) Воспользуемся методом Фурье. Представим решение в виде $u = R(r)T(\theta)$ и подставим его в (1)

$$\frac{T''(\theta)}{T} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2. \tag{3}$$

Первое из уравнений (3) $T''(\theta)+k^2T=0$ имеет решение

$$T(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta. \tag{4}$$

Для того чтобы было удовлетворено условие периодичности требуется, чтобы k было целым числом $k=0,1,2,\ldots$. Второе из уравнений (3) будет

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0. \tag{5}$$

При $k=0$ решение уравнения (5) имеет вид

$$R(r)=A_0\ln r+B_0. \tag{6}$$

Если $k>0$, то решение ищем в виде $R(r)=r^m$, что дает $r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0$ или $r^m(m^2-k^2)=0$, т. е. $m=\pm k$. Следовательно,

$$R(r)=Ar^k+Br^{-k}. \tag{7}$$

Суммируя решения (4),(6) и (7), окончательно получим

$$u(r\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}((A_kr^k+B_kr^{-k})\cos k\theta+(C_kr^k+D_kr^{-k})\sin k\theta)+A_0\ln r+B_0 \tag{8}$$

Для определения неопределенных коэффициентов разлагаем функции $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ в ряды Фурье

$$\varphi_1(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),$$
$$\varphi_2(\theta)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta). \tag{9}$$

Пользуясь граничными условиями (2) и приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах в (8) и (9), получим для определения коэффициентов следующие выражения

$$A_kR_1^k+B_kR_1^{-k}=a_k,\quad C_kR_1^k+D_kR_1^{-k}=b_k,\quad A_kR_2^k+B_kR_2^{-k}=c_k,$$
$$C_kR_2^k+D_kR_2^{-k}=d_k,\quad A_0\ln R_1+B_0=\frac{a_0}{2},\quad A_0\ln R_2+B_0=\frac{c_0}{2}\ . \tag{10}$$

Находя отсюда значения коэффициентов и подставляя в выражение (8), окончательно получим

$$u = \frac{c_0 - a_0}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} \ln r + \frac{a_0 \ln R_2 - c_0 \ln R_1}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(a_k R_2^{-k} - c_k R_1^{-k}) r^k - (a_k R_2^k - c_k R_1^k) r^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_1^{-k} R_2^k} \cos k\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{(b_k R_2^{-k} - d_k R_1^{-k}) r^k - (b_k R_2^k - d_k R_1^k) r^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_1^{-k} R_2^k} \sin k\theta \right).$$

б) В решениях (6),(7) для круга $A_0 = 0$ и $B = 0$, т.к. в противном случае в точке $r = 0$ функция имела бы разрыв. Отсюда, из последних выражений (10), $B_0 = \frac{a_0}{2}$ и $B_0 = \frac{c_0}{2}$, т. е. решение возможно только при $a_0 = c_0$.

Решение (8) в этом случае примет вид

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + C_k \sin k\theta) r^k.$$

Неопределенные коэффициенты A_k и C_k находим из граничного условия. Разлагая $\varphi(\theta)$ в ряд Фурье в промежутке $[0,2\pi]$, получим

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + C_k \sin k\theta) R^k,$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau$, $A_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos k\tau d\tau$, $C_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin k\tau d\tau$.

Таким образом,

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^k (\cos k\tau \cos k\theta + \sin k\tau \sin k\theta) \varphi(\tau) d\tau.$$

в) Полагая в решении (11) $R_1 = R$ и $R_2 \to \infty$, находим

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-a_k r^{-k}}{-R^{-k}}\cos k\theta+\frac{-b_k r^{-k}}{-R^{-k}}\sin k\theta\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta).$$

4.6. Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u=f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u=0 \text{ при } x=0,\quad y=0,\quad x=a,\quad y=b. \tag{2}$$

Решение. По методу Фурье ищем фундаментальные функции уравнения $\Delta u=\lambda u$, удовлеторяющие граничным условиям (2). Принимая решение в виде производения $u=X(x)\,Y(y)$, будем иметь $X''Y+XY''=\lambda XY$. Откуда

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=\lambda.$$

Последнее выражение возможно при условии, что $\frac{X''}{X}=p$, $\frac{Y''}{Y}=q$, где p и q — постоянные величины. Решая эти уравнения при граничных условиях $X(0)=X(a)=0$, $Y(0)=Y(b)=0$, находим (см.4.1), что нетривиальное решение $X_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$, $Y_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$ существует только при условии $p=-\frac{m^2\pi^2}{a^2}$, $q=-\frac{n^2\pi^2}{b^2}$ $(m,n=1,2,3,....)$.

Функции

$$u_{m,n}=X_mY_n=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{3}$$

ортогональны между собой и образуют полную систему функций в заданной области. Подставляя (3) в левую часть уравнения (1) получим

$$\Delta X_mY_n=-\pi\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)X_mY_n. \tag{4}$$

Раскладывая в двойной ряд Фурье по функциям $u_{m,n}$ функцию $f(x,y)$, будем иметь

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{5}$$

где $a_{m,n}=\dfrac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\alpha,\beta)\sin\dfrac{m\pi\alpha}{a}\sin\dfrac{n\pi\beta}{b}d\alpha d\beta.$

Приравнивая (4) и (5), с учетом выражения (3), будем иметь

$$u(x,y)=-\sum_m\sum_n\frac{a_{m,n}}{\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Подставив сюда вместо коэффициентов Фурье $a_{m,n}$ их выражения, окончательно получим

$$u(x,y)=-\sum_m\sum_n\frac{4\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\alpha,\beta)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\sin\frac{n\pi\beta}{b}d\alpha d\beta.$$

4.7. Найти решение уравнения колебаний прямоугольной мембраны с закрепленными краями

$$\Delta w-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

при $t=0$ $\quad w=\varphi(x,y);\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}=\psi(x,y)$ (2)

на границе S перемещения

$$w=0. \tag{3}$$

Решение. Пусть $0<x<a$, $0<y<b$. Полагая

$$w=W(x,y)T(t), \tag{4}$$

где $W(x,y)$ — функция только от x и y, $T(t)$ — функция только от t, из уравнения (1) будем иметь

$$(W''_{xx} + W''_{yy})T - \frac{1}{c^2}WT'' = 0.$$

Разделив последнее равенство на WT, получим условие разделения переменных

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda, \tag{5}$$

где λ — некоторая постоянная.

Из равенства (5), с учетом условий (3), имеем следующую двумерную задачу о собственных значениях и собственных функциях

$$\Delta W + \lambda W = 0, \quad W\big|_S = 0. \tag{6}$$

Полагая $W(x,y) = X(x)Y(y)$, где $X(x)$ — функция только от x, $Y(y)$ — функция только от y, из уравнения (6) получим

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \lambda = \nu = \text{const}.$$

Учитывая нулевые граничные условия $W\big|_S = 0$, получаем следующие задачи о собственных значениях и собственных функциях для определения X и Y

$$X'' + \nu X = 0, \quad X = 0 \quad \textit{при} \quad x = 0,\ x = a, \tag{7}$$

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad Y = 0 \quad \textit{при} \quad y = 0,\ y = b, \tag{8}$$

где ν и $\nu + \mu = \lambda$ — постоянные.

Собственные значения и собственные функции задачи (7) и (8), соответственно, имеют вид

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \nu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$Y_m = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{m\pi}{b}y, \quad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, собственные значения и собственные функции двумерной задачи Штурма – Лиувилля (6) будут

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right), \quad W_{nm}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y. \quad (9)$$

Подставляя λ_{nm} в (5), получим $T''_{nm} + c^2\lambda_{nm}T_{nm} = 0$.

Общее решение этого уравнения будет

$$T_{nm} = A_{nm}\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t + B_{nm}\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t, \quad (10)$$

где A_{nm} и B_{nm} — произвольные постоянные.

Подставляя (9) и (10) в (4), решение уравнения (1) примет вид

$$w(x,y,t) = \sum_n\sum_m W_{nm}(x,y)\left(A_{nm}\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t + B_{nm}\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t\right). \quad (11)$$

При определении произвольных постоянных A_{nm} и B_{nm} воспользуемся начальными условиями (2). Разложим функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в двойные ряды Фурье по синусам кратных аргументов

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sum_n\sum_m a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$\psi(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sum_n\sum_m b_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

где

$$a_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy,$$

$$b_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\int_0^a\int_0^b \psi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy.$$

Из первого начального условия (2), при $t = 0$ в выражении (11), путем сравнения коэффициентов при синусах кратных аргументов имеем $A_{nm} = a_{nm}$.

Дифференцируя ряд (11) по t, из второго начального условия (2) при $t = 0$ имеем $B_{nm} = \dfrac{b_{nm}}{c\sqrt{\lambda_{nm}}}$.

Подставляя значения A_{nm} и B_{nm} в решение (11), окончательно получим

$$u(x,y,t)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sum_n\sum_m\left(a_{nm}\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t+\frac{b_{nm}}{c\sqrt{\lambda_{nm}}}\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

4.8. Найти решение уравнения колебаний круглой мембраны с закрепленными краями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w=\varphi(\rho,\theta),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\psi(\rho,\theta) \qquad при \quad t=0 \qquad (2)$$

и граничным

$$w=0 \quad при \quad \rho=1. \qquad (3)$$

Решение. Применяя метод разделения переменных, полагаем

$$w=W(\rho,\theta)T(t), \qquad (4)$$

где W — функция только от ρ и θ, T — функция только от t.

Подставляя (4) в (1), получим

$$T\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}T+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}T-WT''_{tt}=0.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{\Delta W}{W}=\frac{\partial T''}{\partial T}=-\lambda, \qquad (5)$$

где λ — постоянная.

Из равенства (5) и граничных условий (3) получаем следующую задачу Штурма – Лиувилля

$$\Delta W + \lambda W = 0, \qquad W\big|_{\rho=1} = 0. \tag{6}$$

При решении уравнения (6) еще раз применим метод Фурье

$$W = R(\rho)\Phi(\theta), \tag{7}$$

где R — функция только от ρ, Φ — функция только от θ.

Подставляя (7) в (6), получим

$$R''\Phi + \frac{1}{\rho}R'\Phi + \frac{1}{\rho^2}R\Phi'' + \lambda R\Phi = 0.$$

Умножая последнее равенство на ρ^2 и деля на $R\Phi$, будем иметь

$$\rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu. \tag{8}$$

Учитывая, что функция $\Phi(\theta)$ имеет период равный 2π, из выражений (8) получаем

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \qquad \Phi(2\pi) = \Phi(0). \tag{9}$$

Ненулевые решения уравнения (9) существуют только при $\nu = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и имеют вид

$$\Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Из условий (8) имеем

$$\rho^2R'' + \rho R' + \left(\lambda\rho^2 - n^2\right)R = 0, \tag{10}$$

т. е. задача сводится к решению уравнения Бесселя.

Учитывая (3), что функция $R(\rho)$ обращается в нуль при $\rho = 1$ и должна быть ограничена при $\rho = 0$

$$R\big|_{\rho=1} = 0 \quad \text{и} \quad R\big|_{\rho=0} \neq \infty, \tag{11}$$

решение уравнения (10) выражается через функции Бесселя $I_n(x)$. Отсюда, собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля (10), (11), ортонормированные с весом ρ, определяются выражениями

$$\lambda_{mn}=\left(\mu_m^{(n)}\right)^2, \qquad R_{mn}(\rho)=\frac{I_m\left(\rho\mu_m^{(n)}\right)}{\sqrt{\int_0^1 I_n^2\left(\rho\mu_m^{(n)}\right)\rho d\rho}}, \quad (m=1,2,...)$$

$$\mu_m^{(n)}=m\pi+\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \text{ — корни уравнения } I_n(x)=0.$$

Собственные числа и собственные функции двумерной задачи (6) будут

$$\lambda_{mn}=\left(\mu_m^{(n)}\right)^2, \quad R_{mn}(\rho)\Phi_n(\theta), \quad R_{mn}(\rho)\Phi_n^*(\theta), \qquad (12)$$

где $\Phi_0(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\Phi_n(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta$, $\Phi_n^*(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta$ — ортонормированные собственные функции задачи (9).

Из условия разделимости переменных (5), для каждого собственного значения λ_{mn} имеем $T''_{mn}+\lambda_{mn}T_{mn}=0$. Решением этого уравнения будут линейно независимые функции

$$T_{mn}(t)=\cos\mu_m^{(n)}t, \quad T_{mn}=1, \quad T'_{mn}=0 \quad при \quad t=0,$$

$$T^*_{mn}(t)=\frac{1}{\mu_m^{(n)}}\sin\mu_m^{(n)}t, \quad T^*_{mn}=0, \quad T^{*\prime}_{mn}=1 \quad при \quad t=0. \qquad (13)$$

Раскладывая начальные функции $\varphi(\rho,\theta)$ и $\psi(\rho,\theta)$ в ряды Фурье по собственным функциям (12), будем иметь

$$\varphi(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\Phi_n(\theta)+a^*_{mn}\Phi^*_n(\theta)\right)R_{mn}(\rho),$$

$$\psi(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_{mn}\Phi_n(\theta)+b^*_{mn}\Phi^*_n(\theta)\right)R_{mn}(\rho), \qquad (14)$$

где a_{mn}, b_{mn}, a^*_{mn} и b^*_{mn} — коэффициенты ряда Фурье.

Учитывая, что начальные условия (2) в силу (13), (14) выполняются, а также выражения (4), (7), решение уравнения (1) примет вид

$$w(\rho,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(a_{mn}\Phi_n(\theta)+a_{mn}^{*}\Phi_{mn}^{*}(\theta)\right)R_{mn}(\rho)T_{mn}(t)+\right.$$

$$\left.+\left(b_{mn}\Phi_n(\theta)+b_{mn}^{*}\Phi_{mn}^{*}(\theta)\right)R_{mn}(\rho)T_{mn}^{*}(t)\right).$$

4.9. Найти решение дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки

$$\Delta\Delta w=\frac{q(x,y)}{D}, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\quad y=b,$$

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=\pm\frac{a}{2}, \tag{2}$$

где $\Delta\Delta w=\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}$; $q(x,y)$ — поверхностная нагрузка, приложенная по нормали к верхней грани; D — цилиндрическая жесткость; $w(x,y)$ — прогиб пластинки.

Решение. Сведем решение задачи к решению однородного уравнения. Для этого представим частное решение в виде многочлена 4-й степени от y, удовлетворяющее уравнению (1) и первому из условий (2)

$$w_0=\frac{qb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4}-2\frac{y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right). \tag{3}$$

Вообще-то, здесь частное решение w_0 принято в форме прогиба свободно опертой балки длины b при равномерной нагрузке q/D.

Обозначим за w_1 разность $w - w_0 = w_1$, тогда функция $w_1(x,y)$ будет решением бигармонического уравнения $\Delta\Delta w_1 = 0$ при граничных условиях

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \quad \textit{при} \quad y = 0, \quad y = b,$$

$$w_1 = -\frac{qb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4} - 2\frac{y^3}{b^3} + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \textit{при} \quad x = \pm\frac{a}{2}. \tag{4}$$

При решении бигармонического уравнения воспользуемся методом разделения переменных. Пусть $w_1 = X(x)Y(y)$, тогда получим

$$X^{IV}Y + 2X''Y'' + XY^{IV} = 0. \tag{5}$$

Для того чтобы получить уравнение только относительно функции X, достаточно взять функцию Y в виде

$$Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что искомая функция Y удовлетворяет всем первым четырем условиям из граничных условий (4). Естественно, решение (5) не имеет общего характера и применимо не к любой бигармонической задаче, а лишь только к задачам, аналогичным рассматриваемой, т. е. лишь к задачам при специальных граничных условиях.

Подставляя (6) в (5), получим уравнение

$$X^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X^{II} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 X = 0,$$

решение которого имеет вид

$$X_n = a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b} + b_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + c_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + d_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}.$$

Таким образом, искомое решение будет

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{7}$$

В силу вторых граничных условий (4) решение должно быть четной функцией x, следовательно, коэффициенты c_n и d_n равны нулю. Для определения коэффициентов a_n, b_n разложим правую часть первого из вторых условий (4) в ряд Фурье

$$w_1 = -\frac{qb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4} - 2\frac{y^3}{b^3} + \frac{y}{b}\right) = -\frac{qb^4}{\pi^5 D}\sum_n \frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (n=1,2,...). \tag{8}$$

Из условий (4),(8) имеем систему

$$a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b} + b_n \frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b} = -\frac{4qb^4}{\pi^5 D n^5},$$

$$a_n \frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b} + b_n \frac{n^2\pi^2}{b^2}\left(2\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b} + \frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}\right) = -0,$$

где a_n, b_n с четными номерами равны нулю, т. е. $n = 1,3, ...$.

Решая данную систему относительно a_n, b_n и подставляя в (7), после простых преобразований окончательно получим

$$w = w_1 + w_0 = \frac{4qb^4}{\pi^5 D}\sum_n \frac{1}{n^5}\cdot$$

$$\left(1 - \frac{2\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b} + \frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}}{1 + \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{b}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Наличие множителя $\frac{1}{n^5}$ под знаком суммы обеспечивает хорошую сходимость ряда и для практических расчетов достаточно ограничиться первым членом.

20.5. Применение двойных и ординарных тригонометрических рядов к решению дифференциальных уравнений

1°. Использование двойных тригонометрических рядов.

5.1. Найти решение уравнения изгиба прямоугольной пластинки

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D}, \qquad (1)$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$\begin{matrix} x=0, & x=a, & w=0, \\ y=0, & x=b, & w=0, \end{matrix} \qquad (2)$$

где w — перемещение по оси z, прогиб пластинки; $q(x,y)$ — поверхностная нагрузка, приложенная к верхней грани; D — цилиндрическая жесткость.

Решение. Уравнение (1) представляет дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Граничные условия (2) показывают, что пластинка свободно оперта по всем четырем кромкам. Интегрирование будем производить методом разделения переменных, используя для этих целей двойные тригонометрические ряды

$$w=\sum_m \sum_n a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \qquad (3)$$

где a_{mn} — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Представляя нагрузку $q(x,y)$ в виде ряда Фурье

$$q(x,y)=\sum_m \sum_n q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \qquad (4)$$

и подставляя (3), (4) в уравнение (1), получим

$$\sum_m \sum_n a_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях тригонометрических функций, получим

$$a_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}.$$

Отсюда общее решение примет вид

$$w = \sum_m \sum_n \frac{q_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Для определения козффициентов разложения нагрузки $q(x,y)$ в двойной тригонометрический ряд воспользуемся общим методом разложения функции в ряды Фурье

$$q_n = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dxdy.$$

2°. Применение ординарных тригонометрических рядов к решению уравнений.

5.2. Найти решение уравнения изгиба пластинки (1), удовлетворяющее на опорах граничным условиям

$$x = 0, \quad x = a, \quad w = 0 \tag{5}$$

и жестко заделанной на кромках $y = \pm \frac{b}{2}$.

Решение. Расположим координатные оси как показано на рис. 20.1.

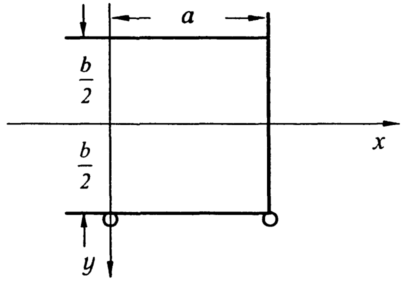

Рис. 20.1

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (5), будем искать в виде ряда

$$w = \sum_m f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{6}$$

где $f_m(y)$ — неизвестные функции от y. Подставляя (6) в уравнение (1), получим

$$\sum_m \left[f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} q(x, y). \tag{7}$$

Разложим нагрузку $q(x, y)$ в ряд по синусам

$$q(x, y) = \sum_m q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{8}$$

где $q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx.$

Подставляя (8) в (7), получим

$$f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 f_m(y) = \frac{q_m(x, y)}{D}. \tag{9}$$

Таким образом, задача свелась к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения. Решение соответствующего однородного уравнения ищем в виде $\bar{f}_m(y) = Ae^{ry}$.

Характеристическое уравнение примет вид

$$\eta^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \eta^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 = 0.$$

Отсюда корни кратные и попарно равны $\eta = \pm\dfrac{m\pi}{a}$ и общее решение однородного уравнения примет вид

$$\bar{f}_m(y) = a_m e^{\frac{m\pi}{a}y} + b_m y e^{\frac{m\pi}{a}y} + c_m e^{-\frac{m\pi}{a}y} + d_m y e^{-\frac{m\pi}{a}y},$$

где a_m, b_m, c_m, d_m — постоянные интегрирования находим из граничных условий на кромке пластинки $y = \pm\dfrac{b}{2}$.

Переходя к гиперболическим функциям, общий интеграл уравнения (9) будет

$$f_m(y) = \bar{f}_m(y) + F_m(y) =$$
$$= a_m \operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}y + b_m y \operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}y + c_m \operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}y + d_m y \operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}y + F_m(y), \tag{10}$$

где $F_m(y)$ — частное решение дифференциального уравнения (9).

Рассмотрим случай, когда $q = \text{const}$

$$q_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a q \sin\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{4q}{m\pi}, \quad (m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), находим частное решение

$$F_m(y) = \frac{4qa^4}{D(m\pi)^5}.$$

Учитывая, что прогиб пластинки симметричен относительно оси Ox, в выражении (10) коэффициенты при нечетных функциях следует положить равными нулю $b_m = c_m = 0$. Отсюда

$$f_m(y) = a_m \operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}y + d_m y \operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}y + \frac{4qa^4}{D(m\pi)^5}, \quad (m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{12}$$

Так как кромки пластинки жестко заделаны, то на этих кромках выполняются условия

$$f_m\left(\pm\frac{b}{2}\right)=0, \quad f_m'\left(\pm\frac{b}{2}\right)=0. \tag{13}$$

Подставляя выражение (12) в граничные условия (13), получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных

$$a_m \operatorname{ch} u_m + d_m \frac{b}{2}\operatorname{sh} u_m + F_m = 0,$$

$$a_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)\operatorname{sh} u_m + d_m\left(\operatorname{sh} u_m + u_m \operatorname{ch} u_m\right) = 0,$$

где $u_m = \dfrac{m\pi b}{2a}$, откуда

$$a_m = -F_m\left[1+\frac{u_m \operatorname{sh}^2 u_m}{u_m+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u_m}\right]\frac{1}{\operatorname{ch} u_m}.$$

$$d_m = F_m\frac{\frac{m\pi}{a}\operatorname{sh} u_m}{u_m+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u_m}.$$

Окончательное решение примет вид

$$w(x,y)=\sum_m\left(a_m \operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}y + d_m y \operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}y + \frac{4qa^4}{D(m\pi)^5}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x,$$
$$(m=1,3,5,\ldots).$$

20.6. Применение операционного исчисления к решению линейных уравнений в частных производных

Методы операционного исчисления эффективны при решении линейных дифференциальных уравнений и систем. Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений сначала следует найти операторное уравнение, решить его, а затем с помощью формулы обращения или таблиц перейти к искомому решению.

Двойное преобразование Лапласа имеет вид

$$F(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x,y)dxdy, \tag{1}$$

где $p=\sigma+i\mu$, $q=\tau+i\nu$ — комплексные параметры.

Дифференцирование оригинала представляется в изображениях следующим образом

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\to p\bar{u}(p,q)-\bar{u}(0,q),\\&\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\to q\bar{u}(p,q)-\bar{u}(p,0),\end{aligned} \tag{2}$$

где $\bar{u}(0,q)$ и $\bar{u}(p,0)$ — изображения функции $u(x,y)$ при $x=0$, $y=0$, т. е. $u(0,y)\to\bar{u}(0,q)$, $u(x,0)\to\bar{u}(p,0)$.

Формулы для производных второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\to p^2\bar{u}(p,q)-p\bar{u}(0,q)-\frac{\partial\bar{u}(0,q)}{\partial x},\\&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\to q^2\bar{u}(p,q)-q\bar{u}(0,q)-\frac{\partial\bar{u}(p,0)}{\partial y},\\&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\to pq\bar{u}(p,q)-q\bar{u}(0,q)-p\bar{u}(0,q)+\bar{u}(0,0),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\frac{\partial\bar{u}(0,q)}{\partial x}$, $\frac{\partial\bar{u}(p,0)}{\partial y}$ — изображения производных функции $u(x,y)$ $x=0$, $y=0$.

Для применения операционного метода к решению дифференциальных уравнений в частных производных необходимо задание граничных условий

$$u(0,y)=a(y)\to\bar{u}(0,q),\quad u(x,0)=b(x)\to\bar{u}(p,0),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = c(y) \to \frac{\partial \overline{u}(0,q)}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = d(x) \to \frac{\partial \overline{u}(p,0)}{\partial y},$$

причем в начале координат предполагаем, что $a(0)=b(0)$. Переменные x,y предполагаются действительными и положительными $0<x<\infty$, $0<y<\infty$.

Для обратного перехода от изображения к оригиналу пользуются формулой обращения двойного интеграла Лапласа

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\omega_1\to\infty \\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1} \int\limits_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{px+qy} F(p,q)\,dpdq. \qquad (4)$$

При переходе от изображения к оригиналу иногда возникают математические трудности. В прикладных задачах часто требуется хотя бы приближенно определить значение искомой функции. Разложение изображения в асимптотический ряд

$$\overline{u}(p) = \frac{u(0)}{p} + \frac{u'(0)}{p^2} + \ldots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{p^n} + r_n(p), \qquad (5)$$

где $|r_n(p)| \le \frac{A_n}{|p|^{n+1}}$, A_n — некоторая постоянная, дает удобный способ получения асимптотических представлений функций.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными.

6.1. Проинтегрировать уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<\infty, \quad 0<t<\infty,$$

при граничных $u(0,t)=\cos t$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ и начальных условиях $u(x,0)=\cos x$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$

Решение. Производные второго порядка согласно зависимостям (3) примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to p^2\bar{u}(p,q) - p\bar{u}(0,q),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to q^2\bar{u}(p,q) - q\bar{u}(p,0).$$

Переходя в граничных и начальных условиях к изображениям, получим

$$u(0,t) = \cos t \to \bar{u}(0,q) = \frac{q}{q^2+1},$$

$$u(x,0) = \cos x \to \bar{u}(p,0) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Таким образом, операторное уравнение примет вид

$$q^2\bar{u}(p,q) - \frac{pq}{p^2+1} = p^2\bar{u}(p,q) - \frac{pq}{q^2+1},$$

откуда

$$\bar{u}(p,q) = \frac{pq}{p^2-q^2}\left(\frac{1}{q^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{pq}{(q^2+1)(p^2+1)}.$$

Для обратного перехода от изображения к оригиналу следует пользоваться формулой (4) или таблицами

$$u(x,t) = \cos x \cos t.$$

6.2. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

удовлетворяющее условиям $u(0,t) = u_0$, $u(x,0) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$, где u_0 — постоянная температура на границе стержня, и стремящееся к нулю при $x \to \infty$.

Решение. По формулам (2),(3) запишем производные в изображениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to p^2\bar{u}(p,q) - p\bar{u}(0,q) - \frac{\partial \bar{u}(0,q)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to q\bar{u}(p,q) - \bar{u}(p,0).$$

Перейдем к изображениям в начальных и граничных условиях

$$u(0,t) = u_0 \to \bar{u}(0,q) = \frac{u_0}{q}, \quad u(x,0) \to \bar{u}(p,0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \to \frac{\partial \bar{u}(0,q)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, операторное уравнение примет вид

$$q\bar{u}(p,q) = a^2\left(p^2\bar{u}(p,q) - p\frac{u_0}{q}\right)$$

или

$$\bar{u}(p,q) = \frac{a^2 u_0 \frac{p}{q}}{a^2 p^2 - q} = \frac{u_0 p}{q\left(p^2 - \frac{q}{a^2}\right)} = \frac{u_0}{2q}\left(\frac{1}{p - \frac{\sqrt{q}}{a}} + \frac{1}{p + \frac{\sqrt{q}}{a}}\right).$$

Переходя к оригиналу по переменной p, получим

$$\bar{u}(x,q) = \frac{u_0}{2q}\left(e^{\frac{\sqrt{q}}{a}x} + e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x}\right).$$

Из физического смысла задачи, т. е. требования ограниченности решения $u(x,t)$ при $x \to \infty$, члены, нарушающие это условие, опускаем. Тогда решение примет вид

$$\bar{u}(x,q) = \frac{u_0}{2}\frac{1}{q}e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x}.$$

Пользуясь табличной формулой, находим искомое решение

$$u(x,y)=\frac{u_0}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx.$

6.3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=a,\end{cases}$$

при граничных условиях $u(0,y)=0,\ u(x,0)=0,\ v(0,y)=0,$ $v(x,0)=0.$

Решение. Представим частные производные в изображениях

$$\frac{\partial u}{\partial x}\to p\bar{u}(p,q)-\bar{u}(0,q),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\to q\bar{u}(p,q)-\bar{u}(p,0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\to p\bar{v}(p,q)-\bar{v}(0,q),\quad \frac{\partial v}{\partial y}\to q\bar{v}(p,q)-\bar{v}(p,0).$$

Поскольку граничные условия в изображениях равны нулю $u(0,y)\to\bar{u}(0,q)=0,\ u(x,0)\to\bar{u}(p,0)=0,\ v(0,y)\to\bar{v}(0,q)=0,$ $v(x,0)\to\bar{v}(p,0)=0,$ то система примет вид

$$q\bar{u}(p,q)-p\bar{v}(p,q)=0,$$

$$p\bar{u}(p,q)-q\bar{v}(p,q)=\frac{a}{pq}.$$

Решая ее относительно изображений, получим

$$\bar{u}(p,q)=\frac{a}{q}\frac{1}{p^2+q^2},\quad \bar{v}=\frac{a}{p}\frac{1}{q^2+p^2}$$

Переходя к оригиналу в первом выражении по p, а во втором по q, будем иметь

$$\bar{u}(x,q)=\frac{a}{q^2}\sin qx, \quad \bar{v}=\frac{a}{p^2}\sin py.$$

Раскладывая тригонометрические функции в асимптотические ряды (5) и ограничиваясь, для простоты, двумя членами разложения, находим

$$\bar{u}(x,q)=a\left(\frac{x}{q^4}-\frac{x^3}{q^6}+\ldots\right), \quad \bar{v}(p,y)=a\left(\frac{y}{p^4}-\frac{y^3}{p^6}+\ldots\right).$$

Таким образом, приближенное решение примет вид

$$u(x,y)=a\left(\frac{xy^3}{3!}-\frac{x^3y^5}{5!}+\ldots\right), \quad v(x,y)=a\left(\frac{yx^3}{3!}-\frac{y^3x^5}{5!}+\ldots\right).$$

20.7. Метод Бубнова – Галёркина

Точное решение дифференциальных уравнений в частных производных, удовлетворяющее тем или иным граничным условиям, как правило, отсутствует. Рассмотрим метод Бубнова–Галёркина приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Большим преимуществом метода является то, что он позволяет интегрировать уравнения с переменными коэффициентами и нелинейные дифференциальные уравнения. Приведем с начала решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

7.1. Найти решение дифференциального уравнения изгиба пластинки

$$\Delta\Delta w=\frac{q}{D}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, т. е.

$$w=0 \quad \textit{при} \quad x=\pm a,$$
$$w=0 \quad \textit{при} \quad y=\pm b.$$

Решение. Рассмотрим решение этого уравнения методом Бубнова – Галёркина.

Приближенное решение, удовлетворяющее граничнм условиям (2), запишем в виде

$$w = f\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}, \tag{3}$$

где f — неизвестный коэффициент (стрела прогиба).

Для того, чтобы функция w являлась решением уравнения (1), необходимо, чтобы уравнение тождественно удовлетворялось при подстановке в него решения (3), а это требование равносильно требованию ортогональности по всем функциям

$$\iint\limits_S X\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\,dxdy = 0, \tag{4}$$

где $X = \Delta\Delta w - \dfrac{q}{D}$.

Подставляя w в функцию X, а функцию X в выражение (4) и интегрируя по площади пластинки S

$$\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\left[\left(\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\right)^2\cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}-\frac{q}{D}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\right]dxdy = 0,$$

находим зависимость между стрелой прогиба f и интенсивностью нагрузки q

$$f = \frac{16qab}{\pi^2 D\left(\left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{2b}\right)^2\right)^2}.$$

Таким образом, решение в первом приближении примет вид

$$w = \frac{16qab}{\pi^2 D\left(\left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{2b}\right)^2\right)^2}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}.$$

7.2. Найти решение нелинейного дифференциального уравнения

$$\sin\rho\left(\Delta\Phi + A(x,y)\right) = L(\Phi), \tag{1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $L(\Phi)$ — нелинейный оператор

$$L(\Phi) = \left(\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + B(x,y)\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$A(x,y)$, $B(x,y)$ — некоторые функции, характеризующие уравнение.

Если под функцией напряжений $\Phi(x,y)$ понимать распределение сил в сыпучей среде, а под ρ — угол внутреннего трения сыпучей среды, то уравнение (1) называется *дифференциальным уравнением предельного равновесия сыпучей среды в форме Малышева – Черненко.*

Решение. Воспользуемся методом Бубнова – Галёркина. Приближенное решение уравнения ищем в виде

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,y), \tag{3}$$

где c_i — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению, а $\varphi_i(x,y)$ — некоторая система заранее выбранных функций, удовлетворяющая всем граничным условиям и отражающая действительное распределение функции напряжений в сыпучей среде.

Точность решения, полученного данным методом, зависит от того, насколько удачно выбраны функции $\varphi_i(x,y)$. Для этого необходимо на основании экспериментальных исследований или на основании решений линейных уравнений представлять характер распределения функции $\varphi_i(x,y)$ в заданной области D.

Для того чтобы функция $\Phi(x,y)$ являлась точным решением уравнения (1), необходимо, чтобы уравнение тождественно удовлетворялось при подстановке в него решения (3), а это требование равносильно требованию ортогональности по всем функциям системы $\varphi_i(x,y)$ $(i = 1,2,3,...)$. Отсюда находим систему уравнений

$$\iint_D \left[\sin\rho\left(\Delta\Phi + A(x,y)\right) - L(\Phi)\right]\varphi_i(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint_D \left[\sin\rho\left(\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,y)\right) + A(x,y)\right) - \right. \tag{4}$$

$$\left. - L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,y)\right)\right]\varphi_i(x,y)\,dxdy,$$

которая служит для определения неопределенных коэффициентов c_i.

Поскольку в систему (4) входит только n постоянных c_i $(i = 1,2,...)$, т. е. удовлетворяется только n условий ортогональности, то, определяя их из этой системы и подставляя в (3), находим приближенное решение.

Рассмотрим решение уравнения (1) для конической области D (рис. 20.2), где при $x = 0$ функция $\Phi(x,y) = 0$, а $A(x,y) = B(x,y) = x\gamma$, γ — объемная масса сыпучей среды. Решение дифференциального уравнения предельного равновесия, для простоты, ищем при $n = 1$ в виде

$$\Phi = c_1 x^3 \cos\frac{\pi y}{a}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (4) и интегрируя по области D

$$2\int_0^h\int_0^{\frac{a}{2}(1-\frac{x}{h})}[\sin\rho(c_1(6x\cos\frac{\pi y}{a}-x^3(\frac{\pi}{a})^2\cos\frac{\pi y}{a})+x\gamma)-$$

$$-((c_1(6x\cos\frac{\pi y}{a}+x^3(\frac{\pi}{a})^2\cos\frac{\pi y}{a})+x\gamma)^2+$$

$$+4(c_1 3x^2\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi y}{a})^2)^{\frac{1}{2}}]x^3\cos\frac{\pi y}{a}dxdy=0,$$

приходим к выражению для определения неопределенного коэффициента

$$c_1=\frac{\gamma(1-\sin\rho)}{6(1-\sin\rho)+\frac{15}{28}(1+\sin\rho)(\frac{\pi h}{a})^2}.$$

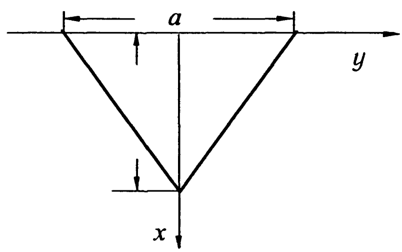

Рис. 20.2.

Здесь при вычислении интеграла от нелинейной части, с целью упрощения, подынтегральная функция по y была разложена в ряд и мы ограничились только первым членом ряда. Таким образом, окончательно решение уравнения (1) примет вид

$$\Phi=\frac{\gamma(1-\sin\rho)x^3\cos\frac{\pi y}{a}}{6(1-\sin\rho)+\frac{15}{28}(1+\sin\rho)(\frac{\pi h}{a})^2}.$$

7.3. Найти решение дифференциального уравнения изгиба пластинки

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям защемления на опорах

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a. \tag{2}$$

Решение. Поскольку при $y = \pm\frac{b}{2}$ края пластинки свободны, то решение, удовлетворяющее граничным условиям (2), будем искать в виде ряда, ограничиваясь двумя членами

$$w = f_1 \sin^2\frac{\pi x}{a} + f_2 \sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{b}, \tag{3}$$

где f_1, f_2 — неопределенные коэффициенты.

Используя метод Бубнова – Галёркина

$$\int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} X\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dxdy = 0,$$

$$\int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} X\sin^2\frac{\pi x}{a}\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)dxdy = 0,$$

где

$$X = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = -\left(f_1 + f_2\sin^2\frac{\pi y}{b}\right)8\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\cos\frac{2\pi x}{a} +$$

$$+ f_2 8\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} - 8\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\sin 2\pi y b\sin^2\frac{\pi x}{a} - \frac{q}{D},$$

приходим к системе двух уравнений относительно f_1, f_2:

$$2\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 f_1 + f_2\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 - \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\right] = \frac{q}{2D},$$

$$2\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 f_1 + f_2\left[2\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 - \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] = \frac{q}{2D}.$$

Вычитая из второго слагаемого первое, будем иметь

$$f_2\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]=0.$$

Поскольку выражение в квадратных скобках величина сугубо положительная, то $f_2=0$. Отсюда $f_1=\frac{q}{4D}\left(\frac{a}{\pi}\right)^4$ и решение примет вид

$$w=\frac{q}{4D}\left(\frac{a}{\pi}\right)^4\sin^2\frac{\pi x}{a},$$

т. е пластинка при данных граничных условиях (2) изгибается по цилиндрической поверхности.

7.4. Найти решение системы уравнений Фёпля – Кармана

$$\Delta\Delta w=\frac{1}{D}\big(hL(w,\Phi)+q\big) \tag{1}$$

$$\Delta\Delta\Phi=EL(w,w), \tag{2}$$

где $L(w,\Phi)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$,

$$L(w,w)=\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

w — прогиб пластинки, свободно опертой на жесткий контур, $w=0$ при $x=\pm a,\ y=\pm b,$ Φ — функция напряжений, E — модуль Юнга, h — толщина пластинки.

Решение. Ограничиваясь первым членом ряда, решение ищем в виде

$$w=f\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}, \tag{4}$$

где f — неизвестный коэффициент.

Решение (4) удовлетворяет граничным условиям (3). Подставляя его в правую часть уравнения (2), получим

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{Ef^2\pi^4}{16a^2b^2}\left(\sin^2\frac{\pi x}{2a}\sin^2\frac{\pi y}{2b} - \cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}\right) =$$

$$= \frac{Ef^2\pi^4}{32a^2b^2}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{b}\right).$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$\Phi = -\frac{Ef^2}{32a^2b^2}\left(a^4\cos\frac{\pi x}{a} + b^4\cos\frac{\pi y}{b}\right) + E\left(Ax^2 + By^2\right), \qquad (5)$$

где A и B — неизвестные постоянные, которые находятся из известных усилий на границе области и равны

$$A = \frac{\pi^2 f^2}{64\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2}\right); \quad B = \frac{\pi^2 f^2}{64\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right),$$

ν — коэффициент Пуассона.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом Бубнова-Галёркина

$$\iint_D X\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}dxdy, \qquad (6)$$

где $X = \Delta\Delta w - \frac{1}{D}\left(q + hL(w,\Phi)\right)$.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (6) и интегрируя по области D, имеем

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{Df^2\pi^4}{16}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{Ef^4\pi^4 h}{128\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{2\nu}{a^2b^2}\right)^2\right).$$

$$\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}dxdy+\frac{Ef^4\pi^4h}{128}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{1}{a^4}\cos\frac{\pi y}{b}+\frac{1}{b^4}\cos\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\frac{\pi y}{2a}\cdot$$

$$\cdot\cos^2\frac{\pi y}{2b}dxdy-\int_0^a\int_0^b qf\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}dxdy=0$$

или

$$\frac{Ehf^3}{256\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{4\nu}{a^2b^2}+\left(3-\nu^2\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)\right)+\frac{Df}{16}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\frac{16q}{\pi^6}=0.$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения третьего порядка относительно f.

20.8. Метод последовательных приближений

Рассмотрим метод последовательных приближений на примере решения дифференциального уравнения предельного равновесия сыпучей среды Малышева – Черненко

$$\sin\rho\left(\Delta\Phi+A(x,y)\right)=L(\Phi), \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа; $L(\Phi)$ — нелинейный оператор

$$L(\Phi)=\left(\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+B(x,y)\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$A(x,y)$, $B(x,y)$ — свободные члены, характеризующие распределение поля массовых сил в сыпучей среде.

Решение. Уравнение (1) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Суть применения метода последовательных приближений сводится к решению соответствующего линейного уравнения

$$\Delta\Phi_1+A(x,y)=0, \tag{3}$$

решения которого мы ищем методом прямых в виде

$$\Phi_1 = D_1 \varphi(x)\psi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — некоторые непрерывные функции координат, характеризующие изменение функции напряжений в сыпучем теле и удовлетворяющие граничным условиям задачи.

Степень точности полученного таким образом решения зависит от того, насколько удачно выбрано исходное выражение (4) для функции напряжений.

Учитывая, что нижележащие слои сыпучего тела не влияют на распределение напряжений в верхней части сыпучего тела, а также возможную симметрию при выборе координатных осей, постоянная интегрирования D_1 может быть найдена подстановкой выражения (4) в уравнение (3) при $y = 0$, $x = h$

$$D_1 = -\frac{A(h,0)}{\varphi''(h)\psi(0) + \varphi(h)\psi''(0)}.$$

Здесь $A(h,0)$, $\varphi(h)$, $\psi(0)$ получаются из $A(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ простой заменой индексов; h — расстояние от рассматриваемой точки до свободной поверхности сыпучего тела.

Второе приближение, учитывающее нелинейность задачи, находим из уравнения

$$\sin\rho\left(\Delta\Phi_2 + A(x,y)\right) = L\left(\Phi_1\right), \tag{5}$$

в виде

$$\Phi_2 = D_2 \varphi(x)\psi(y). \tag{6}$$

Подставляя (6) и (4) соответственно, в левую и правую части уравнения (5), находим при $x = h$, $y = 0$ постоянную интегрирования

$$D_2 = \frac{\dfrac{1}{\sin\rho} L\,(\Phi_1(h,0)) - A(h,0)}{\varphi''(h)\psi(0) + \varphi(h)\psi''(0)}.$$

С целью уточнения решения уравнения (1) процесс последовательных приближений решения

$$\Phi_n = D_n \varphi(x)\psi(y),$$

где

$$D_n = \frac{\frac{1}{\sin\rho} L\,(\Phi_{n-1}(h,0)) - A(h,0)}{\varphi''(h)\psi(0) + \varphi(h)\psi''(0)}$$

может быть продолжен дальше ($n = 1,2,3, \ldots$).

Первые приближения обычно не дают существенных поправок к решениям, выполнение же последующих приближений затруднено из-за громоздкости выкладок. Применение вычислительных машин должно обеспечить получение достаточно точных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. М., Наука, 1985. — 448 с.

2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика: Задачник. М., Наука, 1982. — 253 с.

3. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Наука, 2000. — 399 с.

4. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука, 1981. — 303 с.

5. Сборник задач по математике для вузов. Под ред. А. В. Ефимова. М., Наука, 1981, ч. 1, 1993. — 464 с; ч. 2, 1994. — 367 с.

6. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1999. — 335 с.

7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1993. — 791 с.

ISBN 5-7325-0768-X

9785732507683

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Черненко Владимир Дмитриевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ

В трех томах

Том 2

Заведующая редакцией *Е. В. Шарова*
Переплет художника *М. Л. Черненко*
Корректор *А. Н. Пятницкая*
Макет *Т. Л. Пивоваровой*
Компьютерный набор и верстка *В. А. Чернявского, М. М. Пивоварова, Т. Л. Пивоваровой*

ЛР № 010292 от 18.08.98

Сдано в набор 22.05.03. Подписано в печать 13.08.03.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 30,0. Уч.-изд. л. 29,1. Тираж 3000 экз. Зак. № 2849.

ФГУП «Издательство "Политехника"».
191023, Санкт-Петербург, Инженерная ул., 6.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Республиканская типография им. П. Ф. Анохина».
185005, г. Петрозаводск, ул. «Правды», 4.