ВУЗ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

3

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\,P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\,P_{A_i}(B)}$$

$= min\,(l'_i, l_p + c_{pi})$

$$P(x_i|y_i) = \frac{P(x_i,y_i)}{P(y_i)} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$(K,X_i) = f(X_i) + g(K-X_i)$

$y - y_o = y'(x_o,y_o)\,(x-$

$l'_i = min\,(l'_i, l_p + c_{pi})$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

В. Д. Черненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
в примерах и задачах

В трех томах

3
том

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2003

УДК 517 (07)
ББК 22.11
Ч-49

Рецензенты:
К. Ф. Черных, доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного университета,
Н. В Югов, член-корреспондент Центра прикладной математики
и механики Академии наук РФ

Черненко В. Д.
Ч-49 Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 3.— СПб.: Политехника, 2003.— 476 с.: ил.

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0769-8 — Т. 3

Предлагаемое учебное пособие содержит краткий теоретический материал по тензорному исчислению, численным методам высшего анализа и решения дифференциальных уравнений в частных производных, линейному и динамическому программированию, теории вероятностей и математической статистике, случайным функциям, теории массового обслуживания и теории оптимизации, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные методы решения.

УДК 517(07)
ББК 22.11

ISBN 5-7325-0766-3 — общ.
ISBN 5-7325-0769-8 — Т. 3

Оглавление

Глава 21
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

21.1. Некоторые сведения о векторах

1°. Векторы называются *линейно независимыми*, если не допускают линейной функциональной связи между собой. В трехмерном пространстве можно построить три линейно независимых вектора. Любой четвертый вектор может быть разложен на компоненты по этим трем независимым векторам. Выбранное полное количество линейно независимых векторов данного пространства с целью определения постоянных направлений компонентов некоторого вектора этого пространства при его разложении на составляющие называется *репером*. Если разложение вектора представить через направляющие векторы репера, то числовые множители, определяющие относительные длины соответствующих компонентов, называются *масштабным базисом*.

Рассмотрим две взаимные тройки векторов. Пусть даны три независимые вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ удовлетворяющие условию $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0$, т. е. некомпланарные. Определим через них еще одну тройку векторов

$$\overset{\approx}{a}=\frac{\vec b\times\vec c}{\vec a\,\vec b\,\vec c},\quad \overset{\approx}{b}=\frac{\vec c\times\vec a}{\vec a\,\vec b\,\vec c},\quad \overset{\approx}{c}=\frac{\vec a\times\vec b}{\vec a\,\vec b\,\vec c}. \tag{1}$$

Используя свойства смешанного произведения трех векторов, получим

$$\overset{\approx}{a}\cdot\vec a=\frac{\vec b\times\vec c}{\vec a\,\vec b\,\vec c}\cdot\vec a=1;\quad \overset{\approx}{a}\cdot\vec b=0;\quad \overset{\approx}{a}\cdot\vec c=0;$$

$$\overset{\approx}{b}\cdot\vec a=\frac{\vec c\times\vec a}{\vec a\,\vec b\,\vec c}\cdot\vec a=1;\quad \overset{\approx}{b}\cdot\vec b=1;\quad \overset{\approx}{b}\cdot\vec c=0; \tag{2}$$

$$\overset{\approx}{c}\cdot\vec a=\frac{\vec a\times\vec b}{\vec a\,\vec b\,\vec c}\cdot\vec a=1;\quad \overset{\approx}{c}\cdot\vec b=0;\quad \overset{\approx}{c}\cdot\vec c=1,$$

т. е. векторы с тильдой перпендикулярны двум векторам первой группы.

2°. *Взаимные системы координат*. Рассмотрим косоугольную прямолинейную систему с некомпланарными масштабными векторами $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$, (рис. 21.1). Обозначим скалярные произведения этих векторов следующим образом

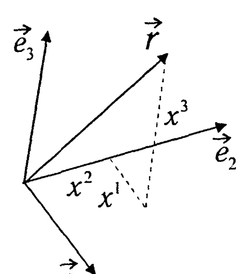


Рис. 21.1

$$\vec e_i\cdot\vec e_j=g_{ij}\quad (g_{ij}=g_{ji};\quad i,j=1,2,3).$$

Если за x^1, x^2, x^3 обозначить координаты радиус-вектора $\vec{r}$, то

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 = x^i\vec{e}_i. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем наличие в произведении одинаковых индексов, один из которых расположен внизу, а другой — вверху, означает суммирование по этим индексам.

Введем в рассмотрение другую координатную систему $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ с началом координат в той же точке. Для скалярных произведений масштабных векторов примем обозначения

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = g^{ij} \quad (g^{ij} = g^{ji}; \qquad i,j=1,2,3).$$

Пусть x_1, x_2, x_3 координаты того же радиус-вектора, тогда радиус-вектор $\vec{r}$ будет

$$\vec{r} = x_i \cdot \vec{e}^i. \tag{4}$$

Считаем, что рассмотренные тройки базисных векторов являются взаимными (1), (2), т. е.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (i,j=1,2,3),$$

где δ_i^j – символ Кронекера.

Умножая скалярно (3) на $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$, получим

$$x^1 = \vec{r} \cdot \vec{e}^1, \quad x^2 = \vec{r} \cdot \vec{e}^2, \quad x^3 = \vec{r} \cdot \vec{e}^3.$$

Аналогично, умножая (4) на $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, будем иметь

$$x_1 = \vec{r} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{r} \cdot \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{r} \cdot \vec{e}_3.$$

Подставляя эти выражения в (4),(3) и заменяя, соответственно, $\vec{r}$ на $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^i$, найдем связь между базисными векторами взаимных систем

$$\vec{e}_i = g_{ij} \cdot \vec{e}^j; \quad \vec{e}^i = g^{ij} \cdot \vec{e}_j. \tag{5}$$

Для того, чтобы найти формулы связи одного и того же вектора $\vec{r}$ в двух взаимных системах, умножим скалярно все члены равенства $x_i\vec{e}^i = x^i\vec{e}_i$ на основные векторы каждой системы, тогда получим

$$x^i = g^{ij}x_j; \quad x_i = g_{ij}x^j. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует, что координатные векторы определяются через векторы взаимной системы, как координаты взаимной системы. Таким образом, координаты и базисные векторы, принадлежащие одному и тому же координатному триэдру, преобразуются как базисные векторы и координаты взаимной системы.

3°. Рассмотрим соотношения между двумя независимыми прямолинейными координатными системами. Индексы у второй системы координат отметим штрихами. Пусть начала этих систем совпадают. Введем следующие обозначения

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{j'} = g_{ij'}; \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}^{j'} = g^{ij'};$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^{j'} = g_i^{j'}; \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}_{j'} = g_{j'}^i,$$

причем $g_{ij'} = g_{j'i}$; $g^{ij'} = g^{j'i}$; $g_i^{j'} \neq g_{j'}^i$.

Повторяя вывод, аналогичный выводу зависимостей (5), получим

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i &= g_{ij}\vec{e}^j = g_{ij'}\vec{e}^{j'} = g_i^{j'}\vec{e}_{j'};\\
\vec{e}^i &= g^{ij} \cdot \vec{e}_j = g_{j'}^i \cdot \vec{e}^{j'} = g^{ij'} \cdot \vec{e}_{j'};\\
\vec{e}_{j'} &= g_{i'j'} \cdot \vec{e}^{i'} = g_{j'i} \cdot \vec{e}^i = g_{j'}^i \cdot \vec{e}_i;\\
\vec{e}^{j'} &= g^{j'i'} \cdot \vec{e}_{i'} = g^{j'i} \cdot \vec{e}_i = g_i^{j'} \cdot \vec{e}^i.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = x^i \cdot \vec{e}_i = x_j \cdot \vec{e}^j = x_{i'} \cdot \vec{e}^{i'} = x^{j'} \cdot \vec{e}_{j'}.$$

Скалярно умножая все части этих зависимостей на масштабные векторы любой из рассматриваемых координатных систем, получим

$$
\begin{aligned}
&x^i = g^{ij} \cdot x_j = g^i_{j'} \cdot x^{j'} = g^{ij'} \cdot x_{j'};\\
&x_i = g_{ij} \cdot x^j = g^{j'}_i \cdot x_{j'} = g_{ij'} \cdot x^{j'};\\
&x^{j'} = g^{j'i'} \cdot x_{i'} = g^{j'}_i \cdot x^i = g^{j'i} \cdot x_i;\\
&x_{j'} = g_{j'i'} \cdot x^{i'} = g^i_{j'} \cdot x_i = g_{j'i} \cdot x^i.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Так как векторы основной координатной системы принято обозначать нижними индексами, то одинакого изменяющиеся с ними координаты, а также координаты любых векторов и сами векторы, имеющие в обозначениях также нижние индексы, называются *ковариантными*. Векторы взаимной и координаты основной системы, соответственно, называются *контравариантными*, т. е. x^i — контравариантные координаты некоторого вектора, если выполняется условие $x^{j'} = g^{j'}_i \cdot x^i$.

В случае прямолинейных ортогональных координат необходимость в верхних индексах отпадает и все индексы ставятся внизу.

1.1. Возьмем шесть векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и **докажем** следующее тождество

$$
\left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]\left[\vec{p} \cdot \left(\vec{q} \times \vec{r}\right)\right] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{p} & \vec{b} \cdot \vec{p} & \vec{c} \cdot \vec{p} \\ \vec{a} \cdot \vec{q} & \vec{b} \cdot \vec{q} & \vec{c} \cdot \vec{q} \\ \vec{a} \cdot \vec{r} & \vec{b} \cdot \vec{r} & \vec{c} \cdot \vec{r} \end{vmatrix}.
$$

Решение. Если представить смешанные произведения через составляющие векторов, то равенство сводится к умножению определителей 3-го порядка

$$\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]\left[\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})\right]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_xp_x+a_yp_y+a_zp_z & b_xp_x+b_yp_y+b_zp_z & c_xp_x+c_yp_y+c_zp_z \\ a_xq_x+a_yq_y+a_zq_z & b_xq_x+b_yq_y+b_zq_z & c_xq_x+c_yq_y+c_zq_z \\ a_xr_x+a_yr_y+a_zr_z & b_xr_x+b_yr_y+b_zr_z & c_xr_x+c_yr_y+c_zr_z \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{a}\times\vec{p} & \vec{b}\times\vec{p} & \vec{c}\times\vec{p} \\ \vec{a}\times\vec{q} & \vec{b}\times\vec{q} & \vec{c}\times\vec{q} \\ \vec{a}\times\vec{r} & \vec{b}\times\vec{r} & \vec{c}\times\vec{r} \end{vmatrix}.$$

Докажем тождество другим способом. Если считать векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарными, то разложение векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ по взаимным векторам $\bar{\vec{a}},\bar{\vec{b}},\bar{\vec{c}}$ имеет вид

$$\vec{p}=(\vec{p}\cdot\vec{a})\bar{\vec{a}}+(\vec{p}\cdot\vec{b})\bar{\vec{b}}+(\vec{p}\cdot\vec{c})\bar{\vec{c}},$$

$$\vec{q}=(\vec{q}\cdot\vec{a})\bar{\vec{a}}+(\vec{q}\cdot\vec{b})\bar{\vec{b}}+(\vec{q}\cdot\vec{c})\bar{\vec{c}},$$

$$\vec{r}=(\vec{r}\cdot\vec{a})\bar{\vec{a}}+(\vec{r}\cdot\vec{b})\bar{\vec{b}}+(\vec{r}\cdot\vec{c})\bar{\vec{c}},$$

Найдем смешанное произведение этих векторов

$$\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})=\begin{vmatrix} \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{p}\cdot\vec{c} \\ \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{c} \\ \vec{r}\cdot\vec{a} & \vec{r}\cdot\vec{b} & \vec{r}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}\left[\bar{\vec{a}}\cdot\left(\bar{\vec{b}}\times\bar{\vec{c}}\right)\right].$$

Пользуясь зависимостями (1), (2), получим

$$\tilde{\vec{a}}\cdot\left(\tilde{\vec{b}}\times\tilde{\vec{c}}\right)=\frac{1}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)},$$

откуда

$$\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]\left[\vec{p}\cdot\left(\vec{q}\times\vec{r}\,\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{p} & \vec{b}\cdot\vec{p} & \vec{c}\cdot\vec{p}\\ \vec{a}\cdot\vec{q} & \vec{b}\cdot\vec{q} & \vec{c}\cdot\vec{q}\\ \vec{a}\cdot\vec{r} & \vec{b}\cdot\vec{r} & \vec{c}\cdot\vec{r}\end{vmatrix}.$$

21.2. Определение ортогонального тензора второго ранга

1°. Рассмотрим две прямолинейные прямоугольные системы координат x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' с координатным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ соответственно. Формулы связи между базисными векторами (7, п.1) примут вид

$$\vec{e}_i = g_{ij}\vec{e}_j'; \quad \vec{e}_j' = g_{ij}\vec{e}_i \quad (i, j = 1,2,3),$$

где g_{ij} — косинусы углов, составляемых осями этих координатных систем.

Проекции радиуса вектора на оси одной системы координат, выраженные через проекции в другой системе координат (8, п.1), будут

$$x_i = g_{ij}x_j'; \quad x_j' = g_{ij}x_i. \tag{1}$$

Совокупность трех скалярных величин x_i, преобразующихся по формулам (1) в величины x_j', определяют ортогональный вектор, который является инвариантом, поскольку не зависит от системы координат.

Обобщая предыдущие соображения на вектор, приведем определение ортогонального тензора второго ранга.

Совокупность трех векторов $\vec{p}_i$, заданных в одной системе координат x_i и преобразующихся по формулам

$$\vec{p}_i = g_{ij}\vec{p}'_j; \quad \vec{p}'_j = g_{ij}\vec{p}_i \tag{2}$$

в векторы $\vec{p}'_j$, отвечающие другой системе координат x'_j, определяют *ортогональный тензор второго ранга* или просто тензор.

2°. По аналогии с вектором введем для тензора обозначение

$$\vec{T} = \vec{e}_1\vec{p}_1 + \vec{e}_2\vec{p}_2 + \vec{e}_3\vec{p}_3. \tag{3}$$

Поскольку тензор определяется тремя векторами $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, то разложение этих векторов по координатному базису имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= p_{11}\vec{e}_1 + p_{12}\vec{e}_2 + p_{13}\vec{e}_3; \\ \vec{p}_2 &= p_{21}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + p_{23}\vec{e}_3; \\ \vec{p}_3 &= p_{31}\vec{e}_1 + p_{32}\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Числа p_{ij} называются *компонентами тензора* и могут быть записаны в виде матрицы, определяющей тензор

$$\vec{T} = \left\{ \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

3°. Подставляя (4) в (3), получим *диадное* представление тензора

$$\vec{T} = p_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + p_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + p_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3 + p_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 +$$

$$+p_{22}\vec{e}_2\vec{e}_2 + p_{23}\vec{e}_2\vec{e}_3 + p_{31}\vec{e}_3\vec{e}_1 + p_{32}\vec{e}_3\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3 = p_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j. \tag{6}$$

Выражения $\vec{e}_i\vec{e}_j$, представляющие собой определенную последовательную запись двух взаимно независимых векторов без каких либо знаков умножения, называются *диадами*, а умножение, соответственно, диадным.

4°. Если для любой системы координат компоненты тензора равны $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1,\ p_{ij} = 0\ (i \neq j)$, то тензор называется *единичным* и обозначается

$$\vec{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_3. \qquad (7)$$

Если у тензора значения компонент не меняются от перестановки индексов $p_{ij} = p_{ji}$, то он называется *симметричным тензором* .

Тензор $\vec{T}_c$, у которого переставлены векторы в диадах или транспонирована матрица, называется тензором, *сопряженным* с тензором $\vec{T}$.

$$\vec{T}_c = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{Bmatrix}. \qquad (8)$$

Нетрудно заметить, что симметричный тензор является сопряженным самому себе, т. е. $\vec{T}_c = \vec{T}$.

Если у тензора значения компонент при перестановке индексов меняются на противоположные $p_{ij} = -p_{ji}$ $(i,j=1,2,3)$, то тензор называется *антисимметричным.* Компоненты антисимметричного тензора, расположенные на главной диагонали, равны нулю, т.к. $p_{ii} = -p_{ii}$

$$\vec{T}_A = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix}, \qquad (9)$$

где $\omega_1 = p_{32} = -p_{23},\ \ \omega_2 = p_{13} = -p_{31},\ \ \omega_3 = p_{21} = -p_{12}.$

Отсюда видно, что тензор, сопряженный антисимметричному, отличается от него только знаком. Любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора

$$p_{ij} = s_{ij} + a_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) + \frac{1}{2}(p_{ij} - p_{ji}). \qquad (10)$$

2.1. Разложить на симметричную и антисимметричную части диаду $\vec{a}\vec{b}$. **Выяснить значение** аксиального вектора, соответствующего антисимметричной части.

Решение. По формуле (10) тензор представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора. Поскольку тензор задан в диадном виде, то симметричная часть равна

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) =$$

$$= \begin{Bmatrix} a_1b_1 & \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) & \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3b_1) \\ \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) & a_2b_2 & \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_3b_2) \\ \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3b_1) & \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_3b_2) & a_3b_3 \end{Bmatrix}.$$

Антисимметричная часть с учетом формулы (9) будет

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij} - p_{ji}) = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix},$$

где величины $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ можно рассматривать как компоненты некоторого аксиального вектора $\vec{\omega}$, то есть $\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$.

Учитывая, что $\omega_1 = p_{32}$, $\omega_2 = p_{13}$, $\omega_3 = p_{21}$, запишем аксиальный вектор в диадном виде

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\left[\left(a_3b_2-b_3a_2\right)\vec{i}+\left(a_1b_3-b_1a_3\right)\vec{j}+\left(a_2b_1-b_2a_1\right)\vec{k}\right]$$

или

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\vec{b}\times\vec{a}.$$

21.3. Операции над тензорами

1°. Сумма двух тензоров с компонентами $p_{ij'}$ и $p_{ij''}$ равна тензору, компоненты которого равны сумме одноименных компонент складываемых тензоров

$$p_{ij}=p_{ij'}+p_{ij''}. \tag{1}$$

2°. Если все компоненты p_{ij} некоторого тензора умножить на скаляр λ, то получится новый тензор с компонентами λp_{ij}.

Скалярное произведение тензора $\vec{T}$ на вектор $\vec{a}$ дает вектор $\vec{b}$. Если тензор задан в диадном виде (6, п.21.2), то произведение тензора на вектор $\vec{a}=a_j\vec{e}_j$ справа равно

$$\vec{T}\cdot\vec{a}=\vec{e}_1(p_{11}a_1+p_{12}a_2+p_{13}a_3)+\vec{e}_2(p_{21}a_1+p_{22}a_2+p_{23}a_3)+$$

$$+\vec{e}_3(p_{31}a_1+p_{32}a_2+p_{33}a_3)=p_{ij}a_j\vec{e}_i=b_i\vec{e}_i, \tag{2}$$

где $b_i=p_{ij}a_j$ — компоненты вектора $\vec{b}$.

Следует отметить, что при скалярном умножении вектора на диаду скалярно перемножаются соседние векторы.

При скалярном умножении тензора $\vec{T}$ на вектор $\vec{a}=a_i\vec{e}_i$ слева получим вектор $\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{T}=a_i\vec{e}_i\cdot p_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j=a_ip_{ij}\vec{e}_j=c_j\vec{e}_j,$$

где $c_j=a_ip_{ij}$ — компоненты вектора $\vec{c}$

Таким образом, скалярное произведение тензора на вектор справа и слева не равны друг другу $\vec{a}\cdot\vec{T} \neq \vec{T}\cdot\vec{a}$.

Пусть вектор $\vec{b}$ в правой части выражения (2) коллинеарен вектору $\vec{a}$, т. е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Величина λ называется *главным (или собственным) значением тензора*. В этом случае равенство (2) будет

$$\vec{T}\cdot\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

или в развернутом виде

$$p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 = \lambda a_1;$$

$$p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 = \lambda a_2;$$

$$p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 = \lambda a_3.$$

Данная система однородных уравнений имеет решение отличное от нуля, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Запишем кубическое уравнение (3) в виде

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

где J_1, J_2, J_3 — главные инварианты, равные

$$J_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33};$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix};$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Тензоры, у которых первый инвариант равен нулю $J_1 = 0$, называются *девиаторами.*

3°. Векторное произведение тензора $\vec{T}$ на вектор $\vec{a}$ справа равно тензору, который обозначается $\vec{T}\times\vec{a}$

$$\vec{T}\times\vec{a} = \vec{e}_1(\vec{P}_1\times\vec{a}) + \vec{e}_2(\vec{P}_2\times\vec{a}) + \vec{e}_3(\vec{P}_3\times\vec{a}) =$$

$$= p_{11}\vec{e}_1(\vec{e}_1\times\vec{a}) + p_{12}\vec{e}_1(\vec{e}_2\times\vec{a}) + p_{13}\vec{e}_1(\vec{e}_3\times\vec{a}) + p_{21}\vec{e}_2(\vec{e}_1\times\vec{a}) + \tag{4}$$

$$+p_{22}\vec{e}_2(\vec{e}_2\times\vec{a}) + p_{23}\vec{e}_2(\vec{e}_3\times\vec{a}) + p_{31}\vec{e}_3(\vec{e}_1\times\vec{a}) + p_{32}\vec{e}_3(\vec{e}_2\times\vec{a}) +$$

$$+p_{33}\vec{e}_3(\vec{e}_3\times\vec{a}) = p_{ij}\vec{e}_i(\vec{e}_j\times\vec{a}).$$

Аналогично, векторное произведение тензора $\vec{T}$ на вектор $\vec{a}$ слева равно

$$\vec{a}\times\vec{T} = p_{ij}(\vec{a}\times\vec{e}_i)\vec{e}_j. \tag{5}$$

4°. Скалярное произведение тензора $\vec{A} = a_{in}\vec{e}_i\vec{e}_n$ на тензор $\vec{B} = b_{mj}\vec{e}_m\vec{e}_j$ равно тензору $\vec{T}$ равному

$$\vec{T} = \vec{A}\cdot\vec{B} = a_{in}b_{mj}\vec{e}_i(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_m)\vec{e}_j = a_{in}b_{mj}\delta_{nm}\vec{e}_i\vec{e}_j = \tag{6}$$

$$= a_{in}b_{nj}\vec{e}_i\vec{e}_j = p_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j,$$

где $p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{n=1}^{3} a_{in}b_{nj} \quad (i,j = 1,2,3)$, т. е. определитель произведения двух тензоров равен произведению определителей этих тензоров.

Скалярное произведение тензоров обладает свойствами дистрибутивности и ассоциативности

$$(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)\cdot\vec{B} = \vec{A}_1\cdot\vec{B} + \vec{A}_2\cdot\vec{B},$$

$$(m\vec{A})\cdot\vec{B} = m(\vec{A}\cdot\vec{B}),$$

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}.$$

Тензор $\vec{T}^{-1}$ называется *обратным* для тензора $\vec{T}$, если имеет место равенство

$$\vec{T}^{-1} \cdot \vec{T} = \vec{I}. \tag{7}$$

Пусть тензор $\vec{T}$ задан в диадной форме (3, п.2). Составим систему векторов, взаимных (1, п.1) с $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$,

$$\tilde{\vec{P}}_1 = \frac{\vec{P}_2 \times \vec{P}_3}{\left[\vec{P}_1\vec{P}_2\vec{P}_3\right]}; \quad \tilde{\vec{P}}_2 = \frac{\vec{P}_3 \times \vec{P}_1}{\left[\vec{P}_1\vec{P}_2\vec{P}_3\right]}; \quad \tilde{\vec{P}}_3 = \frac{\vec{P}_1 \times \vec{P}_2}{\left[\vec{P}_1\vec{P}_2\vec{P}_3\right]}.$$

Обозначим

$$\vec{T}^{-1} = \tilde{\vec{P}}_1\vec{e}_1 + \tilde{\vec{P}}_2\vec{e}_2 + \tilde{\vec{P}}_3\vec{e}_3, \tag{8}$$

тогда

$$\vec{T}^{-1} \cdot \vec{T} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_3 = \vec{I}.$$

Таким образом, тензор $\vec{T}^{-1}$ (8) является обратным тензору $\vec{T}$ по определению (7).

Для обратного тензора справедливы следующие выражения

$$\vec{T}^{-1}\vec{T} = \vec{T}\vec{T}^{-1} = \vec{I}; \tag{9}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^{-1} = \vec{A}^{-1} \cdot \vec{B}^{-1}. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что выражение (9) следует из соотношений (7), (8), и выражение (10) доказывается, на основании (9), умножением его скалярно на $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Если скалярное умножение тензоров удовлетворяет выражению

$$\vec{T} \cdot \vec{T}_c = \vec{T}_c \cdot \vec{T} = \vec{I}, \tag{11}$$

то тензор называется *ортогональным*.

Из сравнения (11) и (9) следует, что для ортогонального тензора справедливо соотношение

$$\vec{T}_c = \vec{T}^{-1}. \tag{12}$$

3.1. Показать, что если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три некомпланарных вектора и $\vec{T}\vec{a} = \vec{a}'$, $\vec{T}\vec{b} = \vec{b}'$, $\vec{T}\vec{c} = \vec{c}'$, то

$$J_1 = \frac{\vec{a}' \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b}' \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c}' \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})},$$

$$J_2 = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}') + \vec{b} \cdot (\vec{c}' \times \vec{a}') + \vec{c} \cdot (\vec{a}' \times \vec{b}')}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})},$$

$$J_3 = \frac{\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}')}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}.$$

Решение. Пусть вектор $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ имеет главное направление, тогда $\vec{T}\vec{r} = \lambda\vec{r}$, где λ главное значение.

Отсюда $\vec{T}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \lambda(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$ или с учетом условия задачи $\alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}' + \gamma\vec{c}' = \lambda(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$ или $\alpha(\vec{a}' - \lambda\vec{\alpha}) + \beta(\vec{b}' - \lambda\vec{b}) + \gamma(\vec{c}' - \lambda\vec{c}) = 0$.

Компланарностью трех векторов $\vec{a}' - \lambda\vec{\alpha}$, $\vec{b}' - \lambda\vec{b}$, $\vec{c}' - \lambda\vec{c}$ является условие

$$(\vec{a}' - \lambda\vec{\alpha}) \cdot \left[(\vec{b}' - \lambda\vec{b}) \times (\vec{c}' - \lambda\vec{c})\right] = 0.$$

Раскрывая это скалярно-векторное произведение, получим относительно λ уравнение третьей степени

$$\lambda^3 - \lambda^2\left[\vec{a}' \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{b}' \times \vec{c}\right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}'\right)\right]\left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]^{-1} +$$

$$+\lambda\left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b}' \times \vec{c}'\right) + \vec{a}' \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}'\right) + \vec{a}' \cdot \left(\vec{b}' \times \vec{c}\right)\right]\left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]^{-1} -$$

$$-\left[\vec{a}' \cdot \left(\vec{b}' \times \vec{c}'\right)\right]\left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]^{-1} = 0.$$

Сравнивая с инвариантами кубического уравнения (3), получим

$$J_1 = \frac{\vec{a}'\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)+\vec{a}\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}\,)+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,')}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)};$$

$$J_2 = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}\,')+\vec{a}'\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,')+\vec{a}'\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}\,)}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)};$$

$$J_3 = \frac{\vec{a}'\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}\,')}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)}.$$

21.4. Функции вектора

1°. Рассмотрим функцию трех независимых переменных

$$u = u(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

где x_1, x_2, x_3 — ортогональные прямолинейные координаты радиус-вектора $\vec{r}$. Радиус-вектор в проекциях на оси координат имеет вид

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

откуда $x_1 = \vec{r}\cdot\vec{e}_1;\ x_2 = \vec{r}\cdot\vec{e}_2;\ x_3 = \vec{r}\cdot\vec{e}_3$.

Подставляя эти значения в (1), получим

$$u = u(\vec{r}\,).$$

Скалярная переменная u в данном случае является функцией радиус-вектора $\vec{r}$.

Рассмотрим теперь три независимые между собой вещественные функции радиус-вектора $\vec{r}$

$$a_1 = a_1(\vec{r}\,);\ a_2 = a_2(\vec{r}\,);\ a_3 = a_3(\vec{r}\,).$$

2°. Считаем, что переменные a_1, a_2, a_3 являются ортогональными прямолинейными координатами некоторого вектора $\vec{a}$, тогда

$$\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = a_1(\vec{r})\vec{e}_1 + a_2(\vec{r})\vec{e}_2 + a_3(\vec{r})\vec{e}_3 = \vec{a}(\vec{r}). \tag{2}$$

Выражение (2) представляет функциональную связь между векторами. Независимая переменная называется *вектор-аргументом*, а зависимая *вектор-функцией*.

Дадим вектор-аргументу $\vec{r}$ бесконечно малое приращение $d\vec{r}$ и рассмотрим соответствующее приращение вектор-функции $d\vec{a}$. Проекции приращения вектор- функции примут вид

$$\begin{aligned} da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3; \\ da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3; \\ da_3 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}dx_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку совокупность трех величин da_1, da_2, da_3 является проекциями вектора $d\vec{a}$, а совокупность dx_1, dx_2, dx_3 — проекциями вектора $d\vec{r}$, то по определению тензора (2, п.2), (5, п.2) коэффициенты линейных соотношений (3) представляют также тензор

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

Тензор (4) называется тензором, производным от вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{r}$.

4.1. Разложить тензор $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ на симметричную и антисимметричную части.

Решение. Рассмотрим тензор, сопряженный с тензором (4)

$$\nabla\vec{a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}.$$

Разложим производный тензор $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ на симметричную и антисимметричную части

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} + \nabla\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} - \nabla\vec{a}\right).$$

Симметричный тензор есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} + \nabla\vec{a}\right) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

и, если вектор $\vec{a}(\vec{r})$ представляет вектор смещения частиц, то называется деформационным тензором.

Антисимметричная часть производного тензора будет

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}-\nabla\vec{a}\right)=\begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix},$$

где, как легко видеть, вектор $\vec{a}$ равен

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{a}.$$

21.5. Фундаментальный тензор. Символы Кристоффеля

1°. Пусть координаты некоторой точки n — мерного пространства $x^1, x^2,\ldots,x^n$ связаны с координатами этой же точки $\mathring{x}^1, \mathring{x}^2,\ldots,\mathring{x}^n$, в другой системе координат формулами преобразования

$$x^i = x^i(\mathring{x}^1,\mathring{x}^2,\ldots,\mathring{x}^n) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Разрешая соотношения (1) относительно $\mathring{x}^1, \mathring{x}^2,\ldots,\mathring{x}^n$ будем иметь

$$\mathring{x}^i = \mathring{x}^i(x^1,x^2,\ldots,x^n) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Пусть для системы координат x^i определена совокупность функций A^i, а для системы координат $\mathring{x}^i$ совокупность функций $\mathring{A}^i$. Если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по формулам

$$\mathring{A}^i=\frac{\partial\mathring{x}^i}{\partial x^k}A^k \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3}$$

то величины A^k называются *компонентами контравариантного вектора.*

Если для системы координат x^i определена совокупность функций A_i, а для системы $\mathring{x}^i$ совокупность функций $\mathring{A}_i$, которые преобразуются по формулам

$$\overset{\circ}{A}_i = \frac{\partial x_k}{\partial \dot{x}^i} A_k \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4}$$

то величины A_k называются *компонентами ковариантного вектора.*

2°. Приведем аналогичные определения для тензора. Если для системы координат x^i определена совокупность функций A^{kl}, которая при преобразовании координат (1) преобразуется по формулам

$$\overset{\circ}{A}^{kl} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overset{\circ}{x}^j}{\partial x^l} A^{kl}, \tag{5}$$

то величины A^{kl} называются *компонентами контравариантного тензора второго ранга.*

Соответственно, для компонентов A_{kl} *ковариантного тензора* имеем преобразование

$$\overset{\circ}{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overset{\circ}{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overset{\circ}{x}^j} A_{kl}. \tag{6}$$

Дифференцируя выражения (2) по правилу дифференцирования сложных функций, получим

$$d\overset{\circ}{x}^i = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + ... + \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial x^k} dx^k \tag{7}$$

где dx^k, согласно зависимостям (3), являются компонентами контравариантного вектора.

В этом случае квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками будет определяться фундаментальной квадратичной формой по формуле

$$dS^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) dx^i dx^j \tag{8}$$

где

$$g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x^i} \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x^j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

составляющие ковариантного фундаментального тензора, удовлетворяющие условию симметрии $g_{ij} = g_{ji}$.

Ковариантные компоненты вектора с помощью фундаментального тензора выражаются через контравариантные по формулам

$$A_i = g_{ij} A^j. \tag{10}$$

Разрешая формулы (10) по правилу Крамера относительно контравариантных составляющих, будем иметь

$$A^i = g^{ij} A_{ij}, \tag{11}$$

где $g^{ij} = \dfrac{G_{ij}}{g}$ — составляющие контравариантного фундаментального тензора; G_{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в фундаментальном определителе g

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

3°. Обозначим дифференциальные операции фундаментального тензора следующими символами

$$\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} = \Gamma_{k,mn} + \Gamma_{n,mk};$$

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = \Gamma_{n,km} + \Gamma_{m,kn}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} = \Gamma_{m,nk} + \Gamma_{k,nm}.$$

Вычитая из суммы первых двух выражений (13) последнее и учитывая симметрию функций относительно индексов $\Gamma_{k,mn} = \Gamma_{k,nm}$, находим

$$\Gamma_{n,km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n}\right). \tag{14}$$

Символы (14) называются *символами Кристоффеля первого рода.*

Умножая символы (14) на фундаментальный тензор g_{nl}, получим символы

$$\Gamma^l_{km} = g^{nl}\Gamma^l_{n,km}, \tag{15}$$

которые называются *символами Кристоффеля второго рода.*

Умножая символы (15) на фундаментальный тензор g_{nl}, получим взаимные формулы

$$\Gamma^l_{n,km} = g_{nl}\Gamma^l_{km}. \tag{16}$$

Здесь следует отметить, что символы Кристоффеля не являются тензорами.

5.1. Вычислить символы Кристоффеля для: а) круговых цилиндрических координат; б) сферических координат.

Решение. Формулы связи между декартовыми координатами и круговыми цилиндрическими имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Координаты фундаментального тензора равны

$$g_{nn} = \left(\frac{\partial x}{\partial x^n}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^n}\right)^2, \quad g_{mn} = 0,$$

где индексы m, n могут принимать различные частные значения 1, 2 и 3, являющиеся номерами координат, присваиваемых им, согласно порядку правовинтовой системы.

Ковариантные компоненты фундаментального тензора будут

$$g_{11}=1,\ g_{22}=\rho^2,\ g_{33}=1,\ g_{23}=g_{31}=g_{12}=0,$$

где числовым индексам присвоены координатные направления ρ,θ,φ.

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, будут

$$\Gamma_{2,21}=-\Gamma_{1,22}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=\rho,\quad \Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=-\rho,\quad \Gamma_{1}^{2,2}=\frac{1}{2g_{22}^{2}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho^3},$$

$$\Gamma_{2}^{2,1}=-\Gamma_{2}^{1,2}=\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}.$$

б) Формулы связи между декартовыми x, y, z и сферическими ρ, φ, z координатами имеют вид

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Ковариантные компоненты фундаментального тензора равны

$$g_{11}=1,\ g_{22}=\rho^2,\ g_{33}=\rho^2\sin^2\theta.$$

Здесь числовые индексы 1, 2 и 3 присвоены координатым направлениям ρ,θ,φ.

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, примут вид

$$\Gamma_{2,12}=-\Gamma_{1,22}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial\rho}=\rho,\quad \Gamma_{3,13}=-\Gamma_{1,22}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial\rho}=\rho\sin^2\theta,$$

$$\Gamma_{3,23} = -\Gamma_{2,33} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \frac{\rho^2}{2}\sin 2\theta, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = -\rho,$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \rho} = \rho\sin^2 2\theta, \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\Gamma^{2,2}_1 = \frac{1}{2g^2_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^3}, \quad \Gamma^{3,3}_1 = \frac{1}{2g^2_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^3\sin^2\theta},$$

$$\Gamma^{3,3}_2 = \frac{1}{2g^2_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \frac{\cos\theta}{\rho^2\sin^3\theta},$$

$$\Gamma^{2,1}_2 = -\Gamma^{1,2}_2 = \Gamma^{3,1}_3 = -\Gamma^{1,3}_3 = \frac{1}{2g^2_{22}g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho},$$

$$\Gamma^{3,2}_3 = -\Gamma^{2,3}_3 = \frac{1}{2g_{33}g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}.$$

Глава 22
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕГО АНАЛИЗА

22.1. Действия с приближенными числами

1°. *Абсолютная погрешность.* Пусть a есть приближенное значение числа A, т. е. $A \simeq a$. Абсолютной погрешностью приближенного числа a, заменяющего точное значение числа A, называется абсолютная величина разности между ними

$$|A-a| \leq \Delta,$$

где Δ — предельная абсолютная погрешность, т. е. наименьшая из верхних граней абсолютной погрешности. Точное число A находится в пределах $A = a \pm \Delta$ или $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$. На практике предельная абсолютная погрешность может быть представлена, например, $\sqrt{2} = 1,4141 \pm 0,0001$.

2°. Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности числа a к точному числу A

$$\left|\frac{A-a}{A}\right| \leq \delta,$$

где δ — предельная относительная погрешность. На практике предельную относительную погрешность иногда вычисляют по формуле $\delta = \frac{\Delta}{a}$, так для $A = \sqrt{2}$ и $a = 1{,}4142$ $\delta = \frac{0{,}0001}{1{,}4142} = 0{,}00007$. Относительная погрешность выражается отвлеченным числом. Если приближенное число a принять за 100%, то относительная погрешность δ будет выражаться в процентах.

3°. Округление приближенного числа заключается в замене его числом с меньшим количеством значащих цифр:

а) если отбрасываемые цифры начинаются с цифры меньшей 5, то остающиеся цифры не меняют;

б) если отбрасываемые цифры начинаются с цифры большей 5, то последнюю из оставшихся цифр увеличивают на единицу;

в) если первая отбрасываемая цифра равна 5 и среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последнюю из оставшихся цифр увеличивают на единицу;

г) если первая отбрасываемая цифра равна 5, а все следующие нули, то последняя из оставшихся цифр увеличивается на единицу, когда та нечетная, и остается без изменения, когда четная.

4°. Запись приближенных чисел и верные цифры. Правило записи приближенных чисел в любой системе счисления состоит в том, что последняя значащая цифра должна быть верной. Ограничимся десятичной системой счисления. *Значащей цифрой* приближенного значения числа называется всякая отличная от нуля цифра его десятичной записи и нуль, если он приходится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Так, приближенное значение 0,03040 содержит четыре значащие цифры. Приближенное число $a > 0$ имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превышает $\frac{1}{2}$ единицы n-го разряда значащей цифры. Например, для числа 212,64 число 213,00 является приближенным значением с тремя верными цифрами, так как $|212,64-213,00|=0,34<\frac{1}{2}10^0$. За предельную относительную погрешность в этом случае можно принять число $\delta=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, где k — первая значащая цифра числа a. В частности, если $\delta\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^n$, то число заведомо имеет n верных знаков в узком смысле. Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего порядка, то все десятичные знаки n этого приближенного числа a являются верными в широком смысле $\delta=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

В процессе промежуточных вычислений приближенные числа могут содержать одну-две запасные цифры. При наличии в приближенном числе большего количества значащих цифр окончательный результат, как правило, округляется до числа цифр верных в узком или широком смысле.

5°. Арифметические действия с приближенными числами. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей складываемых чисел. Если суммируются приближенные числа с разными числами верных знаков, то следует подравнять все слагаемые по образцу числа, десятичная запись которого обрывается ранее других, сохраняя в каждом из других слагаемых запасной знак. Полученные числа складываются как точные и сумму округляют на один знак. Если складываются неокругленные приближенные числа, то лишние знаки удерживаются до конца вычислений. Относительная погрешность суммы положительных чисел не превышает наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

В случае разности двух близких приближенных чисел относительная погрешность может не содержать достоверных знаков. Поэтому следует избегать этой нежелательной операции.

Относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел. Отсюда, как следствие — предельная относительная погрешность k-й степени приближенного числа a равна k-кратной предельной относительной погрешности этого числа, а предельная относительная погрешность корня k-й степени составляет $\frac{1}{k}$-ю часть предельной относительной погрешности приближенного числа a.

6°. Пусть $\Delta a_1, ..., \Delta a_n$ — предельные абсолютные погрешности приближенных чисел $a_1, ..., a_n$. Тогда абсолютная погрешность результата различных действий $S = S(a_1, a_2, ..., a_n)$ над приближенными числами приближенно оцениваются формулой

$$\Delta S = \left|\frac{\partial S}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + ... + \left|\frac{\partial S}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Предельная относительная погрешность , соответственно, равна

$$\delta S = \frac{\Delta S}{|S|}.$$

Если суммарные погрешности ΔS и δS заданы, то полагая все частные производные в предыдущих формулах равными, можно найти необходимые для вычислений допустимые абсолютные погрешности приближенных чисел.

1.1. Вычислить абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел, верных в узком и широком смысле в написанных знаках: а) 427,3; б) 0,072; в) 37,81 кг;

г) 25°01'53"; д) 15,1 см.

Решение. а) Абсолютная погрешность приближенного числа, имеющего n верных знаков в узком смысле, не превышает половины единицы разряда, выраженного n-й значащей цифрой в десятичной записи. Следовательно, $\Delta = 0,05$. Относительная погрешность в этом случае

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{0,05 \cdot 100\%}{427,3} = 0,0117\%.$$

Абсолютная погрешность приближенного числа, имеющего n верных знаков в широком смысле, не превышает единицы разряда, выраженного n-й значащей цифрой. Следовательно, $\Delta = 0,1$. Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{0,1 \cdot 100\%}{427,3} = 0,0234\%.$$

б) Абсолютная и относительная погрешности чисел, верных в узком смысле

$$\Delta = 0,0005, \qquad \delta = \frac{0,0005 \cdot 100\%}{0,072} = 0,694\%.$$

Для чисел, верных в широком смысле в написанных знаках

$$\Delta = 0,001; \qquad \delta = \frac{0,001 \cdot 100\%}{0,072} = 1,39\%.$$

в) Для чисел, верных в узком смысле:

$$\Delta = 0,005\,кг; \qquad \delta = \frac{0,005 \cdot 100\%}{37,81} = 0,0132\%.$$

В широком смысле:

$$\Delta = 0,01\,кг; \qquad \delta = \frac{0,01 \cdot 100\%}{37,81} = 0,026\%.$$

г) Для чисел, верных в узком смысле:

$$\Delta = 0,5''; \qquad \delta = \frac{0,5 \cdot 100\%}{90113} = 0,00055\%.$$

В широком: $\Delta = 1''$; $\delta = \dfrac{1 \cdot 100\%}{90113} = 0,0011\%$.

д) Для чисел, верных в узком смысле

$$\Delta = 0,05\,см; \qquad \delta = \frac{0,05 \cdot 100\%}{15,1} = 0,331\%.$$

В широком: $\Delta = 0,1\,см$; $\delta = \dfrac{0,1 \cdot 100\%}{15,1} = 0,662\%$.

1.2. Определить число верных в узком смысле знаков и дать соответствующую запись приближенных чисел: а) 425627 при точности в 1%; б) 11,2930 при точности 2%.

Решение. а) Принимая приближенное число за 100% и учитывая, что относительная погрешность составляет 1%, находим абсолютную погрешность $\Delta = 4256$. Приближенное число 430000 имеет два верных знака в узком смысле, поскольку абсолютная погрешность не превышает $\dfrac{1}{2}$ единицы четвертого разряда значащей цифры $|425627 - 430000| = 4673 < 0,5 \cdot 10^4$.

Окончательно получим 430000 ± 4000.

б) Поскольку относительная погрешность составляет 2%, то принимая приближенное число за 100%, находим абсолютную погрешность $\Delta = 0,22586$. Приближенное число 11,3000 имеет три верных знака, так как $|11,2930 - 11,3000| = 0,007 < 0,5 \cdot 10^{-1}$. Таким образом, $11,3 \pm 0,2$.

1.3. Выполнить арифметические действия с приближенными числами, верными в написанных знаках: а) 172,36+23,7+0,413; б) 161,4 – 43,217; в) 6,3 • 1,147; г) 0,421:1,6; д) $32,4^2$; е) $\sqrt{7,16}$.

Решение. а) Поскольку десятичная запись среднего слагаемого заканчивается ранее других, то подравняем два других по образцу среднего слагаемого, сохраняя в каждом из них запасной знак, и сложим полученные числа, округляя сумму на один знак $172,3(6)+23,7+0,4(1)=196,5$.

б) Аналогично 161,4 – 43,2 (1) = 118,2.

в) Поскольку предельная относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел, то, предполагая, что все знаки сомножителей верные, получим

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 6}\cdot 0,1+\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 0,001\simeq 0,0088.$$

Отсюда следует, что число верных знаков равно трем и результат примет вид $6,3\cdot 1,147=7,23$ или $6,3\cdot 1,147=7,22\pm 0,06$.

г) Находим предельную относительную погрешность

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 4}\cdot 0,001+\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 0,1\simeq 0,050125.$$

Так как число верных знаков равно одному, то результат примет вид 0,421:1,6 = 0,26 или 0,421:1,6 = 0,3 ± 0,1.

д) Находим предельную относительную погрешность

$$\delta=\frac{1}{3}\cdot 0,1=0,03.$$

Число верных знаков квадрата $32,4^2 = 1049,76$ равно трем, а абсолютная погрешность $\Delta=31$. Тогда значение числа находится в пределах 1040 ± 31.

е) Относительная погрешность приближенного числа $\sqrt{7,16}\simeq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}10^{-2}=0,0007$; абсолютная погрешность равна $\Delta=2,676\cdot 0,0007=0,002$. Таким образом, $\sqrt{7,16}=2,676\pm 0,002$.

1.4. Вычислить $\ln(a+\sqrt{b})$, если a = 15,7; b = 21,4 — приближенные числа, верные в написанных знаках.

Решение. Найдем сначала предельную абсолютную погрешность ΔS в общем виде. Обозначим $S=\ln(a+\sqrt{b})$, тогда

$\Delta S = \dfrac{1}{a+\sqrt{b}}\left(\Delta a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right)$. Абсолютная погрешность чисел: $\Delta a = 0,05;$ $\Delta b = 0,05$. Относительная погрешность приближенного числа $\sqrt{21,4} = 4,6$ равна $\delta = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 0,025;$ абсолютная погрешность будет $\Delta = 4,63\cdot 0,025 = 0,1$.

Следовательно,

$$\Delta S = \frac{1}{15,7+4,6}\left(0,05+\frac{1}{2}\cdot\frac{0,05}{4,6}\right) = \frac{0,05}{20,3}(1+0,11) \simeq 0,003.$$

Учитывая, что сотые доли верны, получим

$$\ln\left(15,7+\sqrt{21,4}\right) \simeq 3,01.$$

26.2. Методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

1°. Кубическое уравнение:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Кубическое уравнение с помощью подстановки $x = z - \dfrac{a}{3}$ приводится к уравнению вида $z^3 + pz + q = 0$, которое по формуле Кардано имеет решение

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\Delta^{1/2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\Delta^{1/2}} = u + v, \tag{2}$$

где $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.

Если $\Delta > 0$, то $z_1 = u_1 + v_1;$ $\quad z_{2,3} = -\dfrac{u_1+v_1}{2} \pm i\sqrt{3}\,\dfrac{u_1-v_1}{2}$, где u_1, v_1 — вещественные значения корней u и v.

Если $\Delta = 0$, то $z_1 = \frac{3q}{p}$, $z_2 = z_3 = -\frac{1}{2} z_1$.

Если $z < 0$, то $z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3}$, $z_{2,3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right)$,

где $\cos\varphi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$.

2°. *Отделение вещественного корня уравнения.* Пусть дано уравнение $f(x) = 0$. Между a и b содержится единственный корень уравнения $\xi \in (a,b)$, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т. е. $f(a)\cdot f(b) < 0$, и функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$, причем обе производные на всем промежутке сохраняют знак. Отрезок $[a,b]$ называется *отрезком изоляции корня.*

Действительные корни уравнения $f(x) = 0$ можно найти и графически, поскольку корни являются абсциссами точек пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox. Иногда бывает удобнее уравнение $f(x) = 0$ представить в виде $\varphi(x) = \psi(x)$. Тогда действительными корнями будут абсциссы точек пересечения кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$.

3°. *Метод хорд.* Требуется определить действительный корень уравнения $f(x) = 0$. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 22.1) на отрезке $[a,b]$.

Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ и a — тот из концов отрезка изоляции корня, на котором $f(a)\cdot f(b) < 0$. Соединим точки A и B хордой. Тогда приближенным значением корня ξ будет точка x_1 пересечения хорды AB с осью Ox

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (3)$$

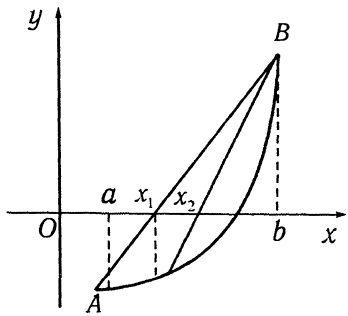


Рис. 22.1

Если $f(x_1)<0$, то принимая за новый интервал изоляции корня отрезок $[x_1, b]$ и применяя еще раз метод хорд, получаем в точке пересечения хорды с осью Ox второе приближение к искомому корню

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}. \tag{4}$$

Аналогично строятся и последующие приближения x_n $(n=1,2,...)$. Вычисления обычно ведут до тех пор, пока не перестанут изменяться в ответе сохраняемые десятичные знаки, т. е. до заданной степени точности. Для промежуточных выкладок следует оставить один-два запасных знака.

Абсолютная погрешность приближенного корня x_n при $n \to \infty$ оценивается формулой

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|}, \tag{5}$$

здесь n — последовательность натуральных чисел.

4°. *Метод касательных (метод Ньютона)*. Пусть b — тот из концов (рис. 22.2) отрезка $[a,b]$ изоляции корня ξ уравнения $f(x)=0$, на котором $f(a)\cdot f(b)<0$ и $f(b)\cdot f''(b)>0$. Тогда первым приближением к корню будет точка x_1 пересе-

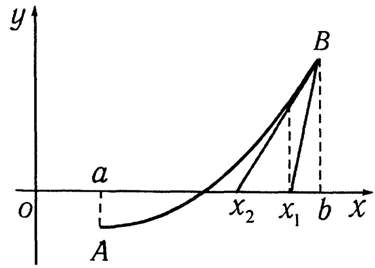


Рис. 22.2

чения с осью Ox касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $B(b, f(b))$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{6}$$

Применяя этот прием вторично, будем иметь

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{7}$$

и т. д. Последовательность получаемых значений x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к искомому корню.

Абсолютная погрешность приближенного корня x_n при $n \to \infty$ оценивается формулой

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{8}$$

где $m = \min|f'(x)|$ — минимальное значение на промежутке $a \le x \le b$.

Если $f(a)f''(a) > 0$, то вычисления удобнее выполнять по формулам: $x_0 = a,\ \ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(a)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ или $x_0 = a,\ \ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

5°. *Комбинированный метод.* Применим метод хорд и метод касательных при определении действительного корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке изоляции $[a,b]$. Пусть $f(a)\cdot f(b)<0$ и функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют своего знака на отрезке изоляции, причем в точке $x_0\in[a,b]$ $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Используя метод хорд и касательных, будем иметь

$$x_{11}=a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}; \tag{9}$$

$$x_{12}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

где x_{11}, x_{12} — приближенные значения, принадлежащие отрезку изоляции, и $f(x_{11})\cdot f(x_{12})<0$.

Следующее приближение

$$x_{21}=x_{11}-\frac{(x_{11}-x_{12})\cdot f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}; \tag{10}$$

$$x_{22}=x_{12}-\frac{f(x_{12})}{f'(x_{12})}.$$

Точки x_{21} и x_{22} расположены на числовой оси $0x$ между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{11})\cdot f(x_{22})<0$. Продолжая данный процесс, получим две последовательности

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}, \ldots$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}, \ldots,$$

причем одна из них монотонно возрастает, а другая монотонно убывает. Приближенное значение корня определяется неравенством $x_{n1}<\xi<x_{n2}$ или $x_{n2}<\xi<x_{n1}$ и, если задана требуемая погрешность $\varepsilon>0$, то вычисления следует продолжать до тех пор, пока значения x_{n1} и x_{n2} не будут совпадать с точностью ε.

6°. *Метод итераций.* Пусть уравнение $f(x)=0$ можно привести к виду $x=\varphi(x)$, где $|\varphi'(x)|\le r<1$ (r — постоянная) при $x\in[a,b]$. Если некоторое начальное значение $x_0\in[a,b]$, то можно построить последовательность

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n=\varphi(x_{n-1}), \tag{11}$$

предел которой и является корнем исходного уравнения при $n\to\infty$.

Абсолютная погрешность n-го приближения x_n определяется формулой

$$|\xi-x_n|\le\frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-r}.$$

Если x_{n+1} и x_n совпадают с точностью до ε, то предельная абсолютная погрешность для x_n будет равна $\frac{\varepsilon}{1-r}$. Отсюда для нахождения приближенного значения корня с погрешностью ε число приближений n определяется из неравенства $|x_{n+1}-x_n|<(1-r)\varepsilon$.

7°. *Метод проб.* Суть этого метода заключается в уменьшении интервала изоляции, например, пополам. Определяя, на границах какой из частей первоначального интервала функция меняет знак, снова делят интервал на две части и т. д. Процесс деления интервала продолжают до тех пор, пока не будет обеспечена требуемая точность приближения в десятичных знаках.

2.1. По формуле Кардано **решить** уравнения:
а) $z^3+18z-19=0$; б) $x^3+6x^2+9x+4=0$; в) $z^3-6z-4=0$.

Решение. а) Уравнение уже приведено к виду, когда удобно пользоваться формулами Кардано (2). Так,

$$p=18,\ q=-19,\ \Delta=\frac{19^2}{4}+\frac{18^2}{27}=306{,}25>0,\ \Delta^{1/2}=17{,}5.$$

Отсюда

$$z=\sqrt[3]{\frac{19}{2}+17,5}+\sqrt[3]{\frac{19}{2}-17,5}=3-2,$$

$$x_1=1,\ x_{2,3}=-\frac{3-2}{2}\pm i\sqrt{3}\,\frac{3+2}{2}=\frac{-1\pm i5\sqrt{3}}{2}.$$

б) Делаем подстановку $x=z-\dfrac{a}{3}=z-2$, тогда получим $(z-2)^3+6(z-2)^2+9(z-2)+4=0$ или $z^3-3z+2=0$.

Полагая $p=-3$, $q=2$, находим, что $\Delta=1-1=0$. Отсюда корни $z_1=\dfrac{3q}{p}=\dfrac{3\cdot 2}{-3}=-2$, $z_2=z_3=-\dfrac{1}{2}z_1=-\dfrac{1}{2}(-2)=1$. Окончательно получим: $x_1=-2-2=-4$, $x_2=x_3=1-2=-1$.

в) Полагая $p=-6$, $q=-4$, находим, что $\Delta=4-\dfrac{6^3}{27}=4-8=-4<0$. Отсюда $\cos\varphi=-\dfrac{-4}{2}\sqrt{\dfrac{27}{6^3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ и

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}=2\sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{12}=4\cos 45^\circ\cdot\cos 15^\circ=1+\sqrt{3};$$

$x_{2,3}=2\sqrt{-\dfrac{-6}{3}}\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\,\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Используя формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим

$$x_{2,3}=4\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\pm\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}\right)=1-\sqrt{3}.$$

2.2. Найти с точностью до 0,001 действительные корни уравнения $x^6-2x^2+3x-1=0$: а) методом хорд; б) методом касательных; в) комбинированным методом.

Решение. а) Уравнение имеет корень между 0 и 1, так как, если за $f(x)$ обозначить его левую часть, то $f(0)=-1<0$,

$f(1)=1>0$. С целью уточнения отрезка изоляции корня разделим промежуток пополам $f(0,5)=\frac{1}{64}>0$ и, так как $f(0,5)>0$, возьмем промежуток $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Разделим его еще раз пополам и найдем. что $f(\frac{1}{4})<0$. Таким образом, за отрезок изоляции корня возьмем $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

Теперь воспользуемся формулой (3) и найдем первое приближение

$$x_1=0,25-\frac{0,25(-0,3748)}{0,0156+0,3748}=0,49001.$$

Поскольку $f(x_1)=0,0038>0$, за новый интервал изоляции корня принимаем отрезок $[a;x_1]=[0,25;0,49001]$ и второе приближение находим по формуле

$$x_2=a-\frac{(x_1-a)\cdot f(a)}{f(x_1)-f(a)}=0,25-\frac{0,24001(-0,3748)}{0,0038+0,3748}=0,48146.$$

Вычисляя функцию в точке x_2, находим, что $f(0,481)=-0,0074<0$, т. е. мы перескочили через корень, поэтому следующее приближение находим по формуле

$$x_3=0,48146-\frac{0,009(-0,0074)}{0,0038+0,0074}=0,4874.$$

Значение функции в точке x_3 будет $f(x_3)=0,0005$, поэтому, оценивая погрешность по формуле (5), получим

$$|\xi-x_3|\le 0,00041.$$

Таким образом, будем иметь $0,4874<\xi<0,4879$, т. е. $\xi=0,4874+0,0005$.

б) Решим теперь это уравнение методом касательных, принимая отрезок изоляции за $[0,25;\,0,5]$. Первое приближение находим по формуле (6).

$$x_1 = 0,5 - \frac{-0,0156}{1,1875} = 0,48686.$$

Второе приближение находим по формуле (7)

$$x_2 = 0,48686 - \frac{-0,00017}{1,2167} = 0,4870.$$

Погрешности вычислений оценим по формуле (8)

$$|\xi - x_2| \le \frac{0,000006}{1,21638} = 0,000005.$$

Нетрудно заметить, что значение корня $\xi = 0,487$, найденное методом касательных, более точное значение, и нам потребовалось меньшее количество приближений.

в) Применим комбинированный метод. По формулам (9) будем иметь

$$x_{11} = 0,25 - \frac{0,25(-0,3748)}{0,0156 + 0,3748} = 0,49001;$$

$$x_{12} = 0,5 - \frac{0,0156}{1,1875} = 0,48686.$$

Поскольку приближенные значения x_{11} и x_{12}, принадлежащие отрезку изоляции, удовлетворяют неравенству $f(x_{11}) \cdot f(x_{12}) > 0$, то следующее приближение находим по формулам

$$x_{21} = x_{12} - \frac{(x_{12} - x_{11})f(x_{12})}{f(x_{11}) - f(x_{12})} = 0,48686 - \frac{-0,00315(-0,00017)}{0,0036 + 0,00017} = 0,4873;$$

$$x_{22} = x_{12} - \frac{f(x_{12})}{f'(x_{12})} = 0,48686 - \frac{-0,00017}{1,2167} = 0,487.$$

Известно, что найденные значения удовлетворяют требуемой точности.

2.3. Методом итераций **найти** вещественные корни уравнения $2^x = 4x$.

Решение. Начальное приближение найдем, построив график функций $y = 2^x$ и $y = 4x$ (рис. 22.3). По графику видно, что наименьший положительный корень x_0 близок к 0,5; второй корень уравнения равен 4.

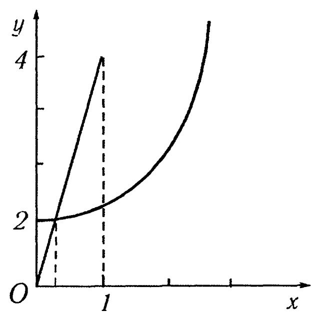


Рис. 22.3

Для нахождения наименьшего корня воспользуемся процедурой итераций (11), представив исходное уравнение в виде $x = \frac{1}{4}2^x$, где $x_0 = 0,5$.

Таким образом, $x_1 = \frac{1}{4}2^{0,5} = 0,3535;$ $x_2 = \frac{1}{4}2^{0,3535} = 0,31925;$ $x_3 = \frac{1}{4}2^{0,31925} = 0,311925;$ $x_4 = \frac{1}{4}2^{0,311925} = 0,310375;$ $x_5 = \frac{1}{4}2^{0,310375} = 0,310001.$

Процесс дальнейших приближений можно продолжить до достижения желаемой точности.

22.3. Решение системы двух уравнений

1°. *Метод Ньютона.* Пусть требуется найти приближенные значения действительных корней системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f(x,y)=0; \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Начальные приближения решений системы $x=x_0$ и $y=y_0$ можно найти, например, графически, построив кривые $f(x,y)=0$ и $\varphi(x,y)=0$ и определив приближенно координаты точек пересечения этих кривых.

Если функциональный определитель $J=\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}$ отличен от нуля в окрестности начального приближения $x=x_0$, $y=y_0$, то первое приближение можно записать в виде $x_1=x_0+\alpha_0$, $y_1=y_0+\beta_0$, где α_0,β_0 — находятся из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} f(x_0,y_0)+\alpha_0 f_x'(x_0,y_0)+\beta_0 f_y'(x_0,y_0)=0; \\ \varphi(x_0,y_0)+\alpha_0\varphi_x'(x_0,y_0)+\beta_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Аналогично находится второе приближение $x_2=x_1+\alpha_1$, $y_2=y_1+\beta_1$, где α_1,β_1 — находятся из решения системы

$$\begin{cases} f(x_1,y_1)+\alpha_1 f_x'(x_1,y_1)+\beta_1 f_y'(x_1,y_1)=0; \\ \varphi(x_1,y_1)+\alpha_1\varphi_x'(x_1,y_1)+\beta_1\varphi_y'(x_1,y_1)=0. \end{cases}$$

Продолжая процесс уточнения решения, нетрудно получить результат с требуемой точностью.

2°. *Метод итераций.* Разрешим систему (1) относительно переменных

$$\begin{cases} x = F(x,y), \\ y = \Phi(x,y). \end{cases} \tag{2}$$

Если известно начальное приближение решения (x_0, y_0) системы и выполняются условия

$$\left|F_x'(x,y)\right| + \left|\Phi_x'(x,y)\right| \le r < 1; \quad \left|F_y'(x,y)\right| + \left|\Phi_y'(x,y)\right| \le r < 1,$$

то последовательность приближений решений (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ строится по следующей схеме

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0, y_0), \quad y_1 = \Phi(x_0, y_0); \\ x_2 &= F(x_1, y_1), \quad y_2 = \Phi(x_1, y_1); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= F(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

Преобразование системы (1) в систему (2) может быть осуществлено по формулам

$$x = x + \alpha f(x,y) + \beta \varphi(x,y) \equiv F(x,y);$$
$$y = y + \gamma f(x,y) + \delta \varphi(x,y) \equiv \Phi(x,y),$$

при условии, что $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \ne 0$. Параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ выберем такими, чтобы частные производные функций $F(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ были равны или близки к нулю при $x = x_0$, $y = y_0$, т. е. из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \alpha f_x'(x_0, y_0) + \beta \varphi_x'(x_0, y_0) = 0, \\ \alpha f_y'(x_0, y_0) + \beta \varphi_y'(x_0, y_0) = 0, \\ \gamma f_x'(x_0, y_0) + \delta \varphi_x'(x_0, y_0) = 0, \\ 1 + \gamma f_y'(x_0, y_0) + \delta \varphi_y'(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

3.1. Методом Ньютона **найти** действительные корни системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^3-y=0. \end{cases}$

Решение. Начальное приближение решений системы находим графически (рис. 22.4).

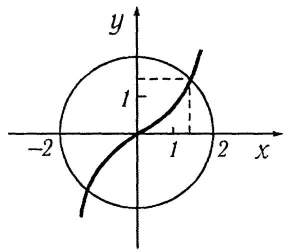


Рис. 22.4

Координаты точек пересечения окружности и кубической параболы дают начальные приближения, равные $x_0=1,4$; $y_0=1,7$.

Найдем сначала частные производные функций $f(x,y)=x^2+y^2-4=0$, $\varphi(x,y)=x^3-y=0$, $f_x'=2x$, $f_y'=2y$, $\varphi_x'=3x^2$, $\varphi_y'=1$, $f(x_0,y_0)=0{,}85$; $\varphi(x_0,y_0)=1{,}044$; $f_x'(x_0,y_0)=2{,}8$; $f_y'(x_0,y_0)=3{,}4$; $\varphi_x'(x_0,y_0)=5{,}88$; $\varphi(x_0,y_0)=1$.

Первое приближение $x_1=x_0+\alpha_0$, $y_1=y_0+\beta_0$ находим из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2{,}8\alpha_0+3{,}4\beta_0=-0{,}85, \\ 5{,}88\alpha_0+\beta_0=-1{,}044, \end{cases}$$

откуда $\alpha_0=-0{,}157$; $\beta_0=-0{,}121$; $x_1=1{,}243$; $y_1=1{,}576$.

Находим теперь значения функций и частных производных в точке x_1,y_1. Получим $f(x_1,y_1)=0{,}029$; $\varphi(x_1,y_1)=0{,}344$;

$f_x'(x_1, y_1) = 2{,}486;\ f_y'(x_1, y_1) = 3{,}152, \varphi_x'(x_1, y_1) = 4{,}635;\ \varphi_y'(x_1, y_1) = 1.$

Второе приближение находим из решения системы

$$\begin{cases} 2{,}486\alpha_1 + 3{,}152\beta_1 = -0{,}029; \\ 4{,}635\alpha_1 + \quad \beta_1 = -0{,}344. \end{cases}$$

Таким образом, $\alpha_1 = -0{,}087;\ \beta_1 = 0{,}059;\ x_2 = 1{,}156;$ $y_2 = 1{,}635$. В силу симметрии относительно начала координат два других корня будут равны $x_2' = -1{,}156;\ y_2' = -1{,}635$. Продолжая вычислительный процесс, нетрудно получить результат с желаемой точностью.

3.2. Методом итераций **найти** действительные корни системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ \ln x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приведем функции к виду $y = 4 - x^2$, $y = 1 + \ln x$ и построим график (рис. 22.5).

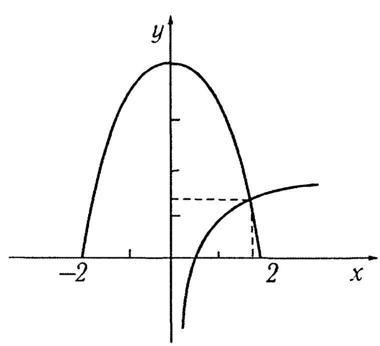


Рис. 22.5

За начальное приближение возьмем координаты точки пересечения кривых $x_0 = 1{,}6;\ y_0 = 1{,}2$. Далее воспользуемся итерационной процедурой (3), беря только положительные значения корня, так как x всегда больше нуля.

$$x_1 = \sqrt{4 - y_0} = 1{,}67; \ \ y_1 = 1 + \ln x_0 = 1{,}47;$$

$$x_2 = \sqrt{4 - y_1} = 1{,}59; \ \ y_2 = 1 + \ln x_1 = 1{,}463;$$

$$x_3 = \sqrt{4 - y_2} = 1{,}592; \ \ y_3 = 1{,}466.$$

Поскольку первые два знака после запятой не меняются, то результат найден с точностью до сотых.

22.4. Интерполирование функций

1°. *Интерполяционная формула Ньютона.* Пусть дана таблица значений

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

с постоянным шагом $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ \ (i = 0, 1, ..., n)$; $y_0, y_1, ..., y_n$ — соответствующие значения функции.

Требуется найти такой полином $y = f(x)$, который при соответствующих значениях x_i принимал бы заданное значение y_i, т. е. график этого полинома должен проходить через заданные точки $M_i(x_i, y_i)$.

Введем обозначения: $q = \dfrac{x - x_0}{h}$; $y_1 - y_0 = \Delta y_0$; $y_2 - y_1 = \Delta y_1$, ..., $y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$ — конечные разности первого порядка, $\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$; $\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$; ..., — конечные разности второго порядка, $\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 = \Delta^n y_0$; $\Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1 = \Delta^n y_1$, ... — разности n-го порядка.

В этом случае для любого промежуточного значения аргумента x значение функции y приближенно дается интерполяционной формулой Ньютона

$$y = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (1)$$

При $n=1$ имеет место линейное интерполирование; при $n=2$ — квадратичное интерполирование, если y — многочлен n-й степени, то формула (1) является точной.

На практике для удобства пользования интерполяционной формулой (1) целесообразно составлять таблицу конечных разностей. Погрешность формулы Ньютона, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке, включающем точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, определяется выражением

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между x_i и x, или приближенным выражением

$$R_n(x) \simeq \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)\ldots(q-n).$$

Если известно промежуточное значение функции y, то с помощью формулы (1) можно находить соответствующее значение аргумента x (обратное интерполирование). Для этого методом последовательных приближений сначала определяем соответствующее значение q, полагая $q^{(0)} = \dfrac{y-y_0}{\Delta y_0}$ и

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \ldots -$$

$$-\frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)\ldots(q^{(i)}-n-1)}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}, \quad (2)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда $x = x_0 + q \cdot h$, где q принимается равным общему значению двух соседних приближений $q^{(m)} = q^{(m+1)}$.

2°. *Интерполяционная формула Лагранжа.* Пусть по таблице значений x, y требуется составить полином $y = f(x)$, принимающий при $x = x_i$ заданное значение y_i $(i = 0,1,...,n)$.

В общем случае эта задача решается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} y_1 + ...$$

$$... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i + ...$$

$$... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} y_n. \tag{3}$$

Абсолютная погрешность интерполяционной формулы Лагранжа вычисляется по формуле

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|, \tag{4}$$

где $M_{n+1} = max|f^{(n+1)}(x)|, \quad x \in [a,b]$.

4.1. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

x	1	3	5	7	9
y	4	12	28	51	84

Найти y при $x = 4,5$.

Решение. Найдем конечные разности первого порядка

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0 = 12 - 4 = 8; \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1 = 28 - 12 = 16;$$

$$y_3 - y_2 = \Delta y_2 = 51 - 28 = 23; \quad y_4 - y_3 = \Delta y_3 = 84 - 51 = 33.$$

Разности второго порядка будут

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 = 16 - 8 = 8; \ \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 = 23 - 16 = 7;$$

$$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 = 33 - 23 = 10.$$

Разности высших порядков $\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 = 7 - 8 = -1;$ $\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1 = 10 - 7 = 3;$ $\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = \Delta^4 y_0 = 3 - (-1) = 4.$

Из условия имеем, что: $h = x_{i+1} - x_i = 2;$ $q = \dfrac{x-1}{2}.$

Подставляя все в формулу (1), получим

$$y = 4 + \frac{x-1}{2} \cdot 8 + \frac{\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)}{2!} \cdot 10 +$$

$$+ \frac{\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)\left(\frac{x-1}{2} - 2\right)}{3!} \cdot (-1) +$$

$$+ \frac{\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)\left(\frac{x-1}{2} - 2\right)\left(\frac{x-1}{2} - 3\right)}{4!} \cdot 4,$$

откуда

$$y = \frac{1}{96}(x^4 - 18x^3 + 224x^2 - 318x + 495).$$

Подставляя в полином значение $x = 4{,}5$, находим, что $y = 24{,}68$.

4.2. Дана таблица значений

x	1,4	1,6	1,8
y	2,151	2,577	3,107

Найти x, если $y = 2,3$.

Решение. Принимая $x_0 = 1,4;\ y_0 = 2,151,$ находим $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0,426;\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0,53;\ \Delta^2 y_0 = y_1 - y_0 = 0,104;$

$$q^{(0)} = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} = \frac{2,3 - 2,151}{0,426} = 0,35; \qquad h = x_1 - x_0 = 0,2.$$

Подставляя найденные значения в формулу (2), получим

$$q^{(1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(0)}(1 - q^{(0)})}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0,35 - \frac{0,35(0,35-1)}{2}\frac{0,104}{0,426} = 0,376.$$

$$q^{(2)} = q^{(0)} - \frac{q^{(1)}(q^{(1)} - 1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0,35 - \frac{0,322(0,322-1)}{2}\frac{0,104}{0,426} = 0,376.$$

Принимая за $q = 0,376$ общее значение двух соседних приближений, получим $x = x_0 + q \cdot h = 1,4 + 0,376 \cdot 0,2 = 1,475.$

4.3. Дана таблица величин x и y

x	0	1	3	5	6
y	1	–5	20	135	288

Составить интерполяционный многочлен Лагранжа и найти значение y при $x = 1,5$.

Решение. Подставляя табличные значения в интерполяционную формулу Лагранжа (3), получим

$$y = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)(x-6)}{(-1)(-3)(-5)(-6)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-3)(x-5)(x-6)}{1 \cdot (-2)(-4)(-5)}(-5) +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-5)(x-6)}{3 \cdot 2 \cdot (-2)(-3)} \cdot 20 + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-6)}{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-1)} \cdot 135 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot 288.$$

После упрощений будем иметь

$$y(x)=0,066x^4-0,087x^3-3,216x^2+6,807x+0,99;$$

$$y(1,5)=6,764.$$

4.4. Для функции $y=2^x$ **найти** интерполяционный многочлен Лагранжа по точкам $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. **Вычислить** значение y при $x=2,5$ и оценить погрешность.

Решение. Найдем значения функции в точках x_i

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

Пользуясь формулой (3) и учитывая, что степень многочлена $n=3$, будем иметь

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)}\cdot 1+\frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot(-1)(-2)}\cdot 2+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)}\cdot 4+\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8=\frac{1}{6}(x^3+5x+6).$$

Значение функции y при $x=2,5$ будет

$$y(2,5)=\frac{1}{6}(2,5^3+5\cdot 2,5+6)=5,687.$$

Абсолютную погрешность найдем по формуле (4)

$$f^{(n+1)}(x)=2^x\ln^4 2;\ M_{n+1}=\max\left|f^{(4)}(x)\right|=2^3\ln^4 2=8\cdot 0,21=1,68;$$

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\right|=$$

$$=\frac{1,68}{24}\left|(2,5-0)(2,5-1)(2,5-2)(2,5-3)\right|=0,066.$$

22.5. Численное дифференцирование функций

1°. Дифференцируя интерполяционные формулы, получим формулы численного дифференцирования. Так для случая равноотстоящих узлов $h = x_i - x_{i-1} - const$ будем иметь

$$y' \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{1}{12}(2q^3-9q^2+11q-3)\Delta^4 y_0 + ...); \quad (1)$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{1}{12}(6q^2-18q+11)\Delta^4 y_0 + ...), \quad (2)$$

где $q = \frac{1}{n}(x - x_0)$.

2°. В случае произвольных узлов

$$y' \approx \Delta y(x_0, x_1) + ((x-x_0)+(x-x_1))\Delta y(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+((x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)+ \quad (3)$$

$$+(x-x_1)(x-x_2))\Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) + ...,$$

где

$$\Delta y(x_0, x_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1};$$

$$\Delta y(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta y(x_0, x_1) - \Delta y(x_1, x_2)}{x_0 - x_2};$$

$$\Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta y(x_0, x_1, x_2) - \Delta y(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3};...$$

5.1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	20	86	253	547

Найти значения производных $f'(x)$ и $f''(x)$ в точке $x=3,5$.

Решение. Расчет проведем в табличном виде

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1	1	3	13	37	14	–39
1	2	4	16	50	51	–25	
2	3	20	66	101	26		
3	4	86	167	127			
4	5	253	294				
5	6	547					

Учитывая, что $h=1$, производные (1), (2) примут вид

$$y'(x)=\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+$$

$$+\frac{1}{12}(2q^3-9q^2+11q-3)\Delta^4 y_0+$$

$$+(5q^4-40q^3+105q^2-100q+24)\frac{\Delta^5 y_0}{5!};$$

$$y''(x)=\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{1}{12}(6q^2-18q+11)\Delta^4 y_0+$$

$$+(20q^3-120q^2+210q-100)\frac{\Delta^5 y_0}{5!}.$$

Частные значения производных в точке $x=3,5$ при $q=3,5-1=2,5$ равны

$$y'(3,5)=1+27+35,458-0,583-0,183=61,692;$$

$$y''(3,5)=13+55,5+4,083+4,062=76,645.$$

22.6. Вычисление определенных интегралов

Пусть требуется найти приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Для этого разобьем интервал интегрирования $[a,b]$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ и вычислим значения подынтегральной функции в точках деления

$$y_0 = f(a),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(b).$$

Представляя определенный интеграл в виде площади криволинейной трапеции, используют одну из следующих приближенных формул.

1°. *Формула прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i + R_n \qquad (1)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n = h\sum_{i=1}^{n} y_i + R_n \qquad (2)$$

где $R_n = \dfrac{h^2}{24}(b-a)f''_{max}(\xi)$ — предельная абсолютная погрешность формулы прямоугольников; $f''_{max}(\xi)$ – наибольшее значение производной в интервале $[a,b]$.

Геометрическая площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 22.6), которая соответствует определенному интегралу, записывается суммой площадей заштрихованных прямоугольников. Формула (1) соответствует схеме деления рис. 22.6, а и служит для вычисления приближенного значения интеграла по недостатку. Формула (2) соответствует схеме деления рис. 22.6,б и дает приближенное значение интеграла по избытку.

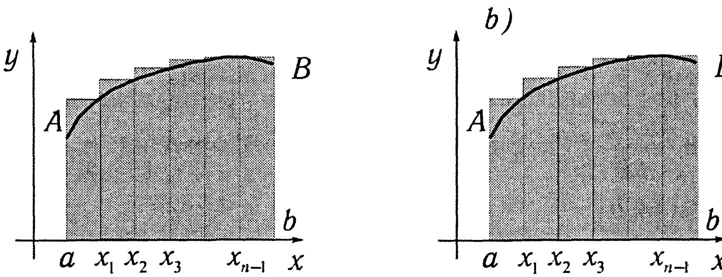


Рис. 22.6

2°. *Формула трапеций*

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n = \qquad (3)$$

$$= h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)+R_n,$$

где $R_n = h^2\dfrac{b-a}{12}f''_{max}(\xi)$ — погрешность формулы трапеций, $\xi\in[a,b]$.

Геометрическая площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 22.7) заменяется суммой площадей заштрихованных трапеций.

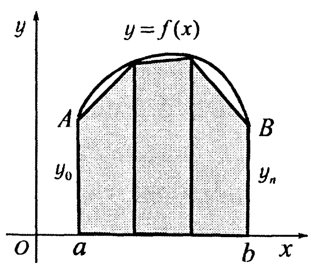


Рис. 22.7

3°. *Формула Симпсона* (параболических трапеций)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 +$$

$$+\ldots + y_{n-2})] + R_n = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k}) + R_n,$$

где $R_n = h\frac{4b-a}{180} f_{max}^{(IV)}(\xi)$ — погрешность формулы; n — число четное; $\xi \in [a,b]$.

Геометрическая площадь каждой пары вертикальных криволинейных трапеций является площадью параболической трапеции (рис. 22.8), т. е. каждый участок кривой $y = f(x)$ заменяется дугой параболы $y = x^2 + px + q$, проходящей через три точки кривой с абсциссами x_i, x_{i+1}, x_{i+2}.

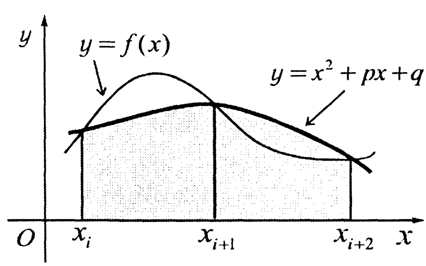


Рис. 22.8

Очевидно, что чем больше n, тем приближенное значение определенного интеграла точнее. При одном и том же n формула трапеций точнее формулы прямоугольников, формула Симпсона точнее формулы трапеций. Если предельная абсолютная погрешность задана $\varepsilon > 0$, то параметр h или число разбиений n могут быть найдены из неравенства $|R_n| < \varepsilon$.

При вычислении значений определенных интегралов на ЭВМ погрешность целесообразно оценивать методом удвоения шага вычислений. Полагая $n=k$ и $h_1=\dfrac{b-a}{k}$, вычисляем значение искомого интеграла J_1, k — четное. Затем удваивая число разбиений $n=2k$ и $h_2=\dfrac{b-a}{2k}$, находим значение интеграла J_2. Если $|J_2-J_1|<\varepsilon$, то расчет заканчивается. Иначе снова удваиваем разбиение.

6.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{5+x^3}\,dx$, разбивая интервал интегрирования на 10 равных частей, по формулам: а) прямоугольников; б) трапеций; в) Симпсона. Оценить погрешности результатов.

Решение. а) Делим интервал интегрирования $[0,1]$ на 10 равных частей, находим точки деления x_i и значения подынтегральной функции в этих точках $y=\sqrt{5+x^3}$:

$x_0=0,\qquad y_0=\sqrt{5}=2,2361,$

$x_1=0,1,\qquad y_1=\sqrt{5,001}=2,2363,$

$x_2=0,2,\qquad y_2=\sqrt{5,008}=2,2378,$

$x_3=0,3,\qquad y_3=\sqrt{5,027}=2,2421$

$x_4=0,4,\qquad y_4=\sqrt{5,064}=2,2503,$

$x_5=0,5,\qquad y_5=\sqrt{5,125}=2,2638,$

$x_6=0,6,\qquad y_6=\sqrt{5,216}=2,2839,$

$x_7=0,7,\qquad y_7=\sqrt{5,343}=2,3115,$

$x_8=0,8,\qquad y_8=\sqrt{5,512}=2,3478,$

$x_9=0,9,\qquad y_9=\sqrt{5,729}=2,3935,$

$x_{10}=1,\qquad y_{10}=\sqrt{6}=2,4494.$

Длина одной части $h = \dfrac{b-a}{n} = 0{,}1$. По формуле прямоугольников (1) имеем $J_1 \simeq 0{,}1\sum\limits_{i=0}^{9} y_i = 2{,}2803$.

Для нахождения абсолютной погрешности формулы прямоугольников вычислим наибольшее значение производной в интервале $[0{,}1]$ $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{5+x^3}}$, $f'(1) = 0{,}6124$.

Абсолютная ошибка приближенного значения по недостатку равна $R_n = \dfrac{0{,}1}{24}1{,}0716 = 0{,}0004$.

По формуле прямоугольников (2) находим приближенное значение по избытку $J_2 \simeq 0{,}1\sum\limits_{1}^{10} y_i = 2{,}3016$.

Абсолютная ошибка этого приближения равна $R_n = 0{,}0004$.

б) По формуле трапеций (3) имеем

$$J = 0{,}1\left(\frac{4{,}6855}{2} + \sum_{i=1}^{9} y_i\right) = 2{,}291.$$

Абсолютная ошибка результата равна

$$R_n = \frac{0{,}01}{12}1{,}0716 = 0{,}0009.$$

в) По формуле Симпсона получим

$$J = \frac{0{,}1}{3}(2{,}2361 + 2{,}4494 + 4\cdot 11{,}4472 + 2\cdot 9{,}1198) = 2{,}2905.$$

Для нахождения абсолютной погрешности вычисляем $f_{(1)}^{IV} = 1{,}6244$. Абсолютная ошибка равна всего лишь

$$R_n = \frac{0{,}0001}{180}\cdot 1{,}6244 = 0{,}0000009.$$

6.2. По формуле Симпсона **вычислить** приближенное значение интеграла $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{x+1}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Сначала определим, на какое число частей n следует разбить интервал интегрирования $[0,\pi]$. Поскольку требуется точность 10^{-4}, то имеем

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} f_{max}^{IV} < 10^{-4}.$$

Так как $f_{max}^{IV} = 0,039;\ a = 0,\ b = \pi = 3,14159,$ то окончательно получим $n^4 > \frac{\pi^5 \cdot 0,039 \cdot 10^4}{18}$ или $n > 5,1.$

Ближайшее четное число $n = 6.$ Находим точки деления x_i и соответствующие им значения функции $y = \frac{\sin x}{x+1}$

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad y_1 = 0,3283$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, \qquad y_2 = 0,4235$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, \qquad y_3 = 0,3891$$

$$x_4 = \frac{2}{3}\pi, \qquad y_4 = 0,2803$$

$$x_5 = \frac{5}{6}\pi, \qquad y_5 = 0,1382$$

$$x_6 = \pi, \qquad y_6 = 0.$$

Подставляя в формулу Симпсона (4), находим значение интеграла с точностью 10^{-4}

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{x+1} = 0.1744(4 \cdot 0,8556 + 2 \cdot 0,7038) = 0,84235.$$

Современная вычислительная техника позволяет вычислять интегралы с любой точностью, необходимой для практического использования результатов расчета.

22.7. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. *Метод Эйлера.* Рассмотрим уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$. Требуется на отрезке $[x_0, x_n]$ составить таблицу приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего начальному условию $y_0 = y(x_0)$. Для этого разбиваем данный отрезок точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ на n частичных отрезков и находим касательную к интегральной кривой на каждом участке.

Уравнение касательной на первом частичном отрезке $[x_0, x_1]$ к искомой интегральной кривой в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x - x_0),$$

откуда при $x = x_1$ находим приближенное значение искомого интеграла y_1 в точке x_1

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)y'(x_0, y_0). \tag{1}$$

Аналогично, для отрезка $[x_1, x_2]$ в точке x_2 будем иметь

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)y'(x_1, y_1) \tag{2}$$

или для любого i-го отрезка

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})y'(x_{i-1}, y_{i-1}) = y_{i-1} + hy'(x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{3}$$

где в случае частичных отрезков одинаковой длины длина одного отрезка $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$. Таким образом, процесс интегрирования сводится к замене интегральной кривой ломаной, состоящей из отрезков касательных.

При увеличении n длина частичных отрезков уменьшается и точность решения возрастает.

2°. *Метод Рунге–Кутта.* Пусть требуется на отрезке $[x_0, x_n]$ найти с заданной степенью точности ε решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Сначала делим отрезок $[x_0, x_n]$ на n равных частей $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ так, чтобы $h^4 < \varepsilon$. Тогда метод Рунге-Кутта имеет погрешность h^4. Точки деления x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ находим по формуле $x_i = x_0 + ih$. Соответствующие значения искомой функции $y_i = y(x_i)$ по методу Рунге–Кутта находятся по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y, \tag{4}$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(a_i + 2b_i + 2c_i + d_i);$$

$$a_i = hf(x_i, y_i);$$

$$b_i = hf(x_i + \frac{h}{2}, \quad y_i + \frac{a_i}{2});$$

$$c_i = hf(x_i + \frac{h}{2}, \quad y_i + \frac{b_i}{2});$$

$$d_i = hf(x_i + h, \quad y_i + c_i).$$

Точность метода Рунге–Кутта приближенно может быть определена из принципа Рунге $R = \dfrac{1}{15}\left|y_{2m} - \tilde{y}_m\right|$, где $y_{2m}, \tilde{y}_m$ — результаты вычислений с шагом h и $2h$, $n = 2m$.

Метод Рунге–Кутта легко обобщается и на решение системы дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, t); \quad x' = \varphi(x, y, t), \tag{5}$$

удовлетворяющий начальным условиям: $x - x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$.

3°. *Метод Милна.* Требуется найти на отрезке $[x_0, x_n]$ решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$. Для этого находим каким-либо способом три последовательные значения

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

искомой функции (например, методом Эйлера или Рунге-Кутта) и т. д.

Последующие значения $y_i \quad (i = 4, 5, ..., n)$ вычисляем по формулам

$$\overline{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + f_{i-1}); \tag{6}$$

$$\overline{\overline{y}}_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\overline{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}),$$

где $f_i = f(x_i, y_i) = y'_i; \quad \overline{f}_i = ff(x_i, \overline{y}_i)$.

Контроль расчета определяется величиной $\varepsilon_i = \frac{1}{29}\left|\overline{y}_i - \overline{\overline{y}}_i\right|$. Если $\varepsilon_i \le 10^{-m}$, где m — последний десятичный разряд, сохраняемого в ответе знака, то за y_i принимаем $\overline{\overline{y}}_i$ и вычисляем следующее значение функции y_{i+1}. Если же $\varepsilon_i > 10^{-m}$, то следует, уменьшив шаг разбиения, расчет провести сначала. Для определения величины начального шага можно воспользоваться неравенством $h^4 < 10^{-m}$.

Метод Милна может быть использован и для решения системы уравнений (5). В этом случае формулы Милна пишутся отдельно для функций $x(t)$ и $y(t)$. Дальнейший порядок вычислений остается без изменений.

4°. *Метод Адамса.* Требуется найти на отрезке $[x_0, x_n]$ решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$. Найдем сначала каким-либо способом (методом Эйлера или Рунге–Кутта и т. д.) три последовательные значения искомой функции

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3).$$

Введем обозначения

$$q_0 = hy_0' = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy_1' = hf(x_1, y_1);$$

$$q_2 = hy_2' = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy_3' = hf(x_3, y_3) \tag{7}$$

и составим диагональную таблицу конечных разностей величины q (вычисленные величины расположены выше пунктирной линии).

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x,y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

Продолжение диагональной таблицы разностей вычисляется по формуле Адамса

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \tag{8}$$

Напрмер, зная числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, расположенные выше пунктирной линии, по формуле (8) для $n=3$ находим $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Затем вычисляем $y_4 = y_3 + \Delta y_3$; $f(x_4, y_4)$ и $q_4 = hf(x_4, y_4)$. Далее находим конечные разности Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенные совместно с q_4 по новой диагонали.

Аналогично, полагая $n=4$, вычисляем $\Delta y_4, y_5, f(x_5, y_5), q_5$ и находим следующую диагональ $\Delta q_4, \Delta^2 q_3, \Delta^3 q_2$, и т. д.

Если требуется получить решение $y(x)$ (второй столбец) с точностью до 10^{-m}, то величину начального шага вычислений определяют из неравенства $h^4 < 10^{-m}$. В практических расчетах шаг h выбирается таким, чтобы разности $\Delta^3 q_i$ и $\Delta^3 q_{i+1}$ отличались между собой не более чем на одну-две единицы заданного разряда.

7.1. Пользуясь методом Эйлера, **найти** решение уравнения $y' = y^3 - x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$, на отрезке $[1,2]$, разбив его на 10 равных частей. Все вычисления вести с точностью до 0,001.

Решение. Найдем сначала длину одного частичного отрезка $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$. Решение уравнения представим в табличном виде. Для этого сначала находим точки $x_1 = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}2$; ..., разбивающие заданный интервал на 10 равных частей. Затем из исходного уравнения $y' = y^3 - x^2$ определяем значение производной y' в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, т. е. $y'(1{,}1) = 0$. Далее по формуле (1) вычисляем $y_1 = y_0 + hy_0' = 1$.

i	x_i	y_i	y_i'	hy_i'
0	1	1	0	0
1	1,1	1	–0,21	–0,021
2	1,2	0,979	–0,502	–0,050
3	1,3	0,929	–0,888	–0,089
4	1,4	0,840	–1,367	–0,137
5	1,5	0,703	–1,903	–0,190
6	1,6	0,513	–2,428	–0,243
7	1,7	0,270	–2,870	–0,287
8	1,8	–0,017	–3,24	–0,324
9	1,9	–0,341	–3,65	–0,365
10	2	–0,706		

Зная x_1, y_1, из заданного уравнения находим $y_1'(x_1, y_1) = 1 - (1{,}1)^2 = -0{,}21$ и по формуле (2) вычисляем $y_2 = y_1 + hy_1' = 0{,}979$. Последующие значения y_i находятся аналогично по формуле (3).

Приближенные значения частного интеграла уравнения заключены в столбцах x_i, y_i данной таблицы.

7.2. Найти методом Эйлера численное решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y - x}{t}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x + y}{t},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = 1$, $y(1) = 1$, $t \in [1, 2]$, полагая $h = 0{,}2$.

Решение. Решение системы уравнений представим в табличном виде. Для этого сначала находим значения $t_0 = 1$; $t_1 = 1{,}2$; .... Затем из исходных уравнений определяем значения производных x', y' при $t_0 = 1$, x_0, y_0 и по формулам, аналогичным формуле (1) $x_1 = x_0 + hx'_0$, $y_1 = y_0 + hy'_0$, вычисляем значения $x_1(x_0, y_0, t_0)$, $y_1(x_0, y_0, t_0)$. Далее из заданной системы уравнений находим x'_1, y'_1 и по формулам, аналогичным формулам (2), определяем значения x_2, y_2 и т. д. Все результаты расчета приведены в таблице

i	t_i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	hx'_i	hy'_i
0	1	1	1	0	2	0	0,4
1	1,2	1	1,4	0,333	2	0,067	0,4
2	1,4	1,067	1,8	0,524	2,048	0,105	0,410
3	1,6	1,172	2,21	0,649	2,114	0,130	0,423
4	1,8	1,302	2,633	0,739	2,186	0,148	0,437
5	2,0	1,450	3,07				

7.3. Методом Рунге–Кутта **проинтегрировать** уравнение $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ при начальных условиях $y(0) = 1$ в промежутке $[0,1]$ с шагом $h = 0,25$.

Решение. Промежуток интегрирования от $x = 0$ до $x = 1$ разобьем на четыре части длиной 0,25, соответственно, точками x_i $(i = 0,1,2,3,4)$. Значения y находим по формулам (4) в табличном виде. Вычисления y_1 приведем более подробно: $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0,25, y'_0 = f(x_0, y_0)$

$$a_0 = hf(x_0, y_0) = 0,25\frac{1-0}{1+0} = 0,25;$$

$$b_0 = hf(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{a_0}{2}) = 0,25\frac{-0,125}{1,125+0,125} = 0,2;$$

$$c_0 = hf(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{b_0}{2}) = 0,25\frac{1+0,1-0,125}{1,1+0,125} = 0,199;$$

$$d_0 = hf(x_0 + h,\ y_0 + c_0) = 0,25\frac{1,199-0,25}{1,199+0,25} = 0,164;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(a_0 + 2b_0 + 2c_0 + d_0) = \frac{1}{6}(0,25+0,4+0,398+0,164) = 0,202;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,5 + 0,202 = 1,702.$$

Аналогично вычисляются значения y_2, y_3 и y_4 (см. табл.). Так значение y_2 равно:

$$a_1 = hf(x_1, y_1) = 0,25\frac{1,702-0,25}{1,702+0,25} = 0,186;$$

$$b_1 = hf(x_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{a_1}{2}) = 0,25\frac{1,702+0,093-(0,25+0,125)}{1,795+0,375} = 0,164;$$

$$c_1 = hf(x_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{b_1}{2}) = 0,25\frac{1,702+0,082-(0,25+0,125)}{1,784+0,375} = 0,163;$$

$$d_1 = hf(x_1 + h,\ y_1 + c_1) = 0,25\frac{1,702+0,163-0,375}{1,865+0,375} = 0,166;$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0,186+0,328+0,326+0,166) = 0,168;$$

$$y_2 = 1,702 + 0,168 = 1,870$$

i	x_i	y_i	a_i	b_i	c_i	d_i	Δy_i
0	0	1	0,25	0,2	0,199	0,164	0,202
1	0,25	1,702	0,186	0,164	0,113	0,166	0,168
2	0,50	1,870	0,144	0,178	0,128	0,113	0,128
3	0,75	1,998	0,113	0,101	0,100	0,089	0,101
4	1,00	2,099					

7.4. Методом Милна **проинтегрировать** уравнение $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0,1]$ с шагом $h = 0,2$.

Решение. Интервал интегрирования разобьем на пять частей точками деления x_i $(i = 0,1,2,3,4,5)$. Первые три приближения найдем методом Эйлера: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'(x_0, y_0) = 1$ и по формуле (1) $y_1 = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,2$. Находим $y_1'(x_1, y_1) = 0,2 + 1,2 = 1,4$ и по формуле (2) $y_2 = 1,2 + (0,4 - 0,2) \cdot 1,4 = 1,48$. Далее $y_2'(x_2, y_2) = 0,4 + 1,48 = 1,88$ и по формуле (3) $y_3 = y_2 + (x_3 - x_2) y_2'(x_2, y_2) = 1,48 + (0,6 - 0,4) \cdot 1,88 = 1,856.$ $y_3' = 0,6 + 1,856 = 2,456$.

Последующие значения вычисляем по формулам (6)

$$\bar{y}_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y_1' - y_2' + 2y_3') = 1 + \frac{0,8}{3}(2 \cdot 1,4 - 1,88 + 2 \cdot 2,456) = 2,555;$$

$$\bar{f}_4 = x_4 + \bar{y}_4 = 0,8 + 2,555 = 3,355;$$

$$\bar{\bar{y}}_4 = y_2 + \frac{0,2}{3}(\bar{f}_4 + 4y_3' + y_2') = 1,48 + \frac{0,2}{3}(3,355 + 4 \cdot 2,456 + 1,88) = 2,484;$$

$$y_4' = x_4 + y_4 = 0,8 + 2,484 = 3,284;$$

$$\bar{y}_5 = y_1 + \frac{0,8}{3}(2y_2' - y_3' + 2y_4') = 1,2 + \frac{0,8}{3}(2 \cdot 1,88 - 2,456 + 2 \cdot 3,284) = 3,299;$$

$$\bar{f}_5 = x_5 + \bar{y}_5 = 1 + 3,299 = 4,299;$$

$$\bar{\bar{y}}_5 = y_3 + \frac{0,2}{3}(\bar{f}_5 + 4y_4' + y_2') = 1,856 + \frac{0,2}{3}(4,299 + 4 \cdot 3,284 + 2,456) = 3,182$$

Поскольку шаг задан, то уменьшать его не будем и за y_5 возьмем $\bar{\bar{y}}_5$.

7.5. Методом Адамса **проинтегрировать** уравнение $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0,1]$ с шагом

$h = 0,2$ и сравнить результат с предыдущим решением (7.4.).

Решение. Первые три последовательные значения функции, найденные методом Эйлера, берем из решения (7.4.): $y_1 = 1,2;\ y_2 = 1,48;\ y_3 = 1,856.$

По формулам (7) находим значения $q_0 = 0,2 \cdot 1 = 0,2;$ $q_1 = 0,2 \cdot 1,4 = 0,28;$ $q_2 = 0,2 \cdot 1,88 = 0,376;$ $q_3 = 0,2 \cdot 2,456 = 0,491$ и составим диагональную таблицу

x_i	y_i	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x,y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	1	0,2	1	0,2	0,08	0,016	0,003
0,2	1,2	0,28	1,4	0,28	0,096	0,019	0,018
0,4	1,48	0,376	1,88	0,376	0,115	0,037	
0,6	1,856	0,557	2,456	0,491			
0,8	2,413		3,213	0,642			
1							

Зная числа $q_3 = 0,491;\ \Delta q_2 = 0,115;\ \Delta^2 q_1 = 0,019, \Delta^3 q_0 = 0,003,$ расположенные выше пунктирной линии, по формуле (8) для $n = 3$ находим

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 =$$

$$= 0,491 + \frac{1}{2}0,115 + \frac{5}{12}0,019 + \frac{3}{8}0,003 = 0,5575$$

и вычисляем $y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 2,413$.

Полагая $n = 4$, вычисляем

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1 =$$

$$= 0,642 + \frac{1}{2}0,152 + \frac{5}{12}0,037 + \frac{3}{8}0,018 = 0,740.$$

Находим $y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 2,413 + 0,740 = 3,153.$

Сравнивая с результатом предыдущего примера, нетрудно заметить, что расхождение во втором знаке после запятой. С целью улучшения сходимости решений необходимо в том и другом случае уменьшить вдвое шаг.

22.8. Метод коллокаций

Метод коллокации является приближенным методом решения дифференциальных уравнений и заключается в сведении решения к системе алгебраических уравнений. Решение задачи методом коллокации сводится к отысканию искомой функции в узловых точках сетки, удовлетворяющей заданому уравнению и граничным условиям.

8.1. Найти решение уравнения изгиба балки (рис. 22.9) при произвольно распределенной нагрузке $q(x)$

$$EJw^{IV} = q(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w = w' = 0 \text{ при } x = 0, \; w = w'' = 0 \text{ при } x = l. \tag{2}$$

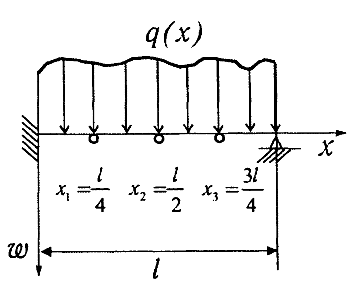


Рис. 22.9

Решение. Разобьем балку на четыре участка $\Delta x = \frac{l}{4}$ точками 1,2,3 и представим решение уравнения изгиба в виде

$$w(x) = \sum_k a_k \left(\frac{x}{l}\right)^k, \quad k = 0,1,2,...,n. \tag{3}$$

Число членов ряда определяется числом граничных условий (2) и числом узловых точек, в которых должно быть удовлетворено уравнение (1). Поскольку мы имеем четыре граничных условия и три точки коллокации, то в (3) будет семь членов

$$w(x) = a_0 + a_1\frac{x}{l} + a_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_4\left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_5\left(\frac{x}{l}\right)^5 + a_6\left(\frac{x}{l}\right)^6. \tag{4}$$

Подставляя (4) в граничное условие (2), будем иметь

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad a_1 = 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0; \\ a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 + 15a_6 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим уравнение

$$24a_4 + 120a_5\frac{x}{l} + 360a_6\frac{x^2}{l^2} = \frac{q(x)l^4}{EJ},$$

которое при $x_1 = \frac{l}{4}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{3l}{4}$ дает алгебраические уравнения

$$24a_4 + 30a_5 + 22{,}5a_6 = \frac{q(x_1)l^4}{EJ},$$

$$24a_4 + 60a_5 + 90a_6 = \frac{q(x_2)l^4}{EJ}, \tag{6}$$

$$24a_4 + 90a_5 + 202{,}5a_6 = \frac{q(x_3)l^4}{EJ}.$$

Коэффициенты $a_i\ (i = 0,1,\dots,6)$ находятся из совместного решения системы алгебраических уравнений (5) и (6). В случае равномерной нагрузки q_0 коэффициенты имеют вид

$$a_0 = a_1 = a_5 = a_6 = 0; \quad a_2 = \frac{q_0 l^4}{16EJ}, \ a_3 = \frac{-5q_0 l^4}{48EJ}, \quad a_4 = \frac{q_0 l^4}{24EJ}.$$

Решение (4) в этом случае будет

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{8EJ}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{5}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4\right].$$

Глава 23
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

23.1. Конечно-разностный метод (метод сеток)

1°. Суть метода конечных разностей состоит в том, что точные значения производных заменяются их приближенными значениями через дискретные значения функций на конечных интервалах. Точное значение производной равно $\frac{du}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной в точке l к оси Ox (рис. 23.1). Приближенное значение производной в точке l будет

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l \simeq \frac{u_m - u_l}{\Delta x} \quad или \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l \simeq \frac{u_l - u_k}{\Delta x}, \tag{1}$$

где Δx — конечный интервал аргумента, $u_m - u_l$ — первая правая разность, $u_l - u_k$ — первая левая разность.

Аналогично вычисляются производные в направлении оси Oy

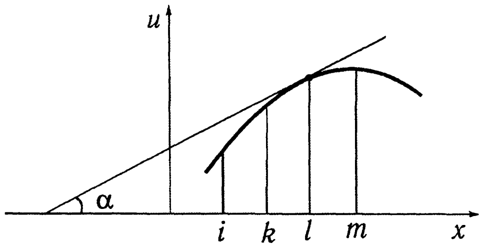


Рис. 23.1

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_l \simeq \frac{u_n - u_l}{\Delta y} \quad или \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_l \simeq \frac{u_l - u_j}{\Delta y}. \tag{2}$$

Разности (1), (2) называются нецентрированными разностями.

Представляя вторую разность как разность первых разностей, вторые производные в точке l представим в виде

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_l = \frac{(u_m - u_l) - (u_l - u_k)}{\Delta x^2} = \frac{u_m - 2u_l + u_k}{\Delta x^2}; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_l = \frac{(u_n - u_l) - (u_l - u_j)}{\Delta y^2} = \frac{u_n - 2u_l + u_j}{\Delta y^2}.$$

2°. Для двумерной области (рис. 23.2) целесообразнее для функций ввести двойную нумерацию.

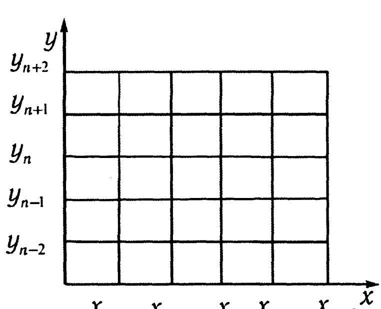


Рис. 23.2

Так, разбивая область прямоугольной сеткой с соответственно равными шагами $\Delta x, \Delta y$, значения производных в точке с координатами x_m, y_n могут быть заменены конечными приращениями

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta x}(u_{m+1,n}-u_{m-1,n});$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\Delta y}(u_{m,n+1}-u_{m,n-1});$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n});$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta y^2}(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1});$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\Delta x\Delta y}(u_{m+1,n+1}-u_{m-1,n+1}-u_{m+1,n-1}+u_{m-1,n-1});$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{-1}{\Delta x^4}(u_{m+2,n}-u_{m+1,n}+6u_{m,n}-4u_{m-1,n}+u_{m-2,n});$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=\frac{-1}{\Delta y^4}(u_{m,n+2}-4u_{m,n+1}+6u_{m,n}-4u_{m,n-1}+u_{m,n-2});$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial y^2}=\frac{1}{\Delta x^2\Delta y^2}(u_{m+1,n+1}+u_{m+1,n-1}-2u_{m+1,n}-2u_{m,n+1}+$$

$$+4u_{m,n}-2u_{m,n-1}-2u_{m-1,n}+u_{m-1,n+1}+u_{m-1,n-1}).$$

Действующую нагрузку и правые части дифференциальных уравнений представляем в виде величин, отнесенных к узлам сетки. Сетка может быть и прямоугольной, т. е. $\Delta x \neq \Delta y$.

1.1. Задача о кручении стержня квадратного сечения сводится к решению уравнения Пуассона

$$\nabla^2 F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2.$$

Найти решение уравнения при нулевых значениях функции напряжения Прандтля $F(x,y)$ на контуре.

Решение. Воспользуемся методом конечных разностей. Рассмотрим поперечное сечение стержня и разобьем его на 16 равных квадратов со стороной, равной a (рис. 23.3).

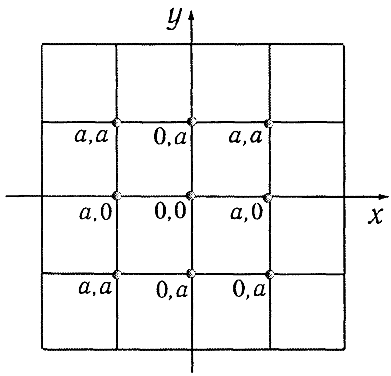


Рис. 23.3

На контуре функция напряжений равна нулю. В девяти внутренних узлах сетки имеем девять уравнений с девятью неизвестными. Учитывая симметрию относительно координатных осей, получим лишь три независимых значения функции в трех точках $F(0,0)$, $F(a,0)$, $F(a,a)$.

Относительно трех точек с координатами $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) составим три разностных уравнения. Введем обозначения $\Delta x = \Delta y = a$. Полагая $m = 0$, $n = 0$ и учитывая симметрию, будем иметь $u_{m+1,n} = F(a,0)$; $u_{m,n} = F(0,0)$; $u_{m-1,n} = F(a,0)$; $u_{m,n+1} = F(0,a) = F(a,0)$; $u_{m,n-1} = F(0,a) = F(a,0)$. Используя выражения (4) и подставляя их в уравнение Пуассона, первое уравнение относительно точки $(0,0)$ будет

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[F(a,0) - 2F(0,0) + F(a,0)\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[F(a,0)-2F(0,0)+F(a,0)\right]=-2$$

или

$$F(0,0)-F(a,0)=\frac{a^2}{2}.$$

Для второй точки $(a,0)$ имеем $u_{m+1,n}=F(a,0);$ $u_{m+2,n}=0;$ $u_{m+1,n+1}=F(a,a);$ $u_{m+1,n-1}=F(a,a)$. Уравнение Пуассона с учетом формул (4) примет вид

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[F(0,0)-2F(a,0)\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[F(a,a)-2F(a,0)+F(a,a)\right]=-2$$

или

$$4F(a,0)-F(0,0)-2F(a,a)=2a^2.$$

Для третьей точки (a,a) будем иметь: $u_{m+1,n+1}=F(a,a);$ $u_{m,n+1}=F(0,a)=F(a,0);$ $u_{m+2,n+1}=0;$ $u_{m+1,n+2}=0$ и уравнение примет вид

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[F(a,0)-2F(a,a)\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[F(a,0)-2F(a,a)\right]=-2$$

или

$$2F(a,a)-F(a,0)=a^2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} F(0,0)-F(a,0) = \dfrac{a^2}{2}, \\ 4F(a,0)-F(0,0)-2F(a,a)=2a^2, \\ 2F(a,a)-F(a,0) = a^2, \end{cases}$$

получим искомые значения функции напряжений в точках $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a), соответственно: $F(0,0)=2{,}25a^2$; $F(a,0)=1{,}75a^2$; $F(a,a)=1{,}375a^2$.

С целью уточнения решения следует увеличить разбиение области интегрирования, т. е. Δx и Δy уменьшить.

23.2. Дифференциально-разностный метод (метод прямых)

Основная идея метода прямых (или дифференциально-разностного метода) состоит в сведении уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это достигается использованием метода конечных разностей по одной переменной, т. е. решение уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль некоторого семейства прямых.

Пусть в прямоугольной области $D(a<x<b,\ c<y<d)$ необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=f(x,y),$$

удовлетворяющее заданным граничным условиям

$$u(x,c)=\varphi(x);\quad u(x,d)=\varphi_1(x)\quad (a\le x\le b)$$

$$u(a,y)=\psi(y);\quad u(b,y)=\psi_1(y)\quad (c\le y\le d).$$

Разобьем область интегрирования семейством равноотстоящих друг от друга на расстоянии h прямых, параллельных соответствующим осям x или y. Для определенности возьмем прямые $y=c+kh$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$. Заменим производные по y приближенными разностными выражениями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k}=\frac{1}{2h}\left[u(x,y_{k+1})-u(x,y_{k-1})\right];$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = \frac{1}{h^2}\left[u(x,y_{k+1}) - 2u(x,y_k) + u(x,y_{k-1})\right].$$

Поскольку $u_k(x) = u(x,y_k)$ есть функция одной переменной x при фиксированном значении y_k, то решение сводится к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_k''(x) + \frac{1}{h^2}\left[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)\right] + u_k'(x) +$$

$$+\frac{1}{2h}\left[u_{k+1}(x) - u_{k-1}(x)\right] + u_k(x) = f_k(x) \qquad (k = 1,2,\ldots,n).$$

При наличии в уравнениях переменных коэффициентов перед частными производными разбивку следует производить так, чтобы свести, по возможности, задачу к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3.1. Методом прямых **найти** решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y) = u(5,y) = u(x,0) = u(x,3) = 0.$$

Решение. Принимая $h = 1$, проведем две прямые $y = 1$ и $y = 2$, которые разделят область интегрирования на три полосы (рис. 23.4).

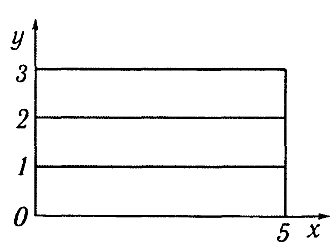


Рис. 23.4

Запишем вторую частную производную по y разностным выражением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\left[u(x,y_{k+1})-2u(x,y_k)+u(x,y_{k-1})\right] \quad (k=1,2).$$

Поскольку $h=1$, то получим следующую систему уравнений

$$u_1''+u_2-2u_1+u_0=x+y_1; \quad (k=1),$$

$$u_2''+u_3-2u_2+u_1=x+y_2; \quad (k=2) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$u_0(x)=u(x,0)=0; \quad u_3(x)=u(x,3)=0.$$

Подставляя граничные условия в (1) и учитывая, что $y_1=1,\ y_2=2$, получим

$$u_1''+u_2-2u_1=x+1;$$

$$u_2''-2u_2+u_1=x+2. \qquad (2)$$

Таким образом, решение свелось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующей однородной системы

$$u_1''+u_2-2u_1=0;$$

$$u_2''-2u_2+u_1=0$$

ищем в виде $\bar{u}_1(x)=Ae^{\lambda x}$; $\bar{u}_2(x)=Be^{\lambda x}$.

Подставляя решение в систему и сокращая на $e^{\lambda x}$, получим систему алгебраических уравнений

$$A\lambda^2+B-2A=0; \qquad (\lambda^2-2)A+B=0;$$

$$B\lambda^2-2B+A=0 \quad \text{или} \quad A+(\lambda^2-2)B=0.$$

Поскольку ищется нетривиальное решение, то определитель системы должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} \lambda^2-2 & 1 \\ 1 & \lambda^2-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим характеристическое уравнение

$$(\lambda^2-2)^2-1=0,$$

корни которого равны $\lambda_{1,2}=\pm 1,\ \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$

При $\lambda_{1,2}=\pm 1$ имеем

$-A+B=0;$

$A-B=0;\quad (i=1,2)\quad A_i=B_i=C_i.$

При $\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3}$ имеем

$A+B=0;$

$A+B=0;\quad (i=3,4)\quad A_i=-B_i=C_i.$

Таким образом, общее решение примет вид

$$\overline{u}_1=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{3}x}+c_4e^{-\sqrt{3}x};$$

$$\overline{u}_2=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3e^{\sqrt{3}x}-c_4e^{-\sqrt{3}x}.$$

Частное решение системы неоднородных уравнений ищем в виде

$$\overset{*}{u}_1(x)=Ax+B;\qquad \overset{*}{u}_2(x)=Cx+D.$$

Подставляя частное решение в систему (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим систему

$$C-2A=1;\quad -2C+A=1;$$

$$D-2B=1;\quad -2D+B=2.$$

Из решения этой системы находим: $A=-1,\ B=-\dfrac{4}{3},$ $C=-1,\ D=-\dfrac{5}{3}.$ Таким образом, частное решение будет

$$\overset{*}{u}_1(x)=-(x+\frac{4}{3});\quad \overset{*}{u}_2(x)=-(x+\frac{5}{3}).$$

Общее решение системы (2) равно сумме решений

$$u_1(x)=\overline{u}_1+\overset{*}{u}_1(x); \qquad u_2(x)=\overline{u}_2+\overset{*}{u}_2(x)$$

или

$$u_1=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{3}x}+c_4e^{-\sqrt{3}x}-(x+\frac{4}{3});$$

$$u_2=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3e^{\sqrt{3}x}-c_4e^{-\sqrt{3}x}-(x+\frac{5}{3}). \qquad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 воспользуемся граничными условиями

$$u_1(0)=u(0,y_1)=0; \quad u_2(0)=u(0,y_2)=0;$$

$$u_1(5)=u(5,y_1)=0; \quad u_2(5)=u(5,y_2)=0.$$

Отсюда находим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$c_1+c_2+c_3+c_4=\frac{4}{3};$$

$$c_1+c_2-c_3-c_4=\frac{5}{3};$$

$$e^5c_1+e^{-5}c_2+e^{5\sqrt{3}}c_3+e^{-5\sqrt{3}}c_4=\frac{19}{3};$$

$$e^5c_1+e^{-5}c_2-e^{5\sqrt{3}}c_3-e^{-5\sqrt{3}}c_4=\frac{20}{3}.$$

Подставляя найденные постоянные интегрирования в (3), находим изменение функции и вдоль прямых $y=1$ и $y=2$.

3.2. Методом прямых **найти** решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,x)=0, \quad u(t,0)=u(t,l)=0 \quad (l=4).$$

Решение. Разделим отрезок $[0,l]$ на четыре части точками деления $k=0,1,2,3,4$. Обозначим через $u_k(t)$ приближенное значение решения на прямых $x=\dfrac{kl}{4}$. Заменим вторую частную производную по x разностным выражением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{16}{l^2}\left[u(t,x_{k+1})-2u(t,x_k)+u(t,x_{k-1})\right]=$$

$$=u(t,x_{k+1})-2u(t,x_k)+u(t,x_{k-1}). \quad (k=1,2,3).$$

Составим систему уравнений

$$\begin{aligned} &u_1'-u_2+2u_1-u_0=1;\\ &u_2'-u_3+2u_2-u_1=1;\\ &u_3'-u_4+2u_3-u_2=1 \end{aligned} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$u_0(t)=u(t,0)=0; \quad u_4(t)=u(t,l)=0. \tag{5}$$

Подставляя граничные условия (5) в (4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &u_1'-u_2+2u_1=1;\\ &u_2'-u_3+2u_2-u_1=1;\\ &u_3'+2u_3-u_2=1 \end{aligned} \tag{6}$$

с начальными условиями

$$u_1(0)=u_2(0)=u_3(0)=0. \tag{7}$$

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (6), будем искать методом Эйлера. Для этого представим решение в виде

$$\overline{u}_1=Ae^{\lambda t}; \quad \overline{u}_2=Be^{\lambda t}; \quad \overline{u}_3=Ce^{\lambda t}. \tag{8}$$

Подставляя значения (8) в (6) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$
\begin{aligned}
(\lambda+2)A-B&=0;\\
-A+(\lambda+2)B-C&=0;\\
-B+(\lambda+2)C&=0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Решения, отличные от нуля, имеются только в том случае, когда

$$
\Delta=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=0.
$$

Отсюда корни характеристического уравнения

$$
(\lambda+2)^3-2(\lambda+2)=0
$$

равны $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\sqrt{2}-2,\ \lambda_3=-\sqrt{2}-2.$

Подставляя корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ в уравнение (9), находим для чисел A,B,C значения

$$
\begin{aligned}
&A_1=1; \quad B_1=0; \quad C_1=-1;\\
&A_2=1; \quad B_2=\sqrt{2}; \quad C_2=1;\\
&A_3=1; \quad B_3=-\sqrt{2}; \quad C_3=1;
\end{aligned} \tag{10}
$$

(здесь во всех трех случаях положено $A=1$).

Соответственно со значениями (10) имеем три системы частных решений

$$
\begin{aligned}
&u_{11}=e^{-2t}; && u_{21}=0; && u_{31}=-e^{-2t};\\
&u_{12}=e^{(\sqrt{2}-2)t}; && u_{22}=\sqrt{2}e^{(\sqrt{2}-2)t}; && u_{32}=e^{(\sqrt{2}-2)t};\\
&u_{13}=e^{-(\sqrt{2}+2)t}; && u_{23}=-\sqrt{2}\,e^{-(\sqrt{2}+2)t}; && u_{33}=e^{-(\sqrt{2}+2)t}.
\end{aligned}
$$

Полная система искомых интегралов будет

$$
\begin{aligned}
\overline{u_1}&=c_1e^{-2t}+c_2e^{(\sqrt{2}-2)t}+c_3e^{-(\sqrt{2}+2)t};\\
\overline{u_2}&=\sqrt{2}c_2e^{(\sqrt{2}-2)t}-\sqrt{2}c_3e^{-(\sqrt{2}+2)t};\\
\overline{u_3}&=-c_1e^{-2t}+c_2e^{(\sqrt{2}-2)t}+c_3e^{-(\sqrt{2}+2)t}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде $\overset{*}{u}_i = A_i = const$. Подставляя эти решения в систему (6), получим

$$\overset{*}{u}_1 = \frac{3}{2}; \quad \overset{*}{u}_2 = 2; \quad \overset{*}{u}_3 = \frac{3}{2}. \tag{12}$$

Общее решение неоднородной системы равно сумме решений (11) и (12), т. е.

$$u_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{(\sqrt{2}-2)t} + c_3 e^{-(\sqrt{2}+2)t} + \frac{3}{2};$$

$$u_2 = \sqrt{2} c_2 e^{(\sqrt{2}-2)t} - \sqrt{2} c_3 e^{-(\sqrt{2}+2)t} + 2;$$

$$u_3 = -c_1 e^{-2t} + c_2 e^{(\sqrt{2}-2)t} + c_3 e^{-(\sqrt{2}+2)t} + \frac{3}{2}.$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3 находим, используя начальные условия (7), из решения системы

$$c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{3}{2};$$

$$\sqrt{2} c_2 - \sqrt{2} c_3 = -2;$$

$$-c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{3}{2}.$$

Откуда: $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2}+3)$, $c_3 = \frac{1}{4}(2\sqrt{2}-3)$.

Итак, окончательно вдоль прямых $x=1$, $x=2$, $x=3$ будем иметь

$$u_1(t) = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2}+3)e^{(\sqrt{2}-2)t} + \frac{1}{4}(2\sqrt{2}-3)e^{-(\sqrt{2}+2)t} + \frac{3}{2};$$

$$u_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(2\sqrt{2}+3)e^{(\sqrt{2}-2)t} - \frac{\sqrt{2}}{4}(2\sqrt{2}-3)e^{-(\sqrt{2}+2)t} + 2;$$

$$u_3(t) = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2}+3)e^{(\sqrt{2}-2)t} + \frac{1}{4}(2\sqrt{2}-3)e^{-(\sqrt{2}+2)t} + \frac{3}{2}.$$

23.3. Метод характеристик численного решения гиперболических систем квазилинейных уравнений

1°. *Квазилинейной системой* дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка называется система вида

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)=c_i \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_i — некоторые функции переменных $x, y, u_1, \ldots, u_n$.

Обозначим за $u_1(x,y),\ldots,u_n(x,y)$ решение системы (1) в некоторой области D, за $p_i=\frac{\partial u_i}{\partial x}$, $q_i=\frac{\partial u_i}{\partial y}$ значения частных производных по некоторой кривой L, принадлежащей области D. Система (1) в этом случае будет

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot p_j+b_{ij}\cdot q_j)=c_i. \tag{2}$$

Дифференциалы вдоль кривой L запишем в виде $p_i dx+q_i dy=du_i$. Отсюда, полагая $dx\neq 0$, будем иметь

$$p_i=-q_i\frac{dy}{dx}+\frac{du_i}{dx}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим систему для отыскания q_i

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}\,dx-a_{ij}\,dy)q_j=c_i dx-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,du_j \quad (i=1,\ldots,n). \tag{4}$$

Главный определитель системы (4) имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11}dx-a_{11}dy & b_{12}dx-a_{12}dy & \cdots & b_{1n}dx-a_{1n}dy \\ b_{21}dx-a_{21}dy & b_{22}dx-a_{22}dy & \cdots & b_{2n}dx-a_{2n}dy \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ b_{n1}dx-a_{n1}dy & b_{n2}dx-a_{n2}dy & \cdots & b_{nn}dx-a_{nn}dy \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Если определитель $\Delta \neq 0$, то система (4) относительно q_i имеет единственное решение. Если $\Delta = 0$ и система (4) совместна, то система имеет бесконечно много решений, т. е. на кривой L по заданным $u_i(x,y)$ частные производные однозначно нельзя определить. В этом случае кривую L называют *характеристикой* системы (1).

Тангенс угла наклона касательной к характеристике L с осью x $\lambda = \dfrac{dy}{dx}$ удовлетворяет уравнению n-й степени относительно λ

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} & \cdots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} & \cdots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & b_{n2} - \lambda a_{n2} & \cdots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Если уравнение (6) имеет n различных действительных корней, то система (1) называется *гиперболической* системой.

Обозначая через $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ корни уравнения (6), являющиеся функциями x,y, получим n дифференциальных уравнений $dy = \lambda_i(x,y)\,dx$. Каждое уравнение определяет однопараметрическое семейство кривых. Рассматривая все уравнения, получим n семейств характеристик.

Предположим, что кривая L есть характеристика системы (1), соответствующая решению $u_i(x,y)$. На L $\Delta = 0$, но так как система (4) совместна, то все определители, получающиеся заменой в Δ k-го столбца столбцом правых частей системы (4), должны также равняться нулю

$$\Delta = 0, \quad \Delta_k = 0 \quad (k = 1,\dots,n). \qquad (7)$$

Первое из условий (7) называется *уравнением направления характеристики*, а второе — *дифференциальным соотношением на характеристике.*

2°. Рассмотрим систему из двух $n = 2$ дифференциальных уравнений. Уравнения направлений характеристик будут

$$dy - \lambda_i \, dx = 0 \quad (i = 1,2), \tag{8}$$

где λ_i — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Дифференциальные соотношения на характеристиках

$$\begin{vmatrix} c_1 dx - a_{11} du_1 - a_{12} du_2 & b_{12} - \lambda_i a_{12} \\ c_2 dx - a_{21} du_1 - a_{22} du_2 & b_{22} - \lambda_i a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

или

$$(\lambda_i A + B) du_1 + C du_2 + E dx + F dy = 0, \tag{11}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} c_1 & b_{12} \\ c_2 & b_{22} \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} a_{12} & c_1 \\ a_{22} & c_2 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

3°. *Метод Массо.* В основе метода лежит замена дифференциальных уравнений характеристик конечноразностными уравнениями.

Пусть в точках 1,2 плоскости x, y (рис. 23.5) известны значения искомых функций u и v, удовлетворяющих квазилинейной гиперболической системе двух уравнений

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Через точку 1 проведем прямую в направлении 1-го семейства характеристик, а через точку 2 в направлении 2-го семейства.

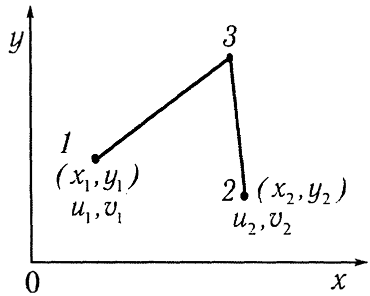


Рис. 23.5

Эти прямые пересекутся в точке 3. Координаты $x_3^{(1)}, y_3^{(1)}$ являются решениями системы (8) в конечных разностях

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} - y_1 &= \lambda_{11}^{(1)}(x_3^{(1)} - x_1), \\ y_3^{(1)} - y_2 &= \lambda_{22}^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\lambda_{11}^{(1)}$ — угловой коэффициент касательной к характеристике первого семейства в точке 1; $\lambda_{22}^{(1)}$ — в точке 2, являющиеся соответствующими корнями уравнения (9) в точках 1,2.

Для определения $u_3^{(1)}, v_3^{(1)}$ заменяем в (11) дифференциалы конечными разностями

$$\begin{aligned} &(\lambda_{11}^{(1)} A_1^{(1)} + B_1^{(1)})(u_3^{(1)} - u_1) + C_1^{(1)}(v_3^{(1)} - v_1) + \\ &\quad + E_1^{(1)}(x_3^{(1)} - x_1) + F_1^{(1)}(y_3^{(1)} - y_1) = 0, \\ &(\lambda_{22}^{(1)} A_2^{(1)} + B_2^{(1)})(u_3^{(1)} - u_2) + C_2^{(1)}(v_3^{(1)} - v_2) + \\ &\quad + E_2^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2) + F_2^{(1)}(y_3^{(1)} - y_2) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $A_i^{(1)}, B_i^{(1)}, C_i^{(1)}, E_i^{(1)}, F_i^{(1)}, \quad (i=1,2)$ — значения (12) в точке i.

Поскольку криволинейные характеристики заменяли прямыми, а дифференциалы конечными разностями, то возникает необходимость в уточнении координат точки 3 и значений $u_3^{(1)}, v_3^{(1)}$.

Вычислим $\lambda_{13}^{(1)}$ и $\lambda_{23}^{(1)}$ в точке 3 и введем среднеарифметические

$$\lambda_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{(1)} + \lambda_{13}^{(1)}), \quad \lambda_{22}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{23}^{(1)}) \tag{16}$$

и аналогично

$$A_i^{(2)} = \frac{1}{2}(A_i^{(1)} + A_3^{(1)}), \quad B_i^{(2)} = \frac{1}{2}(B_i^{(1)} + B_3^{(1)}), \quad C_i^{(2)} = \frac{1}{2}(C_i^{(1)} + C_3^{(1)}),$$

$$E_i^{(2)} = \frac{1}{2}(E_i^{(1)} + E_3^{(1)}), \quad F_i^{(2)} = \frac{1}{2}(F_i^{(1)} + F_3^{(1)}), \quad (i=1,2), \tag{17}$$

где $A_3^{(1)}, B_3^{(1)}, C_3^{(1)}, E_3^{(1)}, F_3^{(1)}$ — значения A, B, C, E, F в найденном первом приближении точки $(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}, u_3^{(1)}, v_3^{(1)})$. Искомые величины для точки 3 $x_3^{(2)}, y_3^{(2)}, u_3^{(2)}, v_3^{(2)}$ находим из уравнений

$$y_3^{(2)} - y_1 = \lambda_{11}^{(2)}(x_3^{(2)} - x_1),$$

$$y_3^{(2)} - y_2 = \lambda_{22}^{(2)}(x_3^{(2)} - x_2),$$

$$(\lambda_{11}^{(2)} A_1^{(2)} + B_1^{(2)})(u_3^{(2)} - u_1) + C_1^{(2)}(v_3^{(2)} - v_1) +$$

$$+ E_1^{(2)}(x_3^{(2)} - x_1) + F_1^{(2)}(y_3^{(2)} - y_1) = 0,$$

$$(\lambda_{22}^{(2)} A_2^{(2)} + B_2^{(2)})(u_3^{(2)} - u_2) + C_2^{(2)}(v_3^{(2)} - v_2) +$$

$$+ E_2^{(2)}(x_3^{(2)} - x_2) + F_2^{(2)}(y_3^{(2)} - y_2) = 0.$$

Для дальнейшего уточнения процесс продолжается аналогично.

4°. *Задача Коши* заключается в отыскании решения системы (13), если функции u, v заданы на некоторой дуге гладкой кривой L, не имеющей характеристических направлений ни в одной точке. По точкам 1,2 вышерассмотренным методом находим точки 7,8 и т. д. (рис. 23.6).

Задача Гурса заключается в отыскании решения u, v системы (13), если на двух характеристиках ab и ac, выходящих из одной точки a, заданы значения u и v, причем значения функций в общей точке совпадают (рис. 23.7).

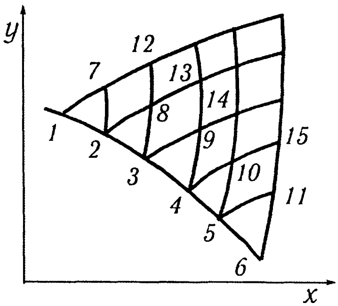


Рис. 23.6

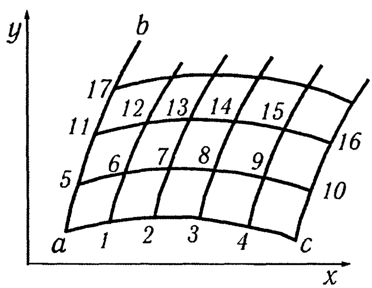


Рис. 23.7

3.1. Найти решение системы уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\cos 2x=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y)=\cos\frac{y}{2},\quad v(0,y)=\sin\frac{y}{2}\quad (\frac{1}{2}\le y\le 1).$$

Решение. Система состоит из двух квазилинейных гиперболических уравнений вида (13). Пользуясь выражением (9), находим корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}v-\lambda u & -\frac{1}{2}v\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=0.$$

Поскольку корни этого уравнения $\lambda_1=\dfrac{v}{u}$, $\lambda_2=0$, то уравнения направлений характеристик (8) и дифференциальные соотношения на характеристиках примут вид

1-е семейство

$$dy = \frac{v}{u} dx,$$

$$v du + \cos 2x\, dy = 0$$

2-е семейство

$$dy = 0$$

$$u du + v du + \cos 2x\, dx = 0.$$

При численном решении уравнений разделим отрезок с начальными данными точками деления на пять частей и найдем значения u_i и v_i в этих точках

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0	0	0	0	0
y_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
u_i	0,9689	0,9553	0,9394	0,9211	0,9004	0,8776
v_i	0,2474	0,2955	0,3429	0,3894	0,4350	0,4794

При нахождении координат точки j, лежащей на пересечении характеристик двух разных семейств, выходящих из точек $i,\ i+1$, составим систему уравнений

$$y_j^{(n)} - y_i = \lambda_{1,ij}^{(n)}(x_j^{(n)} - x_i), \quad y_j^{(n)} - y_{i+1} = \lambda_{2,i+1,j}^{(n)}(x_j^{(n)} - x_{i+1}),$$

где $\lambda_{1,ij}^{(1)} = \dfrac{v_i}{u_i}, \quad \lambda_{2,i+1,j}^{(1)} = 0, \quad x_{i,j}^{(1)} = x_i,$

$$\lambda_{1,ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(\lambda_{1i}^{(1)} + \lambda_{1j}^{(n-1)}), \quad \lambda_{2,i+1,j}^{(n)} = 0, \quad x_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{2}(x_i + x_j^{(n-1)}),$$

$$\lambda_{1j}^{(n-1)} = \frac{v_j^{(n-1)}}{u_j^{(n-1)}}, \quad \lambda_{2j}^{(n-1)} = 0. \quad (n = 2,3\ldots).$$

Отсюда координаты следующей точки при n-м приближении находятся из выражений

$$y_j^{(n)} = y_{i+1}, \quad x_j^{(n)} = \frac{1}{\lambda_{1,ij}^{(n)}}(y_j^{(n)} - y_i) + x_i.$$

Значения функций в точке j находятся из решения системы уравнений

$$v_{ij}^{(n)}(u_j^{(n)}-u_i)+\cos 2x_{ij}^{(n)}(y_j^{(n)}-y_i)=0,$$

$$u_{i+1,j}^{(n)}(u_j^{(n)}-u_{i+1})+v_{i+1,j}^{(n)}(v_j^{(n)}-v_{i+1})+\cos 2x_{i+1,j}^{(n)}(x_j^{(n)}-x_{i+1})=0,$$

где $u_{ij}^{(1)}=u_i,\quad v_{ij}^{(1)}=v_i,\quad u_{ij}^{(n)}=\frac{1}{2}(u_i+u_j^{(n-1)}),\ v_{ij}^{(n)}=\frac{1}{2}(v_i+v_j^{(n-1)}).$

Расчетные формулы примут вид

$$u_j^{(n)}=u_i-\frac{\cos 2x_{ij}^{(n)}(y_j^{(n)}-y_i)}{v_i^{(n)}},$$

$$v_j^{(n)}=v_{i+1}-\frac{v_{i+1,j}^{(n)}(u_j^{(n)}-u_{i+1})+\cos 2x_{i+1,j}^{(n)}(x_j^{(n)}-x_{i+1})}{v_{i+1,j}^{(n)}}.$$

Точность расчета определяется n-й итерацией. Если значения $x_j^{(n)},y_j^{(n)},u_j^{(n)},v_j^{(n)}$ с заданной точностью равны $x_j^{(n+1)},y_j^{(n+1)},u_j^{(n+1)},v_j^{(n+1)}$, то переходим к расчету $j+1$ точки.

В таблице приведены результаты расчета x_i,y_i,u_i,v_i для следующего ряда

i	7	8	9	10	11
x_i	0,3916	0,3233	0,2739	0,2365	0,2069
y_i	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
u_i	0,6823	0,6852	0,6906	0,6925	0,6900
v_i	0,2385	0,2878	0,3475	0,3815	0,4279

На рис. 23.8 показано расположение точек (x_i,y_i), в которых найдены значения функций (u_i,v_i). Дальнейший процесс вычисления значений функций аналогичен.

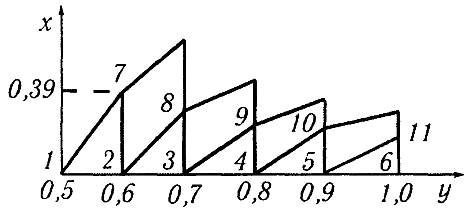


Рис. 23.8

23.4. Метод конечных элементов

1°. Решение многих краевых задач дифференциальных уравнений математической физики эквивалентно решению вариационной задачи, т. е. задачи минимизации функционала. Под функционалом $J(f(x,y))$ обычно понимают некоторый интеграл, в подынтегральное выражение которого входит функция $f(x,y)$.

Задача решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+q_v=0, \tag{1}$$

при граничных условиях на контуре L

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha T\right)_L=q_S, \tag{2}$$

где α — коэффициент теплоотдачи; q_v, q_S — объемная и поверхностная плотности мощности источников теплоты, сводится к задаче минимизации функционала в области D

$$J(T(x,y))=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2-2q_vT\right]dx\,dy+$$

$$+\int\limits_L(\alpha T^2-2q_ST)\,dl. \tag{3}$$

К минимизации функционала сводится и задача о кручении упругого стержня некругового сечения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2G\varphi=0, \tag{4}$$

где F — функция напряжений, G — упругая характеристика материала, φ — угол закручивания сечения стержня, $F_s = 0$ на всей границе.

Приближенное решение вариационной задачи (3) ищем в виде

$$T(x,y)\approx\sum_{m=1}^{M}a_m f_m(x,y), \tag{5}$$

где a_m — неизвестные постоянные коэффициенты, $f_m(x,y)$ — известные функции координат.

Подставляя (5) в выражение (3) и приравнивая производные к нулю, находим систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}=0,\ldots,\frac{\partial J}{\partial a_m}=0, \tag{6}$$

для определения значений a_m, обеспечивающих минимум функционала.

Функцию координат $f_m(x,y)$ определяют следующим образом. Разбивают область D на N элементов и находят в каждой узловой точке с координатами $x = x_m$; $y = y_m$ значение функции $f_m(x,y)$ таким образом, что в узловой точке значение функции равно единице, а в остальных точках равно нулю.

При таком выборе координатных функций приближенное решение (5) примет вид

$$T(x_m,y_m)\approx\sum_{m=1}^{M}a_m f_m(x_m,y_m)=a_m f_m=a_m=u_m, \tag{7}$$

где u_m — приближенное значение искомой функции в m-й узловой точке.

Условия минимума функционала сведутся к системе

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = 0, \ldots, \frac{\partial J}{\partial u_m} = 0, \tag{8}$$

которая представляет алгебраические уравнения относительно искомых функций в узлах.

Вариационная постановка задачи о кручении стержня сводится к функционалу

$$J = \int_V \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2G\varphi F \right] dV, \tag{9}$$

который может быть записан в виде

$$J = \int_V \left[\frac{1}{2}(g)^T (D)(g) - (2G\varphi)F \right] dV, \tag{10}$$

где

$$(D) = 1, \quad (g) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Минимизация J по (u) приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} \int_V \left(B^{(n)}\right)^T (D)(B^{(n)}) dV(u) = \sum_{n=1}^{N} \int_V (f^{(n)})^T (2Ga) dV, \tag{11}$$

где $(f^{(n)}) = (f) = (f_i^{(n)}, f_j^{(n)}, f_k^{(n)} \ldots, f_l^{(n)})$, l — число узлов элемента, верхний индекс (n) означает произвольный элемент, матрица $(g^{(n)}) = (B^{(n)})(u)$ имеет вид

$$(g^{(n)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^{(n)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F^{(n)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1^{(n)}}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2^{(n)}}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial f_m^{(n)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1^{(n)}}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2^{(n)}}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial f_m^{(n)}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

или

$$(g^{(n)}) = (B^{(n)})(u)\,. \tag{13}$$

2°. При численном решении задач методом конечных элементов используют элементы различной формы: треугольные, четырехугольные, с криволинейными границами и т. д. Ограничимся рассмотрением треугольных элементов с узлами в вершинах (рис. 23.9).

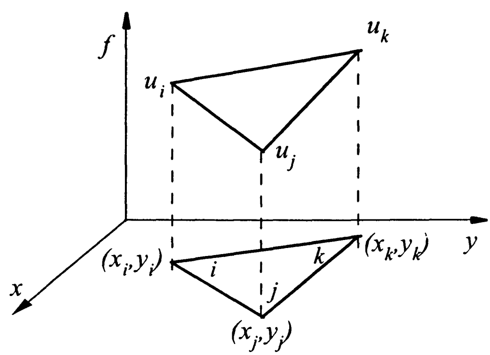


Рис. 23.9

Для двумерного треугольного элемента целесообразно использовать только линейные функции формы

$$f(x, y) = a + bx + cy. \tag{14}$$

Узловые значения f обозначим соответственно $f = u_i$ при $x = x_i$; $y = y_i$; $f = u_j$ при $x = x_j$; $y = y_j$; $f = u_k$ при $x = x_k$, $y = y_k$. Отсюда получим систему

$$\begin{aligned} u_i &= a + bx_i + cy_i, \\ u_j &= a + bx_j + cy_j, \\ u_k &= a + bx_k + cy_k, \end{aligned} \tag{15}$$

решая которую, будем иметь

$$a=\frac{1}{2S}\left[(x_i y_k - x_k y_i)u_i + (x_k y_i - x_i y_k)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_k\right],$$

$$b=\frac{1}{2S}\left[(y_i - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k\right], \qquad (16)$$

$$c=\frac{1}{2S}\left[(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k\right],$$

где $2S=(x_j y_k - x_k y_j + y_j x_i - y_k x_i + x_k y_i - x_j y_i)$ — удвоенная площадь треугольника.

Подставив выражения (16) в формулу (14), получим

$$f(x,y)=f_i(x,y)u_i + f_j(x,y)u_j + f_k(x,y)u_k, \qquad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(x,y)&=(a_i+b_i x+c_i y)/2S,\\ f_j(x,y)&=(a_j+b_j x+c_j y)/2S,\\ f_k(x,y)&=(a_k+b_k x+c_k y)/2S, \end{aligned} \qquad (18)$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j,\\ b_i = y_j - y_k,\\ c_i = x_k - x_j, \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - y_k x_i,\\ b_j = y_k - y_i,\\ c_j = x_i - x_k, \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i,\\ b_k = y_i - y_j,\\ c_k = x_j - x_i. \end{cases} \qquad (19)$$

4.1. Кручение стержня квадратного сечения.

Решение. В связи с симметрией сечения (рис. 23.10) рассмотрим 1/8 квадрата и разобьем эту часть на два элемента. Решение задачи не обладает достаточной точностью и служит только иллюстрацией методики решения.

Представим интерполяционные решения для элементов в виде

$$F^{(1)}=f_1^{(1)}u_1+f_2^{(1)}u_2+f_3^{(1)}u_3+0\cdot u_4,$$

$$F^{(2)}=0\cdot u_1+f_2^{(2)}u_2+f_3^{(2)}u_3+f_4^{(2)}u_4.$$

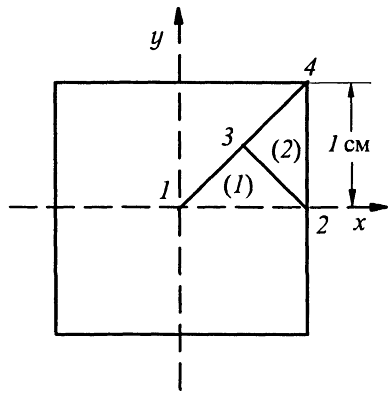


Рис. 23.10

Матрица жесткости элемента при $(D)=1$ будет

$$(r^{(n)})=\int_V (B^{(n)})^T (B^{(n)})\,dV,$$

где для определения $(B^{(1)})$ следует продифференцировать $(F^{(1)})$ по x и y.

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3^{(1)}}{\partial x} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2S^{(1)}}(b_1^{(1)} \quad b_2^{(1)} \quad b_3^{(1)} \quad 0),$$

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1^{(1)}}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3^{(1)}}{\partial y} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2S^{(1)}}(c_1^{(1)} \quad c_2^{(1)} \quad c_3^{(1)} \quad 0).$$

Таким образом матрица $(B^{(1)})$ примет вид

$$(B^{(1)})=\frac{1}{2S^{(1)}}\begin{pmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Площадь первого элемента равна

$$S^{(1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2S^{(1)}}=2.$$

Находим коэффициенты b и c

$$b_1^{(1)} = y_2 - y_3 = -0{,}5, \qquad c_1^{(1)} = x_3 - x_2 = -0{,}5,$$
$$b_2^{(1)} = y_3 - y_1 = -0{,}5, \qquad c_2^{(1)} = x_1 - x_3 = -0{,}5,$$
$$b_3^{(1)} = y_1 - y_2 = 0, \qquad c_3^{(1)} = x_2 - x_1 = 1.$$

Подставляя эти значения в матрицу $(B^{(1)})$, получим

$$(B^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим произведение

$$(B^{(1)})^T (B^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица жесткости элемента представляет собой интеграл, где произведение матриц $(B^{(1)})^T (B^{(1)})$, как постоянная величина, выносится за знак интеграла

$$(r^{(1)}) = (B^{(1)})^T (B^{(1)}) \int_V dV = (B^{(1)})^T (B^{(1)}) S^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая толщину элемента единичной, объемный интеграл в правой части выражения (11) примет вид

$$\int_V \left(f^{(1)}\right)^T 2G\varphi dV = \int_V 2G\varphi \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} dV = \frac{2G\varphi S^{(1)}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выбирая в качестве единиц размерности для G $Н/см^2$, для $S^{(1)}$ $см^2$ и для φ *рад/см*, где $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{100}$ при закручивании стержня на 1° на длине 100 см, будем иметь

$$\int_V (f^{(1)})^T 2G\varphi dV = \frac{G\varphi}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений (11) для первого элемента будет

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{G\varphi}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим площадь второго элемента и коэффициенты b и c

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad b_3 = -1, \quad b_2 = 0{,}5, \quad b_4 = 0{,}5; \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -0{,}5, \quad c_4 = 0{,}5.$$

Находим теперь матрицу жесткости

$$(B^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(B^{(2)})^T(B^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(r^{(2)}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -0{,}5 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда система уравнений (11) для второго элемента примет вид

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -0{,}5 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}=\frac{G\varphi}{6}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Окончательная система уравнений находится алгебраическим суммированием уравнений отдельных элементов

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 4 & -1\\ 0 & -0{,}5 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}=\frac{G\varphi}{6}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Для определения искомых величин в узловых точках получим

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}=\frac{G\varphi}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 4 & -1\\ 0 & -0{,}5 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Глава 24
ЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

24.1. Решение системы линейных неравенств

1°. Пусть дана система линейных неравенств с двумя переменными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + b_n \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем рассматривать переменные x_1 и x_2 как координаты точки плоскости. Совокупность точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе (1), называется *областью решений системы неравенств.*

Решением одного неравенства, например, первого, является полуплоскость. Для того, чтобы узнать, какая из двух полуплоскостей является решением, неравенство следует привести к виду $x_2 \geq kx_1 + b$ или $x_2 \leq kx_1 + b$. Если выполняется первое неравенство, то искомая полуплоскость лежит выше прямой $a_{11}x+a_{12}x_2+b_1=0$, если второе, то ниже этой прямой. Если $a_{12}=0$, то неравенство приводится к виду $x_1 \geq b$ или $x_1 \leq b$ и полуплоскость лежит справа или слева от прямой $x_1 = b$. Полуплоскость, которая является решением данного неравенства, можно определить и другим способом. А именно, достаточно подставить в неравенство координаты одной какой-либо точки, не лежащей на граничной прямой. Если неравенство удовлетворяется, то полуплоскость, в которой лежит данная точка, является искомой, а если не удовлетворяется, то искомая полуплоскость противоположная.

Область решений системы неравенств (1) представляет пересечение конечного числа полуплоскостей, образующих выпуклую многоугольную область S. Область решений может быть ограниченной, неограниченной и даже пустой. В последнем случае система неравенств (1) противоречива. Если неравенства, входящие в систему (1), не имеют с областью S общих точек, то их можно исключить как лишние. Если неравенство представлено прямой, имеющей одну общую точку с областью S, причем, вся область лежит по одну сторону от этой прямой, то такая точка, а соответственно, и прямая, называется *опорной*, а решение в этой точке – *опорным решением.*

2°. Область решения V системы линейных неравенств с тремя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \geq 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + b_n \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

геометрически представляет пересечение полупространств, на которые разбивается все пространство соответствующими плоскостями.

1.1. Найти полуплоскость, определяемую неравенством а) $3x_1 + 4x_2 - 12 \geq 0$; $3x_1 - 5x_2 \geq 0$.

Решение. а) Заменяя знак неравенства на знак равенства, запишем уравнение прямой $3x_1+4x_2-12=0$ и представим ее на рис. 24.1.

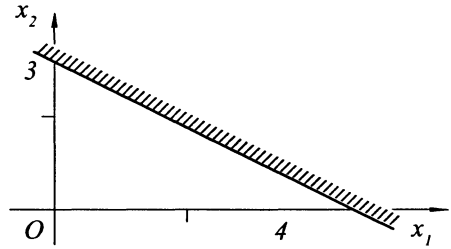


Рис. 24.1

Исходное неравенство приведем к виду $x_2 \geq -\frac{3}{4}x_1 + 3$, откуда следует, что искомая полуплоскость расположена выше прямой $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$.

б) Уравнение прямой (рис. 24.2) примет вид $3x_1 - 5x_2 = 0$.

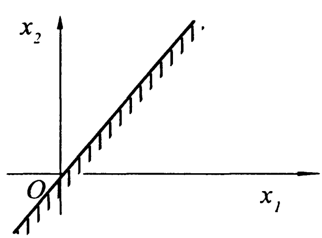


Рис. 24.2

Из решения неравенства относительно переменной x_2 находим $x_2 \leq \frac{3}{5}x_1$. Следовательно, искомая полуплоскость расположена ниже прямой $3x_1 - 5x_2 = 0$.

1.2. Найти область решений системы неравенств:

а) $x_1 - x_2 + 1 \geq 0$; $x_1 - 6x_2 - 2 \leq 0$; $4x_1 + 5x_2 - 20 \leq 0$;

б) $x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0$; $2x_1 - x_2 - 2 \geq 0$; $4x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0$;

в) $x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0$; $x_1 + x_2 - 4 \geq 0$; $5x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0$; $x_2 \geq 0$;

г) $x_2 \geq 0$; $x_1 - x_2 + 2 \geq 0$; $5x_1 + x_2 - 5 \leq 0$; $x_1 - x_2 - 4 \geq 0$;

д) $4x_1 + 5x_2 - 20 \leq 0$; $16x_1 - 5x_2 \geq 0$; $x_1 - 4x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 1$; $4x_1 + 5x_2 + 2 \geq 0$.

Решение. а) Заменяя знаки неравенств на знаки равенств, запишем уравнения прямых: $x_1 - x_2 + 1 = 0$; $x_1 - 6x_2 - 2 = 0$; $4x_1 + 5x_2 - 20 = 0$.

Построим эти прямые (рис. 24.3).

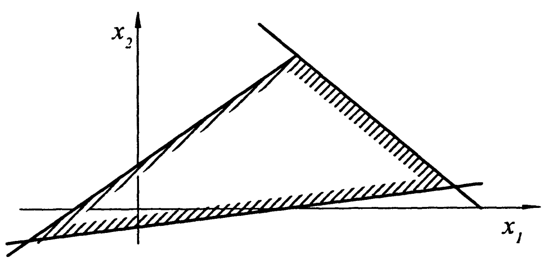


Рис. 24.3

Исходные равенства приведем к виду: $x_2 \leq 1 + x_1$; $x_2 \geq 6x_1 - 2$; $x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$. Обозначим штриховкой полуплоскости, которые являются областями решений соответствующих неравенств. Областью решения системы неравенств будет треугольник, ограниченный соответствующими прямыми.

б) Заменяя знаки неравенств на знаки равенств, запишем уравнения прямых:

$$x_1 - 2x_2 + 4 = 0;\ 2x_1 - x_2 - 2 = 0;\ 4x_1 + 3x_2 - 12 = 0.$$

Построим эти прямые (рис. 24.4).

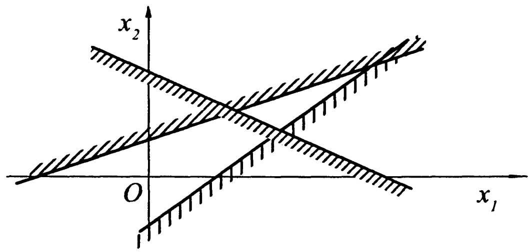


Рис. 24.4

Исходные неравенства приведем к виду: $x_2 \geq \frac{1}{2}x_1 + 4$; $x_2 \leq 2x_1 - 2$; $x_2 \leq \frac{4}{3}x_1 + 4$. Обозначим штриховкой полуплоскости, которые являются областями решений соответствующих неравенств. Из рассмотрения рис. 24.4 видно, что общих точек для всех трех полуплоскостей нет. Следовательно, область решений пустая и исходная система неравенств несовместна.

в) Заменяя знаки неравенств на знаки равенств, строим прямые: $x_1 - 3x_2 + 6 = 0$; $x_1 + x_2 - 4 = 0$; $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0$; $x_2 = 0$ (рис. 24.5).

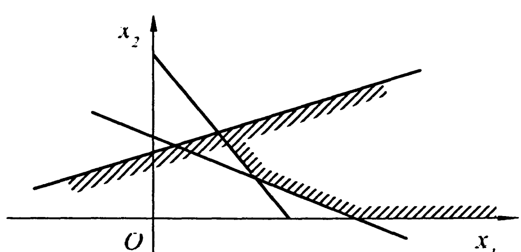


Рис. 24.5

Неравенства запишем в виде: $x_2 \leq \frac{x_1}{3} + 2$; $x_2 \geq -x_1 + 4$; $x_2 \geq -\frac{5}{2}x_1 + 5$; $x_2 \geq 0$. Обозначая штриховку, из рис. 24.5 видно, что областью решения системы неравенств является неограниченная фигура.

г) Приведем исходные равенства к виду: $x_2 \geq 0$; $x_2 \leq x_1 + 2$; $x_2 \leq -5x_1 + 5$; $x_2 \leq x_1 - 4$ и построим область решений каждого неравенства (рис. 24.6).

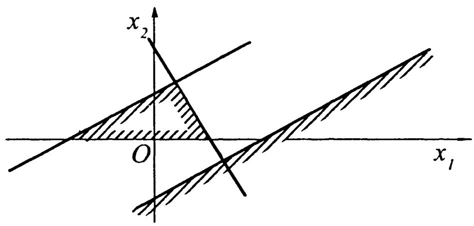


Рис. 24.6

Из рассмотрения рисунка видно, что не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы всем неравенствам. Следовательно, данная система неравенств не имеет решений.

д) Приведем исходные равенства к виду:

$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4;\quad x_2 \leq \frac{16}{5}x_1;\quad x_2 \geq \frac{1}{4}x_1;\quad x_1 \geq 1;\quad x_2 \geq -\frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}$$

и построим область решения каждого неравенства (рис. 24.7).

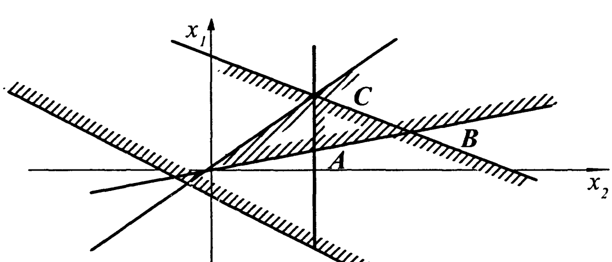


Рис. 24.7

Из рассмотренного рисунка видно, что исходным неравенствам соответствует множество точек плоскости, образующих треугольник ABC. Неравенства $4x_1 + 5x_2 + 2 \geq 0$ и $16x_1 - 5x_2 \geq 0$ могут быть исключены, так как первое определяет граничную прямую, не имеющую с треугольником ABC общих точек, а второе имеет одну общую точку с треугольником, т. е. является опорным.

1.3. Найти область решений системы неравенств:
а) $x_1 \geq 0$; $x_2 \leq 1$; $x_3 \geq 0$; $x_1 + x_2 + x_3 - 3 \leq 0$; б) $x_1 + x_2 + x_3 - 6 \leq 0$; $3x_1 + 2x_2 - 12 \leq 0$; $3x_1 + x_2 - 6 \geq 0$; $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Решение. а) Заменяя знаки неравенств на знаки равенств, строим систему плоскостей (рис. 24.8).

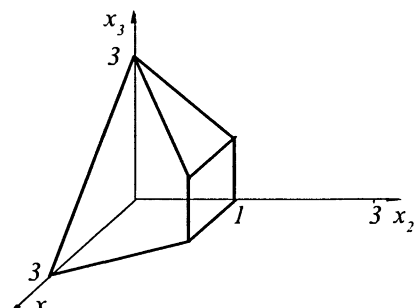


Рис. 24.8

Учитывая знаки неравенств, пересечение полупространств, а следовательно, область решений исходной системы представляет множество точек, заключенных в усеченном тетраэдре (рис. 24.8).

б) Заменяя знаки неравенств на знаки равенств, строим систему плоскостей (рис. 24.9).

Учитывая знаки неравенств, пересечение полупространств представляет цилиндрическое тело с треугольным основанием, ограниченное сверху плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Область решений исходной системы неравенств представляет множество точек, заключенных внутри показанного на рис. 24.9 тела.

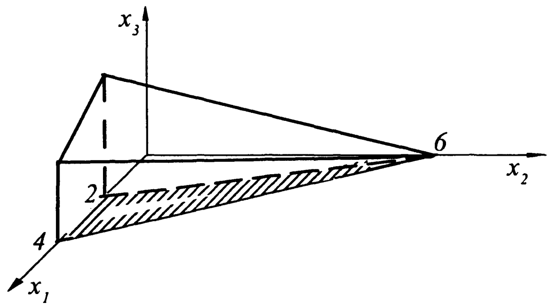


Рис. 24.9

24.2. Основная задача линейного программирования и геометрическая реализация ее в случае двух и трех переменных

1°. Основная задача линейного программирования заключается в отыскании наибольшего или наименьшего значений линейной функции L при наличии линейных ограничений (линейных равенств или неравенств).

Постановка задачи. Пусть имеется ряд переменных x_1, x_2, … , x_n. Требуется найти такие неотрицательные значения этих переменных, которые удовлетворяли бы совместной системе m линейных неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{1}$$

а линейная (целевая функция)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

принимала бы наибольшее (наименьшее) значение.

Совокупность значений переменных, при которых достигается наибольшее или наименьшее значение функции L, определяет *оптимальный план* (2). Любая же другая совокупность переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$, удовлетворяющая системе (1), называется *допустимым решением*.

2°. Рассмотрим решение основной задачи линейного программирования геометрическим методом. Пусть дано

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \\ L = c_1x_1 + c_2x_2. \end{gathered}$$

Требуется среди множества точек из области решений совместной системы неравенств найти такие, координаты которых придают целевой функции наибольшее (наименьшее) значение.

Функция L принимает во всех точках прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = a$, перпендикулярной вектору $\vec{c}(c_1, c_2)$, выходящему из начала координат, одно и то же значение a, где a — некоторый параметр. Присваивая a ряд значений, получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня функции L*. Если прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ перемещать параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\vec{c}$, то линейная функция L будет возрастать, если перемещать в противоположном направлении, то L будет убывать. Пересечение области решений с линией уровня присваивает линейной функции L некоторое фиксированное значение. При движении линии уровня в положительном направлении вектора $\vec{c}$ в точке C выхода из области решений (рис. 24.10) функция L принимает наибольшее значение среди множества значений L, принимаемых на многоугольнике решений.

При движении в обратном направлении в точке A функция L принимает наименьшее значение. Если линия уровня совпадает со стороной многоугольника, то имеется множество точек, в которых функция L принимает наибольшее (наименьшее) значение.

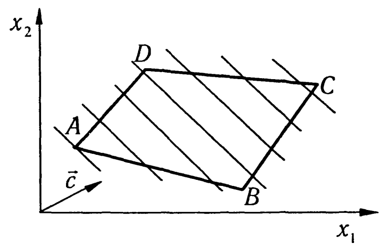


Рис. 24.10

3°. В случае трех переменных линейная функция $L = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ принимает постоянное значение на плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Наибольшее и наименьшее значения целевая функция L принимает в точках выхода и входа плоскости $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 = a$ при движении в положительном направлении вектора $\vec{c}$ в многогранник решений, определяемый системой неравенств

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \le b_m;$$

Если плоскость уровня совпадает с гранью или ребром многогранника, то имеется множество точек, в которых целевая функция L принимает наибольшее (наименьшее) значение.

4°. Рассмотрим случай, когда число неизвестных n на два больше числа уравнений m, т. е. $n - m = 2$. Пусть это будут x_1 и

x_2. Поскольку x_1, x_2 можно придавать произвольные значения, то они называются *свободными переменными.* Остальные m переменных, которые могут быть выражены через свободные, называются *базисными:*

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3;$$
$$x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n.$$

По осям Ox_1, Ox_2 будем откладывать переменные x_1, x_2, которые больше нуля. Остальные переменные должны быть неотрицательными: $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, ... , $x_n \geq 0$.

Представим хотя бы первое условие геометрически $x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0$. Приравниваем его нулю $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$. Это уравнение прямой $x_3 = 0$. Аналогичным образом строятся остальные прямые $x_4 = 0$, ... , $x_n = 0$. Часть плоскости Ox_1x_2, принадлежащая одновременно всем полуплоскостям, образует область допустимых решений.

Выразим теперь функцию $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ через свободные переменные, тогда $L = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$, где γ_0 — свободный член. Введем функцию $L' = L - \gamma_0$. Очевидно, что L' и L имеют один и тот же экстремум, отличающийся на постоянное число γ_0. Пусть $\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = a$ – уравнение прямой. Возьмем вектор $\vec{c}(\gamma_1, \gamma_2)$, перпендикулярный прямой a, и будем перемещать прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{c}$. При входе в область допустимых решений a, а следовательно и L, принимает min значение, при выходе max.

5°. Если $n - m = 3$, то число свободных переменных равно 3, остальные m переменных — базисные. Задача решается аналогичным образом, только в пространстве.

6°. Отметим некоторые общие свойства решений ОЗЛП.

1. Решение ОЗЛП, если оно существует, не может лежать внутри области допустимых решений, а только на ее границе.

2. Решение может быть и не единственным. Так, если прямая уровня совпадает со стороной, то решений бесчисленное множество.

3. ОЗЛП может не иметь решений, даже когда существует ОДР. Это бывает, когда ОДР неограничена.

4. Для того, чтобы найти оптимальное решение, достаточно перебрать все вершины ОДР и выбрать из них ту, где функция L достигает максимума.

5. Решением всегда является одна из вершин многоугольника. Решение, лежащее в одной из вершин, называется *опорным*, а сама вершина — *опорной точкой*.

2.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $L = x_1+2x_2$ при ограничениях $x_1 - 3x_2 \le 0$; $6x_1 + x_2 - 12 \ge 0$; $x_1 + 5x_2 - 25 \le 0$.

Решение. Обозначим штриховкой полуплоскости, которые являются областями решений соответствующих неравенств. Областью решения системы неравенств будет треугольник ABC (рис. 24.11).

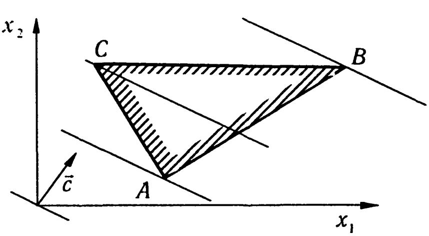


Рис. 24.11

Построим вектор $\vec{c} = (1;2)$ и проведем линию уровня $x_1+2x_2 = 0$ через точку $O\,(0,0)$. Будем теперь перемещать линию уровня параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\vec{c}$.

Опорная прямая проходит через точку $A(\frac{36}{19};\frac{12}{19})$ — это первая точка пересечения треугольника решений с линией уровня. В точке A целевая функция L будет иметь наименьшее значение $L_{min}=\frac{36}{19}+2\frac{12}{19}=\frac{60}{19}$.

Опорная прямая при выходе из треугольника решений будет проходить через точку $B(\frac{75}{8};\frac{25}{8})$, следовательно в точке B целевая функция L принимает наибольшее значение $L_{max}=\frac{75}{8}+\frac{50}{8}=\frac{125}{8}$.

2.2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $L= = 3x_1+2x_2$ при ограничениях $x_1 + 1 \geq 0$; $x_1 - x_2 - 1 \leq 0$; $3x_1 - 4x_2 + 12 \geq 0$; $x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0$.

Решение. Обозначив штриховкой полуплоскости, которые являются областями решений соответствующих неравенств, находим, что областью решения системы неравенств является четырехугольник $ABCD$ (рис. 24.12).

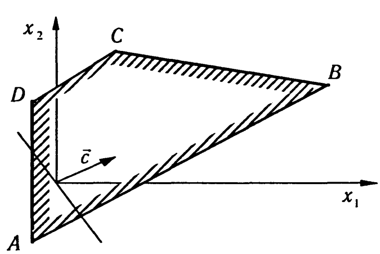


Рис. 24.12

Строим вектор $\vec{c}=(3;2)$ и проводим линию уровня $3x_1+2x_2=0$ через начало координат. Поскольку нас интересуют только положительные решения, то область допустимых решений ограничена неравенствами $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и наименьшее значение целевой функции будет в точке O (0,0) $L_{min} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Перемещая линию уровня параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\vec{c}$, нетрудно заметить, что точкой выхода из области будет точка B. Из совместного решения уравнений $x_1 - x_2 = 1$; $x_1 + 2x_2 = 8$, координаты точки B будут $(\frac{10}{3}; \frac{7}{3})$. Таким образом, наибольшее значение целевой функции равно $L_{max} = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{44}{3}$.

2.3. Найти минимальное и максимальное значение функции $L = 3x_1 - x_2$ при ограничениях $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_1 - x_2 + 2 \geq 0$; $x_1 - 2x_2 - 2 \leq 0$.

Решение. Построим допустимую область решений системы неравенств, вектор $\vec{c} = (3,-1)$ и через начало координат проведем линию уровня $3x_1 - x_2 = 0$ (рис. 24.13)

Будем теперь перемещать линию уровня параллельно самой себе в направлении, противоположном вектору $\vec{c}$. Точкой выхода линии уровня из области допустимых решений будет точка M с координатами (0, 2). Таким образом, целевая функция L примет минимальное значение в точке M, равное $L_{min} = 3 \cdot 0 - 2 = -2$.

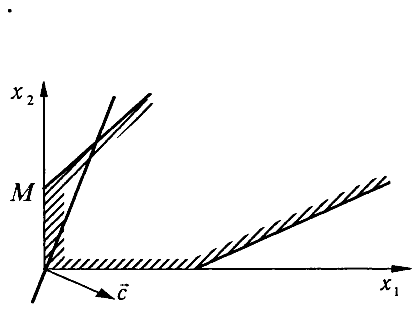


Рис. 24.13

Перемещая линию уровня в положительном направлении вектора $\vec{c}$, нетрудно заметить, что она будет иметь непустое пересечение с допустимой областью решений, как долго бы мы ее ни перемещали. Следовательно, целевая функция L на допустимой области решений сверху не ограничена и может иметь сколь угодно большое наперед заданное значение, т. е. максимума данной функции не существует.

2.4. Найти минимальное и максимальное значение функции $L = x_1 + x_2 + 2x_3$ при ограничениях $x_1 \geq 0$; $x_1 - x_2 \geq 0$; $x_2 - 1 \geq 0$; $x_2 - 3 \leq 0$; $x_1 + 2x_3 \leq 3$; $x_3 \geq 0$.

Решение. Допустимая область решения системы неравенств представляет призматическое тело (рис. 24.14).

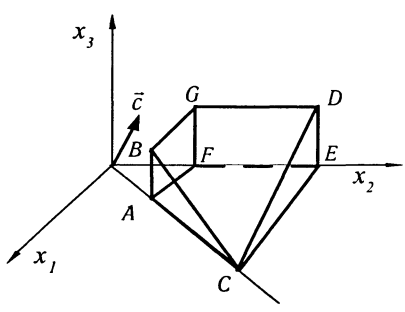


Рис. 24.14

Построим вектор $\vec{c} = (1,1,2)$ и проведем перпендикулярно ему, мысленно, через начало координат плоскость уровня $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. При перемещении плоскости уровня в направлении, обратном вектору $\vec{c}$ точка F будет точкой выхода плоскости из области решений. Следовательно, целевая функция L в точке $F(0,1,0)$ принимает наименьшее значение $L_{min} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$.

При перемещении плоскости уровня в положительном направлении вектора $\vec{c}$, нетрудно заметить, что плоскость уровня выйдет из многогранника решений $ABCDEF$ в точках ребра CD. Таким образом, на множестве точек ребра CD целевая функция L принимает наибольшее значение. Чтобы убедиться в этом, подставим координаты точек $C\,(3, 3, 0)$ и $D\left(0, 3, \frac{3}{2}\right)$ в целевую функцию. Тогда получим $L = 3 + 3 + 0 = 6$ и $L = 0 + 3 + 2\frac{3}{2} = 6$.

24.3. Симплекс - метод

1°. Пусть в задаче линейного программирования имеется n переменных и m независимых уравнений. Требуется найти min функции L. Оптимальное решение, если оно существует, достигается в одной из опорных точек, где по крайней мере $k = n - m$ переменных равны нулю. Выберем первые k переменных в качестве свободных и выразим через них остальные m — базисных:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1};\\
x_{k+2} &= \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k + \beta_{k+2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)\\
x_n &= \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,k}x_k + \beta_n.
\end{aligned}$$

Пусть все свободные переменные равны нулю $x_1 = 0$; $x_2 = 0$, ..., $x_k = 0$, тогда $x_{k+1} = \beta_{k+1}$, $x_{k+2} = \beta_{k+2}$, ..., $x_n = \beta_n$. Решение может быть допустимым или недопустимым. Решение допустимо, если все β_{k+1}, β_{k+2}, ..., β_n — неотрицательны. В этом случае имеет место опорное решение. Чтобы проверить, является ли оно оптимальным, выразим функцию L через свободные переменные

$$L = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k.$$

Очевидно, что при $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ функция $L = \gamma_0$. Если все $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ положительны, то уменьшить L мы не можем, т.к. x_1, x_2 и т. д. ≥ 0. То есть решение оптимальное.

Если есть $\gamma_i < 0$, т. е. отрицательное, то увеличивая x_i мы уменьшаем функцию L. Пусть, например, γ_1 отрицателен, тогда имеет смысл увеличивать x_1. Однако, увеличивать x_1 следует осторожно, так, чтобы не стали другие переменные x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n отрицательными в формулах (1). Это возможно, если коэффициенты при x_1 отрицательны. Если коэффициенты при x_1 положительны, то увеличивая x_1 функция L не ограничена снизу и оптимального решения не существует.

Пусть при x_1 коэффициент отрицателен и в i-ом уравнении x_1 может стать отрицательным

$$x_i = \alpha_{i,1}x_1 + \alpha_{i,2}x_2 + \ldots + \alpha_{i,k}x_k + \beta_i.$$

Здесь $\beta_i \geq 0$. Если $x_2 = 0$, ..., $x_k = 0$, то увеличивать x_1 мы можем до величины $-\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,1}}$, иначе x_1 будет отрицательна.

В этом случае опорное решение примет вид

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_k = x_i = 0; \quad x_1 \neq 0$$

Базисные переменные будут

$$x_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n$$

Выражаем через новые свободные переменные базисные и функцию L, приравниваем свободные переменные нулю и ищем значение L. Если все коэффициенты при переменных положительны, то нашли оптимум. Если нет, то процедура повторяется.

2°. Аналогично находится максимум функции L. Примем k переменных за свободные и выразим оставшиеся переменные через них (1). Функция L примет вид (2). Пусть хотя бы один коэффициент γ_i при переменной x_i положительный. Тогда увеличение x_i ведет к увеличению L и следует только следить за тем, чтобы x_{k+1}, ..., x_n не были отрицательны.

3°. Если ограничительные условия заданы неравенствами, то их следует преобразовать в равенства путем введения новых неотрицательных переменных. Например, в неравенстве $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ достаточно добавить к левой части некоторую величину $x_{n+1} \ge 0$ и мы получим равенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$.

Если исходное неравенство имеет знак $\ge b$, то от левой части следует отнять некоторую величину $x_{n+1} \ge 0$.

Ограничительные условия могут задаваться и смешанным образом, т. е. неравенствами и уравнениями, тогда указанным способом неравенства следует свести к уравнениям.

3.1. Найти максимум функции $L = -x_4 + x_5$ при ограничениях $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1$, $x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$, $x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$.

Решение. При $x_4 = x_5 = 0$, $L = 0$ — опорное решение. Поскольку коэффициент в L при x_5 положителен, то увеличиваем x_5. Из второго уравнения следует, что увеличивать x_5 можно только до 2, а из третьего следует, что только до 3. Следовательно, за разрешающее уравнение принимает второе. Разрешаем его относительно x_5 и подставляем в первое, третье и функцию L. Тогда получим

$$x_5 = -x_2 + 2x_4 + 2;$$
$$x_1 = -2x_2 + 3x_4 + 5;$$
$$x_3 = x_2 - 5x_4 + 1;$$
$$L = 2 - x_2 + x_4.$$

При $x_2 = x_4 = 0$; $L = 2$, т. е. ближе к максимуму. Поскольку в L при переменной x_4 коэффициент положительный, то увеличиваем переменную x_4.

Из последнего уравнения увеличение x_4 возможно до $\frac{1}{5}$. Подставляя x_4 в оставшиеся выражения, будем иметь

$$x_4 = \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}; \qquad x_1 = -\frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{28}{5};$$

$$x_5 = -\frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{12}{5}; \qquad L = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_2.$$

Поскольку переменные x_2 и x_3 обе отрицательны, то наибольшее значение L достигается при $x_2 = x_3 = 0$ и равно $L_{max} = \frac{11}{5}$.

24.4. Табличный алгоритм отыскания оптимального решения

1°. Пусть равенства-ограничители имеют вид

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = b_1; \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \qquad (1)$$

Введем базисные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ по числу уравнений в системе (1)

$$\begin{aligned} &y_1 = b_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n); \\ &y_2 = b_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_m = b_m - (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n). \end{aligned} \qquad (2)$$

Линейную функцию представим в виде

$$L = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n).$$

Представим выражения (2), (3) в виде таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_n
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1n}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
y_m	b_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mn}
L	γ_0	γ_1	γ_2	…	γ_n

2°. Перевод базисной переменной y_i в разряд свободной x_j переменной $x_j \leftrightarrow y_i$ сводится к преобразованию коэффициентов в таблице по схеме:

1. В таблице выделяется разрешающий элемент α_{ij} и его величина меняется на обратную $\lambda = 1/\alpha_{ij}$.

2. Элементы разрешающей строки умножаются на λ.

3. Элементы разрешающего столбца умножаются на λ и берутся со знаком минус.

4. К остальным элементам прибавляется произведение элементов на старой разрешающей строке на элементы в новом разрешающем столбце.

5. Таблица переписывается, заменяя $x_j \leftrightarrow y_i$.

Процедура перевода базисной переменной y_2 в разряд x_2 переменной $x_2 \leftrightarrow y_2$, где за разрешающий элемент принят α_{22}, показана в таблице

	b_i	x_1	y_2	…	x_n
γ_1	$b_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} b_2$	$\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$	$-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$	…	$\alpha_{1n} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{2n}}{\alpha_{22}}$
x_2	$\frac{b_2}{\alpha_{22}}$	$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$	$\frac{1}{\alpha_{22}}$	…	$\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{22}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$b_m - \frac{\alpha_{m2}}{\alpha_{22}} b_2$	$\alpha_{m1} - \frac{\alpha_{m2}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$	$-\frac{\alpha_{m2}}{\alpha_{22}}$	…	$\alpha_{mn} - \frac{\alpha_{m2}\alpha_{2n}}{\alpha_{22}}$

3°. В каждой вершине ОДР (в опорной вершине) n переменных обращаются в ноль, т. е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Тогда $y_1 = b_1; y_2 = b_2, \ldots, y_m = b_m$ и $L = \gamma_0$.

Если среди b_i нет отрицательных величин, то это опорное решение. Если есть, то решение недопустимо и надо шаг за шагом искать опорное решение или доказать, что решение не существует, т. е. система уравнений ограничений несовместна с неравенствами $x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$.

Пусть одно из уравнений с отрицательным свободным членом. Ищем в этой строке отрицательный элемент α_{ij}. Если такового нет — это значит, что система уравнений несовместна с неравенствами. Действительно, если отрицательных элементов нет, то левая часть отрицательна всегда. Пусть отрицательный элемент есть, тогда в качестве разрешающего столбца выбираем столбец с этим элементом.

Далее рассмотрим все элементы столбца, имеющие одинаковый знак со свободным членом. В качестве разрешающего примем элемент, у которого наименьшее отношение со свободным членом и воспользуемся алгоритмом преобразования коэффициентов. Если в столбце из свободных членов остались отрицательные, то процесс преобразования следует повторить.

Отыскание оптимального решения, которое обращает в минимум линейную функцию L, рассмотрим на примере.

4.1. Найти опорное решение безотносительно к виду линейной функции.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3);\\
y_2 &= -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3);\\
y_3 &= 2 - (x_1 + x_2);\\
y_4 &= 1 - (-x_2 + x_3);
\end{aligned}
$$

Решение. Составим таблицу

y_i	b_i	x_1	x_2	x_3
y_1	1 3	-1 1	-2 -1	1 1
y_2	-5 -1	-2 2	1 3	-1 -1
y_3	2 2	1 1	1 1	0 0
y_4	1 1	0 0	-1 -1	1 1

Отрицательный свободный член –5. Отрицательные члены в 1-м и 3-м столбце. Выбираем любой столбец, пусть с членом –2, т. е. 1-й . Одинаковые знаки со свободным членом во 2-й и 3-й строке. Находим отношение: –5/–1 =2,5 и 2/1=2. Следовательно, разрешающий элемент 1 и замена $x_1 \leftrightarrow y_3$. Разрешающий элемент обведем кружком $\lambda = 1$. Новые табличные коэффициенты вычисляем по алгоритму (**2°.**) и записываем в нижнем левом углу. Заполняем новую таблицу

y_i	b_i	y_1	x_2	x_3
y_1	3 2	1 3	-1 2	1 1
y_2	-1 1	2 -2	3 -3	-1 -1
x_1	2 2	1 1	1 1	0 0
y_4	1 0	0 2	-1 2	1 1

Отрицательные члены уже меньше. Повторяем вычисления. Отрицательным является последний элемент во второй строке. Одинаковые знаки со свободными членами в первой и четвертой строке. Строка с нулевым членом не учитывается. Для выбора строки составляем отношение 3/1= 3; –1/–1= 1; 1/1 = 1. Возьмем замену $x_3 \leftrightarrow y_2$, тогда $\lambda = -1$ и находим новые коэффициенты. Таблица будет

y_i	b_i	y_3	x_2	x_3
y_1	2	3	+2	1
x_3	1	-2	3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	0	+2	+2	1

Все свободные члены неотрицательны $y_1 = 2$; $x_3 = 1$; $x_1 = 2$; $y_4 = 0$; $y_3 = 0$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$. Это и будет опорное решение.

4.2. Даны ограничения:

$y_1 = 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3)$;

$y_2 = 1 - (x_1 - x_2 + x_3)$;

$y_3 = 5 - (x_2 + x_3)$;

$y_4 = 2 - (2x_1 - x_2)$.

Найти минимум функции $L = 0 - (- x_1 + 2x_2 + x_3)$.

Решение. Опорное решение существует, но оно не оптимальное, т.к. при увеличении x_2, x_3 функция L убывает. Запишем решение в виде таблицы

	b_1	x_1	x_2	x_3
L	0 -1	-1 -2	2 3	1 -1
y_1	2 4	1 3	1 -1	-2 2
y_2	1 1	1 1	-1 -1	1 1
y_3	5 4	0 -1	1 2	1 -1
y_4	2 2	2 2	-1 -1	0 0

Возьмем x_3 разрешающим столбцом. Одинаковые знаки со свободными членами в строках y_2 , y_3. Отношение в строке y_2 — $1/1=1$; y_3 — $5/1=5$, следовательно, разрешающий элемент в строке y_2 и $\lambda = 1/1=1$. Находим остальные коэффициенты и запишем другую таблицу

	b_1	x_1	x_2	y_2
L	-1 $\quad -7$	-2 $\quad -\frac{1}{2}$	3 $\quad -\frac{3}{2}$	-1 $\quad \frac{1}{2}$
y_1	4 $\quad 6$	3 $\quad \frac{5}{2}$	-1 $\quad \frac{1}{2}$	2 $\quad \frac{3}{2}$
x_3	1 $\quad 3$	1 $\quad \frac{1}{2}$	-1 $\quad \frac{1}{2}$	1 $\quad -\frac{1}{3}$
y_3	4 $\quad 2$	-1 $\quad -\frac{1}{2}$	2 $\quad \frac{1}{2}$	-1 $\quad -\frac{1}{2}$
y_4	2 $\quad 4$	2 $\quad \frac{3}{2}$	-1 $\quad \frac{1}{2}$	0 $\quad -\frac{1}{2}$

В верхней строке есть положительный коэффициент x_2. В этом столбце единственное положительное отношение с элементом строки y_3. Выбираем разрешающий элемент, находим $\lambda = \frac{1}{2}$, вычисляем остальные коэффициенты и получим таблицу

	b_1	x_1	y_3	y_2
L	-7 $\quad -9$	$-\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$ $\quad -\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{3}$
y_1	6 $\quad 4$	$\frac{5}{2}$ $\quad \frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$
x_3	3 $\quad 1$	$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{3}$
x_2	2 $\quad 4$	$-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$
y_4	4 $\quad 6$	$\frac{3}{2}$ $\quad \frac{7}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$

Так как y_2 положительно, то находим отношения $6/\frac{3}{2} = 4$, $3/\frac{1}{2} = 6$ и разрешающий элемент $\frac{3}{2}$. Находим $\lambda = \frac{2}{3}$ и запишем таблицу

	b_i	x_1	y_3	y_1
L	–9	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_2	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_4	6	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Поскольку все члены отрицательны, то функция L имеет $\min L = -9$ при $x_1 = y_3 = y_1 = 0$. Таким образом:

1) Если в строке L нет положительных элементов помимо свободного члена, а в столбце нет отрицательных членов помимо L, то оптимальное решение достигнуто.

2) Если в строке L есть положительный элемент, а в столбце нет ни одного положительного, то линейная функция не ограничена снизу и оптимального решения не существует.

24.5. Транспортная задача

1°. Пусть имеется m пунктов отправления $A_1, \ldots, A_m$, в которых сосредоточены запасы однородного груза в количестве соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц. Кроме того, имеется n пунктов назначения $B_1, \ldots, B_n$, подавших заявки соответственно на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (1)$$

Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j (задана матрицей)

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Требуется составить такой план перевозки, при котором все заявки были бы выполнены, а стоимость была бы минимальна. Поскольку критерием эффективности является стоимость, то такая задача называется *транспортной задачей по критерию стоимости.*

Обозначим за x_{ij} — количество груза, отправляемого из i-го пункта A_i в j-й пункт B_j ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$). x_{ij} — неотрицательные переменные m х n должны удовлетворять условиям:

1. Суммарное количество груза, направляемое из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно равняться запасу груза на данном пункте. Это дает нам m условий равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = a_2; \quad ...; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m. \qquad (2)$$

2. Суммарное количество груза, доставляемое в каждый пункт назначения изо всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом.

Это дает n условий–равенств

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i2} = b_2; \quad ...; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n. \qquad (3)$$

3. Суммарная стоимость всех перевозок, т. е. сумма величин x_{ij}, умноженная на соответствующие стоимости c_{ij}, должна быть минимальна

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min.$$

2°. Совокупность переменных x_{ij} называется *допустимым планом перевозок*, если удовлетворяются условия (2) и (3). План x_{ij} — называется *оптимальным*, если среди допустимых он гарантирует минимальную стоимость. Для решения транспортной задачи составим таблицу 5.1, где ПН — пункты назначения; ПО — пункты отправления; стоимости перевозок c_{ij} расположены в правом верхнем углу, с тем, чтобы в самой ячейке при составлении плана помещать перевозки x_{ij}. Ячейки таблицы, в которых будем записывать отличные от нуля перевозки x_{ij}, будем называть *базисными*, остальные — *свободными*.

Число строк m и сумма запасов в каждой строке должна быть равна запасу данного ПО. Число столбцов равно n и сумма перевозок должна равняться заявке ПН. Клетку будем определять номерами i, j.

Таблица 5.1

ПН / ПО	B_1	B_2	…	B_n	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{21}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	c_{ij} x_{ij}	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m1}	….	c_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

3°. Решение транспортной задачи разбивается на нахождение опорного плана и приближение посредством последовательных итераций к оптимальному решению.

Исходя из чисто физических соображений ясно, что опорное решение всегда существует.

4°. *Вырожденный план перевозок*. Такой план может встретиться как при построении опорного плана, так и при его улучшении. Действительно, не все $m+n$ уравнений (2), (3) являются независимыми. Так, складывая все уравнения (2), (3), получим уравнение (1), т. е. независимых уравнений будет $m+n-1$. Следовательно, ранг системы (2), (3) и число базисных переменных будет $r=m+n-1$, а число свободных переменных $k=mn-r=$ $=(m-1)(n-1)$. Рассмотрим пример 5.2, когда число базисных переменных меньше r.

5°. Улучшение плана перевозок. Возьмем транспортную таблицу из m = 5 строк и n = 6 столбцов. *Циклом* в транспортной таблице мы будет называть несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке делает поворот на 90°. В таблице 5.2 показан цикл с вершинами (1,1), (1,3),(3,3), (3,1) и цикл C_{14}, C_{16}, C_{46}, C_{44}, C_{24}, C_{25}, C_{55}, C_{54}. Стрелками показано направление обхода. Знаком «+» обозначим те вершины, в которых перевозки увеличиваются, а «–» — в которых перевозки уменьшаются.

Таблица 5.2

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	a_2
A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	a_3
A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	a_4
A_5	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	a_5
b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	

При переносе любого числа единиц по циклу равновесие между заявками и запасами не меняется. *Ценой цикла* называется увеличение стоимости перевозок при перемещении одной единицы груза по означенному циклу и цена равна алгоритмической сумме стоимостей $C_{11} - C_{13} + C_{30} - C_{31}$.

Очевидно, для улучшения плана перевозок перемещать груз следует только по тем циклам, цена которых отрицательна, т. е. стоимость в этих случаях уменьшится. Если циклов с отрицательной ценой не осталось, то дальнейшее улучшение невозможно. Знак «+» выбирается в свободной клетке.

5.1. Пусть задана транспортная таблица 5.3. Требуется **найти** опорный план.

Таблица 5.3

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

Решение. Воспользуемся правилом северо-западного угла, т. е. будем заполнять таблицу с левого верхнего угла.

Пункт B_1 подал заявку на 18 единиц груза, поэтому удовлетворим эту заявку за счет запаса 48, имеющихся в пункте A_1, и запишем перевозку 18 в клетке (1,1). Заявку B_2 в 27 единиц также удовлетворим за счет запасов пункта A_1 и запишем перевозку в 27 единиц в клетке (1,2); оставшиеся 3 единицы пункта A_1 назначим пункту B_3. В заявке пункта B_3 осталось неудовлетворенным 39 единиц; из них 30 единиц удовлетворим за счет пункта A_2, причем его запас будет исчерпан, а 9 возьмем из пункта A_3. Из оставшихся 18 единиц пункта A_3 12 выделим пункту B_4, а оставшиеся 6 единиц B_5, что вместе с 20 единицами пункта A_4 покроет заявку пункта B_5.

Полученное решение (табл.5.4) является не только допустимым, но и опорным. Поскольку при построении решения стоимость перевозок c_{ij} не учитывали, то план получился не оптимальным. Стоимость плана равна сумме произведений перевозок на соответствующую стоимость $18 \cdot 10 + 27 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 1039$.

Таблица 5.4

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	18 (10)	27 (8)	3 (5)	6	9	48
A_2	6	7	30 (8)	6	5	30
A_3	8	7	9 (10)	12 (8)	6 (7)	27
A_4	7	5	4	6	20 (8)	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

Попробуем улучшить план. Для этого перенесем из клетки (1,1) 18 единиц в клетку (2,1) и, чтобы не нарушить баланс, перенесем также 18 единиц из клетки (2,3) в клетку (1,3). Получим новый план (табл.5.5). Найдем суммарную стоимость перевозок нового плана $27 \cdot 8 + 21 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 12 \cdot 8 + 9 \cdot 10 +$ $+ 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 913$.

На этом способе уменьшения стоимости в дальнейшем будет основан алгоритм оптимизации плана перевозок.

Таблица 5.5

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8 27	5 21	6	9	48
A_2	6 18	7	8 12	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

5.2. Дана транспортная таблица 5.6. **Составить** опорный план перевозок.

Таблица 5.6

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1						10
A_2						30
A_3						25
A_4						10
Заявки b_j	5	5	20	35	10	75

Решение. Применяя способ северо-западного угла, получим табл.5.7.

Особенностью полученного плана является то, что в нем шесть, а не восемь $r = m + n - 1 = 8$ базисных перевозок. Это произошло из-за того, что при распределении запасов по пунктам назначения в некоторых случаях остатки оказывались равными нулю и в соответствующую клетку не попали.

Таблица 5.7

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	5	5				10
A_2			20	10		30
A_3				25		25
A_4					10	10
Заявки b_j	5	5	20	35	10	75

Такие случаи «вырождения» могут иметь место не только при составлении опорного плана, но и при его оптимизации.

Чтобы иметь в транспортной таблице $m + n - 1$ базисных клеток, добавим и отнимем в соответствующие клетки бесконечно малое ε, что позволит от вырожденного плана перейти к невырожденному. Для этого изменим запасы в первой и третьей строках и положим их равными $10+\varepsilon$ и $25+\varepsilon$. Чтобы «свести баланс», в четвертой строке ставим запасы $10 - 2\varepsilon$ (табл. 5.8).

Таблица 5.8

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	5	5	ε			$10+\varepsilon$
A_2			$20-\varepsilon$	$10+\varepsilon$		30
A_3				$25-\varepsilon$	2ε	$25+\varepsilon$
A_4					$10-2\varepsilon$	$10-2\varepsilon$
Заявки b_j	5	5	20	35	10	75

Строя опорный план способом северо-западного угла, нетрудно заметить, что в табл. 5.8 содержится уже базисных переменных столько, сколько нужно $m+n-1=8$. После нахождения оптимального решения ε следует положить равным нулю.

5.3. Дана транспортная таблица 5.9. **Найти** оптимальный план

Таблица 5.9

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	7	6	8	31
A_2	5	6	5	4	48
A_3	8	7	6	7	38
b_j	22	34	41	20	117

Решение. Составим опорный план способом северо-западного угла (табл.5.10). Стоимость этого плана равна $L_1 = 22{\cdot}10+9{\cdot}7+25{\cdot}6+23{\cdot}5+18{\cdot}6+20{\cdot}7=796$.

Таблица 5.10

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 22	7 9	6	8	31
A_2	5	6 25	5 23 –	4 +	48
A_3	8	7	6 18 +	7 – **20**	38
b_j	22	34	41	20	117

Попробуем улучшить план, заняв свободную клетку (2,4) с минимальной стоимостью 4. Цикл, соответствующий этой клетке, показан в табл.5.10. Цена этого цикла равна $\gamma = 4-7+6-5=-2$.

По этому циклу можно переместить только 20 единиц груза, иначе в клетке (3,4) может быть отрицательная перевозка. Новый, улучшенный план показан в табл.5.11. Стоимость этого плана $L_2 = 22 \cdot 10 + 9 \cdot 7 + 25 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 38 \cdot 6 = 756$.

Таблица 5.11

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 22 −	7 + 9	6	8	31
A_2	5 +	6 − 25	5 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
b_j	22	34	41	20	117

Для дальнейшего улучшения плана рассмотрим свободную клетку (2.1) со стоимостью 5. Поставим знак «+» в этой клетке и покажем в табл.5.11 новый цикл. Цена цикла будет $\gamma = 7 - 6 + 5 - 10 = -4$. Переместим по циклу 22 единицы груза, тогда стоимость перевозок сократится до $L_3 = 31 \cdot 6 + 22 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 38 \cdot 6 = 668$ (табл.5.12).

Таблица 5.12

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	5 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
b_j	22	34	41	20	117

Больше отрицательных циклов нет, следовательно, перестановки не могут улучшить плана.

24.6. Задачи динамического программирования

1°. *Основные определения.* Процедура оптимизации операций, развивающихся во времени, составляет суть решения задач динамического программирования (планирования). Задачи динамического программирования (управления), при которых показатели эффективности обращаются в максимум, решаются многошаговым (поэтапным) методом с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах.

Процесс оптимизации управления методом динамического программирования «проходится» дважды. Сначала многошаговый процесс динамического программирования проходится от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления на каждом шаге. Затем, зная условные оптимальные шаговые управления, находятся оптимальные шаговые управления от начала до конца, приводящие к максимально возможному выигрышу.

2°. *Общая постановка задачи.* Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние. Если мы можем управлять этим процессом, то система S называется *управляемой* системой, а способ нашего воздействия — *управлением* U. Под U понимается целая совокупность величин, функций.

Процесс управления системой связан с выигрышем W, т. е. выигрыш зависит от управления $W = W(U)$.

Очевидно, нас интересует такое управление, при котором выигрыш максимален

$$W_{max} = \max_{U}\left\{W(U)\right\}.$$

Обычно в таких системах должны быть учтены условия, накладываемые на начальное состояние системы S_0 и конечное состояние S_ω. Тот факт, что начальное состояние системы S_0 входит в область $\widetilde{S_0}$, записывается в виде $S_0 \in \widetilde{S_0}$, аналогично для конечного состояния системы $S_\omega \in \widetilde{S_\omega}$.

Таким образом, общая задача оптимального управления формулируется так:

Из множества возможных управлений U найти такое оптимальное управление, которое переводит физическую систему S из начального состояния $S_0 \in \widetilde{S_0}$ в конечное состояние $S_\omega \in \widetilde{S_\omega}$ так, чтобы при этом выигрыш был максимальным.

3°. Рассмотрим алгоритм решения задач динамического программирования.

1. Выбрать параметры, характеризующие состояние системы, фазовое пространство и способ членения процесса на шаги.

2. Записать выигрыш w_i на i–том шаге в зависимости от состояния S системы в начале этого шага и управления U_i

$$w_i(S,U_i)=w_i.$$

3. Записать для i–того шага функцию, выражающую изменение состояния системы от S к S' под влиянием управления U_i

$$S'=\varphi_i(S,U_i).$$

4. Записать основное функциональное уравнение

$$W_i(S)=\max\{\mathrm{w_i}(S,U_i)+W_{i+1}(\varphi_i(S,U_i))\},$$

при котором в соответствии с принципом оптимальности надо выбрать такое управление U_i, чтобы выигрыш достигал максимума.

5. Найти функцию $W_m(S)$ — оптимальный выигрыш на последнем шаге

$$W_m(S)=\max_{U_m}\{w_m(S,U_m)\}$$

и соответствующее условное оптимальное управление на последнем шаге $U_m(S)$.

6. Зная $W_m(S)$ и пользуясь основным функциональным уравнением, находим последовательно

$$W_{m-1}(S),\quad W_{m-2}(S),\quad \ldots,\quad W_2(S),\quad W_1(S)$$

и соответствующие им управления

$$U_{m-1}(S),\quad U_{m-2}(S),\quad \ldots,\quad U_2(S),\quad U_1(S).$$

7. Если S_0 задано, то находя по цепочке оптимальное управление, доходим до S'_m

$$S_0 \to U_1 \to S'_1 \to U_2(S'_1) \to \ldots \to U_m(S'_{m-1}) \to S'_m.$$

8. Если начальное состояние не задано, а лишь ограничено условием $S_0 \in \tilde{S}_0$, находим максимальный выигрыш

$$W_{max} = \max_{S_0 \in \tilde{S}_0} \{W_1(S)\}$$

и далее, по цепочке, безусловные оптимальные управления.

6.1. *Задача распределения ресурсов.* **Имеется** определенное начальное количество средств K_0, которое мы должны распределять в течение m лет между двумя предприятиями I и II.

Средства, вложенные в каждое предприятие, приносят за год определенный доход, зависящий от объема вложений. Если в I предприятие вложены средства X, то за год получен доход $f(X)$, при этом вложенные средства частично уменьшаются, тратятся и к концу года их остается $\varphi(X) < X$.

Аналогично, средства Y, вложенные во второе предприятие, приносят за год доход $g(Y)$ и уменьшаются $\psi(Y) < Y$.

По истечении года оставшиеся средства K_0 заново распределяются между предприятиями I и II. Доход в производство не вкладывается, а накапливается.

Требуется **найти** такой способ управления ресурсами, при котором суммарный доход от обоих предприятий за m лет будет максимальным.

Решение. Решение будем проводить по схеме:

1. Система в нашем случае характеризуется двумя параметрами X, Y — средства для предприятий. Шаг — это хозяйственный год. В процессе управления величины X, Y меняются в зависимости от:

а) перераспределения средств между отраслями в начале каждого года;

б) уменьшения средств за год.

Управлением U_i на i-том шаге будут количества средств X_i, Y_i, вкладываемые в предприятия I, II на этом шаге. Необходимо найти такое управление

$$U = (U_1, U_1, \dots, U_m),$$

при котором суммарный доход

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i$$

был бы максимальным.

2. Пусть K — количество средств, сохранившихся после $i-1$ шагов. Управление на U_i на i-том шаге состоит в выделении X_i средств I предприятию, тогда II будет иметь $Y_i = K - X_i$ и выигрыш будет

$$w_i(K, X_i) = f(X_i) + g(K - X_i).$$

3. Под влиянием этого управления система из состояния K перейдет в состояние K'

$$K' = \varphi(X_i) + \psi(K - X_i).$$

4. Основное функциональное уравнение примет вид

$$W_i(K) = \max_{X_i} \left\{ f(X_i) + g(K - X_i) + W_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i)) \right\}.$$

5. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге

$$W_m(K) = \max_{X_m} \left\{ f(X_m) + g(K - X_m) \right\}.$$

6. Зная функцию $W_m(K)$, по (4) находим выигрыши

$$W_{m-1}(K)=\max_{X_{m-1}}\{f(X_{m-1})+g(K-X_{m-1})+W_m(\varphi(X_{m-1})+\psi(K-X_{m-1}))\},$$

$$W_{m-2}(K)=\max_{X_{m-2}}\{f(X_{m-2})+g(K-X_{m-2})+W_{m-1}(\varphi(X_{m-2})+\psi(K-X_{m-2}))\},$$

....

$$W_1(K)=\max_{X_1}\{f(X_1)+g(K-X_1)+W_2(\varphi(X_1)+\psi(K-X_1))\},$$

и соответствующие им условные оптимальные управления

$$x_{m-1}(K),\quad x_{m-2}(K),\ \ldots,\quad x_1(K).$$

7. Начальное состояние K_0 задано, поэтому максимальный доход будет

$$x_1=x_1(K_0).$$

Состояние системы после первого шага

$$K_1'=\varphi(x_1)+\psi(K_0-x_1).$$

Оптимальное управление на втором шаге $x_2=x_2(K_1')$ и т. д. Состояние системы после i шагов

$$K_i'=\varphi(x_i)+\psi(K_{i-1}'-x_i).$$

Оптимальное управление $x_i=x_i(K_{i-1}')$ и т. д. по цепочке:

$$K_0\to x_i(K_0)\to K_1'\to x_2(K_1')\to\ldots\to x_m(K_{m-1}')\to K_m'.$$

Величина K_m' — представляет количество средств, оставшихся после последнего шага. Совокупность средств, вложенных по годам в I предприятие

$$x=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$$

будет представлять собой оптимальное управление

$$y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}=(K_0-x_1,K_1'-x_2,\ldots,K_{m-1}'-x_m)\ -$$

количество средств, вложенных во второе предприятие по годам.

6.2. Пусть даны два почтовых предприятия. Рассмотрим их деятельность за 5 лет. Заданы функции дохода

$$f(X)=1-e^{-X}, \quad g(Y)=1-e^{-2Y}$$

и функции траты

$$\varphi(X)=0,75X, \quad \varphi(Y)=0,3Y.$$

Требуется распределить средства в размере $K_0=2$ между предприятиями по годам, исходя из условия максимального дохода.

Решение. Выигрыш на i-том шаге будет

$$w_i(K,X_i)=1-e^{-X_i}+1-e^{-2Y_i}=$$

$$=1-e^{-X_i}+1-e^{-2(K-X_i)}=2-(e^{-X_i}+e^{-2(K-X_i)}).$$

2. Поскольку $K-X_i=Y_i$, то система под действием управления перейдет из состояния K в состояние

$$K'=0,75X_i+0,3(K-X_i).$$

3. Основное функциональное уравнение

$$W_i(K)=\max_{X_i}\left\{2-\left(e^{-X_i}+e^{-2(K-X_i)}\right)+W_{i+1}\left(0,75X_i+0,3\left(K-X_i\right)\right)\right\}.$$

4. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге

$$W_5(K)=\max_{X_5}\left\{w_5\left(K,X_5\right)\right\}=\max_{X_5}\left\{2-\left(e^{-X_5}+e^{-2(K-X_5)}\right)\right\}.$$

При фиксированном K это есть функция аргумента X_5. Продифференцируем по X_5 и приравняем нулю

$$\frac{\partial w_5}{\partial X_5}=e^{-X_5}-2e^{-2(K-X_5)}=0;$$

$$-X_5=\ln 2-2(K-X_5); \quad X_5=(2K-\ln 2)/3. \qquad (*)$$

Если $K>\ln 2/2\approx 0,347$, то max достигается внутри отрезка (0, K) в точке $X_5(K)=(2K-\ln 2)/3$, если же $K<\ln 2/2$, то max достигается в конце отрезка $X_5(K)=0$.

Отсюда следует, что, если $K>\ln 2/2$, то первому почтовому предприятию следует выделить долю (*), если $K<\ln 2/2$, то все средства следует отдать второму предприятию, т. е.

$$X_5(K)=\begin{cases}0 & K\le \ln 2/2\\ (2K-\ln 2)/3 & K>\ln 2/2\end{cases}.$$

Найдем теперь условный оптимальный выигрыш на пятом шаге

$$W_5(K)=2-\left\{e^{-X_5(K)}+e^{-2(K-X_5(K))}\right\},$$

или

$$W_5(K)=\begin{cases}1-e^{-2K} & K\le \ln 2/2\\ 2-\left[e^{-\frac{2K-\ln 2}{3}}+e^{-2(K-\frac{2K-\ln 2}{3})}\right] & K>\ln 2/2\end{cases}.$$

5. Далее переходят к 4-му шагу.

6.3. *Задача распределения ресурсов по неоднородным этапам.* В предыдущей задаче функции дохода $f(X)$ и $g(Y)$ и функции траты $\varphi(X)$, $\psi(Y)$ были одинаковы для всех шагов. Может оказаться, что они меняются от шага к шагу и для i-того шага равны

$$f_i(X),\quad g_i(Y)$$

$$\varphi_i(X),\quad \psi_i(Y)\quad (i=1,2,\ldots,m).$$

В этом случае стандартная схема почти не меняется и основное функциональное уравнение принимает вид

$$W_i(K)=\max_{X_i}\left\{f_i(X_i)+g_i(Y_i)+W_{i+1}\left(\varphi_i(X_i)+\psi_i(K-X_i)\right)\right\}.$$

Условие оптимизации m-го шага будет

$$W_m(K)=\max_{X_m}\left\{f_m(X_m)+g_m(K-X_m)\right\},$$

а в остальном процедура построения решения остается неизменной.

6.4. *Задача о резервировании ресурсов.* **Пусть имеется** одно предприятие и некоторый запас средств K_0, который можно вкладывать в производство не целиком, а частично резервировать.

Если на i-том шаге в производство вложены средства X, то они дают доход $f_i(X)$ и уменьшаются до $\varphi_i(X)$.

Требуется рационально распределить средства, имеющиеся и остающиеся на m шагов так, чтобы суммарный доход был максимальным.

Считаем, что резервные средства вложены в какое-то II фиктивное предприятие, где они не тратятся, но и не дают доход

$$g_i(Y)=0; \quad \psi_i(Y)=Y \quad (i=1,2,...,m).$$

В данном случае задача решается так же, как задача распределения ресурсов по неоднородным этапам.

Рассмотрим частный случай резервирования средств, когда $\varphi_i(X)=0$, т. е. когда средства тратятся целиком.

Поставленная задача сводится к отысканию максимума функции m аргументов $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_m$.

$$W=\sum_{i=1}^{m} f_i(X_i),$$

где X_i неотрицательны и удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \le K_0.$$

Простейшие задачи резервирования ресурсов допускают элементарное решение и без метода динамического программирования. Например, когда функция дохода на всех этапах одна и та же

$$f_1(X)=f_2(X)=...=f_m(X)=f(X),$$

а средства расходуются полностью

$$\varphi_1(X)=\varphi_2(X)=...=\varphi_m(X)=0.$$

Максимум дохода достигается тогда, когда средства распределяются между этапами равномерно:

$$x_1=x_2=...=x_m=\frac{K_0}{m}.$$

6.5. *Задача распределения ресурсов между тремя и более предприятиями.* Пусть ресурсы распределяются между несколькими предприятиями связи I, II, ..., (n), причем для каждого предприятия заданы: функция дохода $f_i^{(j)}(X)$, выражающая доход, приносимый средствами X, вложенными в i-м году в j-е предприятие и функция траты $\varphi_i^{(j)}(X) < X$, показывающая, насколько убывают средства X на i-м году в j-м предприятии.

Для трех предприятий фазовое пространство имеет вид (рис. 24.15). Для случая более чем трех предприятий состояние системы будет определяться уже n числами $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., $X^{(n)}$, обозначающими вложения в каждое из предприятий. Распределение средств производится от конца к началу (условная оптимизация), а затем от начала до конца.

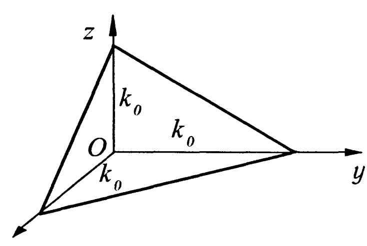


Рис. 24.15

Управление на i-м шаге будет состоять в выделении средств n предприятиям

$$X_i^{(1)},\ X_i^{(2)},\ \ldots,\ X_i^{(n)} = K - \sum_{i=1}^{n-1} X_i^{(i)},$$

причем здесь следует находить максимум функции нескольких переменных.

6.6. *Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.* 1. Доход вкладывается в производство полностью, максимизируется сумма всех средств после m-го этапа.

Рассмотрим два предприятия. Выигрыш W представляет сумму всех средств, сохранившихся в обоих предприятиях плюс доход на последнем этапе

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i \ .$$

Поскольку все средства (основные и доход) вкладываются в производство, то для I -го предприятия функция дохода на i-м шаге обозначим $F_i(X)$, а для II — соответственно $G_i(Y)$.

Выигрыш на последнем шаге выражается формулой

$$w_m(K, X_m) = F_m(X_m) + G_m(K - X_m),$$

где K — средства, с которыми мы подошли к последнему шагу.

Основное функциональное уравнение динамического программирования будет

$$W_i(K) = \max_{X_i} \left\{ W_{i+1}\left(F_i\left(X_i\right) + G_i\left(K - X_i\right)\right)\right\},$$

где K — средства, с которыми мы подошли к i-му шагу.

На последнем шаге условный оптимальный выигрыш равен

$$W_m(K) = \max_{X_i} \left\{ F_m\left(X_m\right) + G_m\left(K - X_m\right)\right\}.$$

Далее по основному функциональному уравнению получаем, начиная с последнего, все условные оптимальные выигрыши и условные оптимальные управления.

2. Доход вкладывается в производство полностью на всех этапах, кроме последнего; максимизируется доход на последнем шаге.

Задача отличается от предыдущей тем, что максимизируется не сумма оставшихся средств «+» доход на последнем шаге, а только один доход на последнем шаге.

Чтобы отделить сумму оставшихся средств от дохода, для последнего шага зададим по отдельности функции дохода $f_m(X)$, $g_m(Y)$ и функции траты $\varphi_m(X)$, $\psi_m(Y)$. Полагаем на последнем шаге $F_m(X)=f_m(X)$ и $G_m(Y)=g_m(Y)$. Задача сводится к предыдущей задаче.

3. Доход вкладывается в производство не полностью, а какая-то часть его отчисляется; максимизируется полный отчисленный доход на всех этапах «+» остаток средств после m-го этапа.

Для решения задачи зададим функции дохода $f_i(X),\ \ g_i(Y)$ $(i=1,2,...,m)$ и функции траты $\varphi_i(X),\ \psi_i(Y)\ \ (i=1,2,...,m)$. Зададим дополнительную функцию отчислений $r_i(D)\le D$ $(i=1,2,...,m)$, которая показывает, какая часть дохода D не вкладывается, начиная с $i+1$ шага, а отчисляется.

Состояние системы перед i-м шагом характеризуется количеством средств K. Выигрыш на i-м шаге

$$\varpi_i(K_i,X_i)=r_i(f_i(X_i)+g_i(Y_i)).$$

Управление X_i переводит систему из состояния K в состояние K'

$$K'=\varphi_i(X)+\psi_i(Y)+f_i(X_i)+g_i(Y_i)+r_i(f_i(X_i)+g_i(Y_i)).$$

Основное функциональное уравнение будет

$$W_i(K)=\max_{X_i}\{r_i(f_i(X_i)+g_i(K-X_i))+$$
$$+W_{i+1}(\varphi_i(X_i)+\psi_i(K-X_i)+f_i(X_i)+g_i(K-X_i)+$$
$$+r_i(f_i(X_i)+g_i(K-X_i)))\}.$$

Условный оптимальный выигрыш на m-м шаге

$$W_m(K)=\max_{X_m}\{f_m(X_m)+g_m(K-X_m)+\varphi_m(X_m)+\psi_m(K-X_m)\}.$$

В остальном схема динамического программирования остается такой же.

6.7. *Задачи динамического программирования, не связанные со временем.* Пусть имеется группа предприятий Π_1, Π_2, ..., Π_m, которые выполняют одну и ту же операцию. В нашем распоряжении K_0 средств, которые мы можем вложить, чтобы произвести продукцию сверх плана.

Каждое предприятие может освоить только ограниченное количество средств

$$K_1, K_2, \ldots, K_m.$$

Если в предприятие $П_i$ вложены средства X_i, оно даст $\varphi_i(X)$ единиц дополнительной продукции. Требуется так распределить средства между предприятиями, чтобы суммарный объем дополнительной продукции был бы максимальным. То есть сумма всех вложенных средств была бы меньше имеющихся K_0

$$\sum_{i=1}^{m} X_i < K_0,$$

а выигрыш был бы

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i = \max,$$

где w_i — дополнительная продукция i-го предприятия.

Оптимальное управление на последнем шаге состоит в том, чтобы m-му предприятию выделить все K средств $< K_m$, т. е.

$$X_m(K) = \begin{cases} K & при\ \ K < K_m \\ K_m & при\ \ K \geq K_m \end{cases}.$$

Максимальный доход на последнем шаге будет

$$W_m(K) = w_m(K) = \varphi_m(x_m(K)).$$

Доход на предпоследнем шаге будет

$$W_{m-1}(K) = \max_{X_{m-1}} \left\{ \varphi_{m-1}(X_{m-1}) + W_m(K - X_{m-1}) \right\}.$$

Основное функциональное уравнение динамического программирования

$$W_i(K) = \max_{X_i}\{\varphi_i(X_i) + W_{i+1}(K - X_i)\}$$

и вся процедура решения не отличается от задачи распределения ресурсов с неоднородными этапами.

6.8. *Задачи динамического программирования с мультипликативным критерием.* До сих пор мы рассматривали задачи, когда выигрыш складывался из суммы выигрышей

$$W = \sum w_i.$$

Иногда возникают задачи, когда выигрыш представляет собой не сумму, а произведение

$$W = \prod_{i=1}^{m} w_i,$$

где w_i – выигрыш на i-м шаге.

Такой показатель называется *мультипликативным.*

Основное функциональное уравнение примет вид

$$W_i(S) = \max_{U_m}\{w_i(S,U_i)\cdot W_{i+1}(\varphi_i(S,U_i))\},$$

а условие оптимальности последнего шага будет

$$W_m(S) = \max_{U_m}\{w_m(S,U_m)\}.$$

Рассмотрим, к примеру, задачу распределения средств повышения надежности технического устройства. Пусть устройство состоит из m элементов. Надежность всей машины равна произведению надежностей всех элементов

$$P = \prod_{i=1}^{m} p_i,$$

где p_i — надежность i-го элемента.

Количество средств X, вложенных в приспособление, повышает надежность до значения $p_i = f_i(X)$. Требуется определить оптимальное распределение средств по элементам. Выигрыш на i-м шаге $p_i = f_i(X_i)$, X_i — количество средств, вложенных в i-й элемент.

Основное функциональное уравнение

$$P_i(K) = \max_{X_i} \left\{ f_i(X_i) \cdot P_{i+1}(K - X_i) \right\}.$$

Поскольку средства расходуются до конца, управление на последнем шаге состоит в том, чтобы выделить на этот шаг все оставшиеся средства

$$x_m(K) = K.$$

При этом достигается условный оптимальный выигрыш

$$p_m(K) = f_m(K).$$

Отсюда находим последовательные условные оптимальные управления $x_{m-1}(K), x_{m-2}(K), \quad \dots \quad , x_2(K)$ и условные оптимальные выигрыши $p_{m-1}(K), p_{m-2}(K), \quad \dots \quad , p_2(K)$.

Первый шаг определяется исходным количеством средств $p_1(K_0) = \max_{X_1} \{ f_1(X_1) \cdot p_2(K_0 - X_1) \}$ управления $X_1 = x_1(K_0)$.

Далее оптимальное управление стрится по обычной схеме.

Глава 25
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

25.1. Основные понятия теории вероятностей

1°. Всякий результат или исход испытания называется *событием* и обозначается прописными буквами латинского алфавита $A, B, C \ldots$

События называются *несовместными*, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает возможности появления других при том же испытании.

События A и $\overline{A}$ (не A) называются *противоположными*, если в данных условиях они несовместны, являясь единственными его исходами, т. е. появление одного из них исключает появление другого.

Статистическое определение вероятности. Под вероятностью появления события понимается постоянная величина, около которой группируются наблюдаемые значения частости

m/n, где m — число проявлений события A при n независимых испытаниях.

Классическое определение вероятности. Под вероятностью наступления события понимается отношение числа исходов, благоприятствующих появлению данного события к общему числу всех несовместных и равновозможных исходов. Вероятность появления события A обозначается $P(A)=\frac{m}{n}$, где m — число исходов, благоприятствующих появлению события A, n — число всех исходов.

Геометрические вероятности. Пусть g — мера длины, площади, объема представляет часть области G. Вероятность попадания брошеной точки в область G пропорциональна мере этой области и не зависит ни от от формы области G, ни от ее расположения относительно g. Тогда вероятность попадания точки в область определяется равенством

$$P=\frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}.$$

Событие называется *достоверным*, если оно является единственно возможным исходом испытания. Вероятность достоверного события равна единице $P(A)=1$. Если событие A заведомо не может произойти, то оно называется *невозможным*. Вероятность невозможного события равна нулю.

Если событие A при реализации некоторого комплекса условий может произойти, а может и не произойти, то оно называется *случайным*. Вероятность случайного события удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

2°. *Основные понятия теории соединений. Перестановками* из n различных элементов называются всевозможные соединения из этих n элементов, отличающиеся только порядком их расположения $P_n = n!$.

Размещениями из различных n элементов по m элементов называются соединения, которые отличаются либо составом, либо порядком своих элементов

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются соединения, которые различаются только составом своих элементов

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3°. *Правило суммы.* Если некоторый элемент A может быть выбран из совокупности элементов m способами, а другой элемент B– n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать из совокупности элементов m способами и после этого элемент B можно выбрать n способами, то оба элемента (A, B) в указанном порядке могут быть выбраны mn способами.

1.1. В партии из 120 изделий отдел технического контроля обнаружил 6 нестандартных. **Чему равна** относительная частота появления нестандартного изделия?

Решение. Относительная частота появления нестандартного изделия равна отношению числа испытаний, в которых это событие появилось, к общему числу проверенных изделий

$$W = \frac{6}{120} = 0,05.$$

1.2. В урне 4 черных, 3 красных и 5 белых шаров. **Найти** вероятность того, что вынутый шар окажется: а) черным; б) красным; в) синим; г) белым.

Решение. Всего в урне 12 шаров. Число исходов, благоприятствующих появлению: а) черного шара 4, тогда по определению вероятности $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

б) красного шара 3, $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$;

и) синего шара 0, т.к. синих шаров нет и это событие невозможное, $P = 0$;

г) белого шара 5, $P = \frac{5}{12}$.

1.3. Бросаются три игральные кости. **Найти** вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

Решение. Так как число граней на каждой кости равно 6, то число всех возможных тройных групп $n = 6^3 = 216$.

Обозначим за A событие, состоящее в том, что на всех гранях выпадет по одинаковому числу очков. Число одинаковых тройных групп (по 1, по 2,...) равно $m = 6$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

1.4. На 7 одинаковых карточках написаны буквы: с, у, е, т, н, д. Карточки перемешаны и разложены наугад в ряд. **Найти** вероятность того, что:

а) при этом получится слово «студент»;

б) на пяти, разложенных по одной можно будет прочесть слово «стенд».

Решение, а) Число всевозможных перестановок из 7 букв равно $P_7 = 7!$ Обозначим через A событие, состоящее в появлении слова «студент». Этому событию благоприятствует лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех исходов $P(A) = \frac{1}{7!} = 0,0002$.

б) В слове «стенд» 5 букв. Из 7 букв по 5 можно составить A_7^5 слов. Событию B, состоящему в появлении слова «стенд», благоприятствует лишь один исход. Отсюда искомая вероятность $P(B) = \dfrac{1}{A_7^5} = 0{,}00039$.

1.5. Среди 16 деталей, подвергаемых проверке, имеется 12 точных. **Найти** вероятность того, что из числа взятых наудачу 8 деталей 6 окажется без брака.

Решение. Общее число всех равновозможных выборок по 8 деталей из 16 равно числу сочетаний из 16 деталей по 8, т. е. $n = C_{16}^8$. Число исходов, благоприятствующих интерисующему нас событию, определяем следующим образом. Шесть стандартных деталей из 12 можно взять C_{12}^6 способами, а оставшиеся 8–6=2 бракованные детали из 16–12=4 нестандартных можно взять C_4^2 способами. Следовательно, число выборок по 8, в которых 6 точных деталей сочетается с 2 бракованными, равно произведению $m = C_{12}^6 \cdot C_4^2$.

Таким образом,

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^6 \cdot C_4^2}{C_{16}^8} = \frac{28}{65}$$

1.6. В партии 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечено 5 деталей. **Найти** вероятность того, что среди извлеченных: а) нет бракованных; б) нет стандартных.

Решение. а) Общее число возможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 5 деталей из 100, т. е. $n = C_{100}^5$.

Число исходов, благоприятствующих появлению 5 стандартных деталей, равно числу сочетаний из 90 стандартных деталей по 5, т. е. $m = C_{90}^5$.

Таким образом, вероятность того, что нет бракованных деталей, равна

$$P = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90!}{5!85!}\frac{5!95!}{100!} = 0{,}584.$$

б) Число исходов, благоприятствующих появлению 5 бракованных деталей, равно числу способов, которыми можно отобрать 5 деталей из 10 бракованных, т. е. $m = C_{10}^5$.

Таким образом, вероятность того, что среди отобранных деталей нет стандартных, равна

$$P = \frac{C_{10}^5}{C_{100}^5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!95!}{100!} = 0,00000334.$$

1.7. В партии из 15 изделий 10 первого и 5 второго сорта. Берут наудачу 2 изделия. **Найти** вероятность того, что оба изделия одного и того же сорта.

Решение. Обозначим за A событие, что оба изделия одного и того же сорта. Найдем вероятность противоположного события: одно изделие первого, одно — второго сорта; общее число исходов испытания $n = C_{15}^2$, число благоприятных для события $\overline{A}$ исходов $m = C_{10}^1 \cdot C_5^1$,

$$P(\overline{A}) = \frac{10 \cdot 5 \cdot 2}{15 \cdot 14} = \frac{10}{21},$$

тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{11}{12}.$$

1.8. Окружность радиуса R вписана в квадрат. **Найти** вероятность того, что точка, наудачу брошенная в квадрат, окажется внутри вписанного круга, если вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга.

Решение. Площадь круга $S_{кр} = \pi R^2$, а площадь квадрата $S_{кв} = 4R^2$. Отсюда

$$P = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}.$$

25.2. Алгебра событий

Суммой событий $A+B$ называется такое событие, которое состоит в появлении или события А, или события B, или обоих событий вместе.

Произведением событий AB называется событие, которое состоит в появлении обоих событий.

Разностью событий $A-B$ называется событие, которое состоит в появлении события A и непоявлении события B.

Аналогично определяется сумма и произведение нескольких событий. Из приведенных определений для событий A, B, C, справедливы равенства

$$A+B=B+A;\quad A+A=A;\quad AB=BA;$$

$$A\cdot A=A;\quad (A+B)+C=A+(B+C);\quad (AB)C=A(BC);\qquad (1)$$

$$A(B+C)=AB+AC.$$

2.1. Шар, вынутый наудачу из урны, может оказаться либо белого цвета (событие A), либо черного (событие B), либо красного (событие C). **Что означают** собой следующие события: а) $A+B$; б) $\overline{A+B}$; в) AC; г) $AC+B$?

Решение, а) $A+B$ — это событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из событий A или B, т. е. это либо белый, либо черный шар.

б) Событие $\overline{A+B}$ — это событие, противоположное появлению либо белого, либо черного шара, т. е. это событие C — появление красного шара.

в) Событие AC — невозможное событие, т. к. один шар не может быть и белым, и красным.

г) Событие $AC+B$ — это сумма невозможного события и события B, т. е. это событие B — появление черного шара.

2.2. Доказать равенства:

а) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; б) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$

в) $(A+B)(B+C)(A+C) = AB + BC + AC$,

г) $A+(B-AC)+(C-AC) = A+B+C$.

Решение. а) Если произошло событие $\overline{A+B+C}$, то это означает, что ни одно из событий A, B, C не наступило, т. е. произошло событие $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

б) Событие $\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ означает, что ни одного из событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$ не произошло, т. е. произошло событие $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}$ или AB.

в) Для доказательства равенства формально перемножим скобки, учитывая выражения (1)

$(AB+AC+B+BC)(A+C) = ABC+AC+BC+BC+AB+AC+$ $+AB+ABC = ABC + AB + BC + AC = AB + BC + AC$,

т.к. событие ABC — невозможное.

г) Рассмотрим сначала сумму $A+(B-AC)$, которая предполагает появление события или A или события $B-AC$, которое состоит в появлении события B и непоявлении события AC. Отсюда следует, что $A+(B-AC) = A+B$. Рассмотрим теперь событие $A+B+(C-AC)$, которое предполагает появление или события A или B, или $C-AC$. Последнее предполагает появление события C и непоявление события AC. Таким образом, окончательно имеем событие $A+B+C$, что и требовалось доказать.

2.3. Упростить выражения:

а) $AB+B$; *б)* $AB+(A-B)+(B-A)$;

в) $(A+B)(\overline{A}+B)$; *г)* $(A+B)B+(AB)B$.

Решение, а) Событие $AB+B$ предполагает появление либо A и B, либо B, поскольку событие AB — невозможное событие, то $AB+B=B$.

б) Появление события либо AB, либо $A-B$, либо $B-A$ означает, что событие AB — невозможное событие, $A-B$ — событие A появилось, а событие B не появилось, $B-A$ — событие B появилось, а событие A не появилось. Таким образом, имеем

$$AB+(A-B)+(B-A)=A+B\cdot$$

в) Рассматриваемое событие состоит в появлении (либо A, либо B) и (либо не $\bar{A}$, либо B). Поскольку появление A и не $\bar{A}$ события взаимоисключающие, то $(A+B)(\bar{A}+B)=B$.

г) Воспользуемся выражениями (1), тогда будем иметь

$AB+BB+A(BB)=AB+B+AB=B$

т.к. событие AB — невозможное.

25.3. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий, безразлично какого именно, равна сумме вероятностей этих событий. Для двух событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Для n несовместных событий появление одного из них определяется по формуле

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Сумма вероятностей несовместных событий $E_1, E_2, ...E_n$, образующих полную систему событий, равна единице

$$P(E_1)+P(E_2)+...+P(E_n)=1.$$

3.1. В урне 24 шара. Из них 12 белых, 8 зеленых и 4 желтых. **Найти** вероятность появления цветного шара.

Решение. Вероятность появления зеленого шара $P(A)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

Вероятность появления желтого шара $P(B)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$.

Появление цветного шара означает появление или зеленого, или желтого шара. Поскольку события несовместны, то по теореме сложения вероятностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

3.2. События A, B, C и D образуют полную систему событий. Вероятности событий таковы: $P(A)=0,4$; $P(B)=0,3$; $P(C)=0,1$. **Найти** вероятность события D.

Решение. Поскольку события A, B, C и D образуют полную систему событий, то сумма вероятностей

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1,$$

откуда

$$P(D)=1-(P(A)+P(B)+P(C))=$$
$$=1-(0,4+0,3+0,1)=0,2.$$

3.3. В урне 7 белых и 3 черных шара. **Найти** вероятность того, что в наудачу вынутых 2 шарах окажется: а) хотя бы один белый шар; б) не более одного черного шара.

Решение. а) Событие, что среди извлеченных шаров есть хотя бы один белый, обозначим через A, а что нет ни одного белого шара через $\bar{A}$. Тогда $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Общее число способов, которыми можно извлечь 2 шара из $n = 7+3 = 10$ шаров, равно C_{10}^2. Извлечь 2 черных из 3 можно C_3^2 способами. Отсюда вероятность того, что среди извлеченных 2 шаров нет ни одного белого, равна $P(\bar{A})=C_3^2/C_{10}^2$.

Искомая вероятность

$$P(A)=1-C_3^2/C_{10}^2=\frac{14}{15}.$$

б) За A обозначим событие того, что нет ни одного черного шара, а за B, что есть один черный шар.

Отсюда по теореме сложения вероятностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=C_7^2/C_{10}^2+\cdot C_3^1C_7^1/C_{10}^2=\frac{7}{15}+\frac{6}{15}=\frac{13}{15}.$$

25.4. Теорема умножения вероятностей

1°. Вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло, называется *условной* и обозначается $P_A(B)$.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие имело место

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

2°. Теорема умножения вероятностей обобщается на случай трех, четырех и т. д. событий. Для зависимых событий имеют место формулы

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C);$$

$$P(ABCD) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D).$$

Соответственно, для независимых событий

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C);$$

$$P(ABCD) = P(A)P(B)P(C)P(D).$$

3°. Вероятность появления хотя бы одного события, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, определяется по формуле

$$P(A) = 1 - q^n, \quad \text{где} \quad q = 1 - p.$$

Если независимые события $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют вероятности $P_1, P_2, ..., P_n$, то вероятность появления хотя бы одного из них равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2...q_n.$$

4.1. Найти вероятность двукратного извлечения белого шара из урны, в которой из 15 шаров имеется 5 белых, если: а) вынутый шар возвращается обратно в урну; б) вынутый шар в урну не возвращается.

Решение. а) Обозначим появление белого шара первый раз через A, а второй раз через B. Тогда вероятности событий A и B равны

$$P(A)=P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

Поскольку события A и B независимы, то

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{9}.$$

б) События A и B зависимы и $P(A)=\frac{1}{3}$, а $P_A(B)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. Отсюда

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{2}{21}.$$

4.2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность остановки на протяжении одного часа для 1 станка составляет 0,2; для 2 – 0,1 и для 3 – 0,15. **Найти** вероятность бесперебойной работы всех трех станков в течение одного часа.

Решение. Обозначим вероятность остановки станков: $q_1 =$ 0,2; $q_2 = 0{,}1$ и $q_3 = 0{,}15$. Тогда вероятности бесперебойной работы, как события противоположные, будут, соответственно, равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$ и $p_3 = 0{,}85$. Поскольку работа одного станка не зависит от работы других станков, то следует воспользоваться теоремой умножения для независимых событий

$$P=p_1p_2p_3=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}85=0{,}612.$$

4.3. Из урны, в которой 8 белых, 6 красных и 4 синих шара, последовательно извлекается три шара. **Найти** вероятность того, что первый шар белый, второй красный и третий синий, если шары обратно в урну не возвращаются.

Решение. В урне всего 18 шаров. Вероятность появления белого шара $P(A)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

Вероятность появления красного шара при условии, что первый шар был белый, равна $P_A(B)=\frac{6}{17}$.

Вероятность появления синего шара при условии, что первый шар был белый, а второй красный, равна $P_{AB}(C)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

Отсюда по теореме умножения

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=\frac{4}{9}\frac{6}{17}\frac{1}{4}=\frac{2}{51}.$$

4.4. Найти вероятность того, что наудачу взятое трехзначное число содержит только одну цифру, кратную трем.

Решение. Обозначим появление цифры, кратной трем, на месте сотен через A, на месте десятков — B, на месте единиц — C.

По условию задачи нас интересуют исходы $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$ и $\bar{A}\bar{B}C$. Поскольку нас устраивает любой исход, то по теореме сложения вероятностей имеем

$$P=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C).$$

Так как события независимы, то по теореме умножения вероятностей

$$P=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C).$$

Появлению события A благоприятствует 3 исхода из 9

$$P(A)=\frac{1}{3};\qquad P(\bar{A})=\frac{2}{3}.$$

Появлению события B и C благоприятствует 3 исхода из 10

$$P(B)=P(C)=\frac{3}{10};\quad P(\bar{B})=P(\bar{C})=\frac{7}{10}.$$

Отсюда

$$P=\frac{1}{3}\frac{7}{10}\frac{7}{10}+\frac{2}{3}\frac{3}{10}\frac{7}{10}+\frac{2}{3}\frac{7}{10}\frac{3}{10}=\frac{133}{300}.$$

4.5. Три стрелка стреляют в мишень, причем вероятность попадания, соответственно, у 1 – 0,9; 2 – 0,8; 3 – 0,7. **Найти** вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе.

Решение. Вероятность попадания в мишень одним из стрелков не зависит от результатов стрельбы других, поэтому рассматриваемые события независимы. Вероятность промахов

$$q_1=1-p_1=0,1;\quad q_2=1-p_2=0,2;\quad q_3=1-p_3=0,3.$$

Если вероятность того, что все три стрелка промахнутся, равна $q_1\,q_2\,q_3$, то искомая вероятность, как событие противоположное

$$P=1-q_1q_2q_3=1-0,1\cdot 0,2\cdot 0,3=0,994.$$

4.6. В цехе 5 станков. Вероятность того, что станок в данный момент времени работает, равна $p=0,8$. Чему равна вероятность того, что в данный момент работает по крайней мере один станок?

Решение. Поскольку события, что «станок работает», имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность работы по крайней мере одного станка в данный момент равна

$$P=1-q^n=1-(1-p)^n=1-0,2^5=0,99868.$$

4.7. Вероятность появления события хотя бы один раз при трех независимых испытаниях равна 0,973. **Найти** вероятнось появления события в одном испытании, если вероятность появления события во всех испытаниях одна и та же.

Решение. Вероятность появления события хотя бы один раз при независимых и равновозможных испытаниях определяется по формуле

$$P = 1 - q^n$$

Отсюда

$$0,973 = 1 - q^3; \quad q^3 = 0,027; \quad q = 0,3.$$

Искомая вероятность $p = 1 - q = 0,7$.

4.8. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле поразит мишень, равна $p = 0,6$. **Сколько** выстрелов должен сделать стрелок. чтобы с вероятностью не менее 0,8 попал в мишень хотя бы один раз?

Решение. Вероятность попадания в мишень при *n* независимых и равновозможных выстрелах хотя бы один раз находится по формуле

$$P = 1 - q^n.$$

По условию $P \geq 0,8; \quad p = 0,6; \quad q = 1 - p = 0,4.$
Отсюда $1 - q^n \geq 0,8; \quad q^n \leq 0,2; \quad 0,4^n < 0,2.$
Прологарифмируем последнее неравенство

$$n\,lg\,0,4 < lg\,0,2; \text{ т.к. } lg\,0,4 < 0, \text{ то } n \geq \frac{lg\,0,2}{lg\,0,4}; \; n \geq 2.$$

4.9. Студент знает 25 из 30 вопросов программы. **Какова вероятность** того, что студент знает три вопроса, предложенные ему экзаменатором.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, что студент знает вопрос. Тогда по теореме умножения

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{25}{30}\frac{24}{29}\frac{23}{28} = 0,5665.$$

4.10. Вероятность того, что нужная деталь находится в первом, втором и третьем ящике, соответственно, равна 0,7;

0,8; 0,9. **Найти** вероятность того, что деталь содержится: а) только в одном ящике; б) только в двух ящиках; в) во всех трех ящиках.

Решение, а) Обозначим за *A, B* и *C* события, что нужная деталь содержится, соответственно, в первом, втором и третьем ящике: $P(A)=0,7;\ P(B)=0,8;\ P(C)=0,9.$ Тогда вероятности, что деталь не содержится в этих ящиках будет $P(\bar{A})=0,3;\ P(\bar{B})=0,2;\ P(\bar{C})=0,1.$

Пусть деталь содержится в одном ящике и не содержится в двух других, тогда по теореме умножения вероятностей

$$P(A\bar{B}\bar{C})=0,7\cdot 0,2\cdot 0,1=0,014;$$
$$P(\bar{A}B\bar{C})=0,3\cdot 0,8\cdot 0,1=0,024;$$
$$P(\bar{A}\bar{B}C)=0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=0,054.$$

Поскольку нас не интересует, в каком именно ящике содержится деталь, то по теореме сложения вероятностей

$$P=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)=0,092.$$

б) Пусть деталь содержится в двух ящиках и не содержится в третьем, тогда

$$P(AB\bar{C})=P(A)P(B)P(\bar{C})=0,056;$$
$$P(A\bar{B}C)=P(A)P(\bar{B})P(C)=0,126;$$
$$P(\bar{A}BC)=P(\bar{A})P(B)P(C)=0,216.$$

Поскольку нас не интересует, в каких двух ящиках содержатся детали, то по теореме сложения вероятностей получим

$$P=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)=0,398.$$

в) Вероятность, что деталь содержится и в первом, и во втором, и в третьем равна

$$P=P(A)P(B)P(C)=0,7\cdot 0,8\cdot 0,9=0,504.$$

25.5. Следствия теорем сложения и умножения

1°. Теорема сложения вероятностей совместных событий (обобщенная формула сложения) имеет вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

и выражает вероятность появления одного из двух совместных событий. Теорема сложения вероятностей совместных событий может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Так, для трех совместных событий имеем

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC).$$

2°. Формула полной вероятности

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)$$

позволяет найти вероятность события B, которое может наступить лишь совместно с одним из единственно возможных и несовместных событий A_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

3°. Формула Байеса

$$P_B(A_i)=\frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

позволяет найти вероятность события B совместно с каким-то одним событием A_i из всех единственно возможных. События A_i называются гипотезами, вероятности которых следует определить.

5.1. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,8, а вторым — 0,7. **Найти** вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень, если стрелки сделали по одному выстрелу.

Решение. Вероятность попадания в мишень одним из стрелков не зависит от результатов стрельбы другого, т. е. события независимы.

Если обозначить $P(A)=0,8;\ P(B)=0,7,$ то вероятность совместного попадания

$$P(AB)=P(A)P(B)=0,56.$$

Отсюда по теореме сложения для совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,94.$$

5.2. В первой урне содержится 20 шаров, из них 15 черных; во второй урне 12 шаров, из них 9 черных. Из второй урны наудачу взяли и переложили в первую один шар. **Найти** вероятность $P(B)$ того, что шар, наудачу извлеченный из первой урны, будет черный.

Решение. Из второй урны мог быть извлечен либо черный A_1, либо нечерный A_2 шар. Вероятности этих событий: $P(A_1)=\frac{3}{4};\ P(A_2)=\frac{1}{4}.$

Условная вероятность того, что из первой урны извлечен черный шар, при условии, что из второй урны в первую был переложен черный шар, равна $P_{A_1}(B)=\frac{16}{21}.$

Условная вероятность того, что из первой урны извлечен черный шар, при условии, что из второй урны в первую был переложен нечерный шар, равна $P_{A_2}(B)=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}.$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)=\frac{3}{4}\frac{16}{21}+\frac{1}{4}\frac{5}{7}=\frac{3}{4}.$$

5.3. В магазине имеется 4 радиоприемника. Вероятности того. что радиоприемники выдержат гарантийный срок службы, соответственно, равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. **Найти** вероятность того, что купленный наудачу радиоприемник выдержит гарантийный срок службы.

Решение. Вероятности гарантийной работы радиоприемников, соответственно, равны $P(A_1)=0{,}8$; $P(A_2)=0{,}85$; $P(A_3)=0{,}9$; $P(A_4)=0{,}9$.

Поскольку вероятность купить тот или иной приемник равна $\frac{1}{4}$, то по формуле полной вероятности имеем

$$P=0{,}8\frac{1}{4}+0{,}85\frac{1}{4}+0{,}9\frac{1}{4}+0{,}95\frac{1}{4}=0{,}875.$$

5.4. В 1 ящике имеется 10 белых и 12 черных шаров, во 2 – 12 белых и 10 черных. Из 1 ящика во 2 наудачу перекладывают 2 шара, затем из 2 наудачу берут один шар. **Найти** вероятность того, что он белый.

Решение. Имеет место три гипотезы:

H_1 — из 1 во 2 переложены 2 белых шара,

H_2 — из 1 во 2 — 1 белый и 1 черный шары,

H_3 — из 1 во 2 — 2 черных шара.

$$P(H_1)=\frac{C_{10}^2}{C_{22}^2};\ P(H_2)=\frac{C_{10}^1C_{12}^1}{C_{22}^2};\ P(H_3)=\frac{C_{12}^2}{C_{22}^2}.$$

Обозначим за A событие, что взятый из второй урны шар белый, тогда

$$P(A/H_1)=\frac{14}{24};\ P(A/H_2)=\frac{13}{24};\ P(A/H_3)=\frac{12}{24}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

$$P(A)=\frac{1}{24C_{22}^2}(14C_{10}^2+13C_{10}^1C_{12}^1+12C_{12}^2)=0{,}538.$$

5.5. По данным примера 5.4. **определить** вероятность того, что из 1 ящика во 2 было переложено 2 белых шара, если известно, что из 2 ящика после перекладывания был извлечен черный шар.

Решение. Если событие A — извлечение из 2 ящика белого шара, то извлечение черного шара противоположное событие $\overline{A}$. Применительно к событию $\overline{A}$ и к гипотезе H_1 (перекладывание 2 белых шаров) формула Байеса имеет вид

$$P(H_1 / \overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A} / H_1)}{P(\overline{A})};$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,462; \quad P(\overline{A} / H_1) = \frac{10}{24},$$

т.к. после перекладывания 2 белых шаров во 2 ящике будет 14 белых и 10 черных шаров. Таким образом

$$P(H_1 / \overline{A}) = \frac{1}{0,462} \frac{C_{10}^2}{C_{22}^2} \frac{10}{14} = 0,176.$$

5.6. Детали изготовляются на трех станках. На 1 станке вырабатывают 50% всех деталей, на 2 — 30% и на 3 — 20%. Причем вероятность получения бракованной детали с 1 станка равна 0,03; со 2 — 0,02; с 3 — 0,01. **Найти** вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь: а) стандартная; б) стандартная и изготовлена на 1; на 2; на 3 станке.

Решение. а) Обозначим за A_1 появление детали с 1 станка; A_2 — 2; A_3 — 3. Тогда $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,3$; $P(A_3) = 0,2$.

Если через B обозначить соответствие детали стандарту, то для отдельных станков имеем следующие условные вероятности

$$P_{A_1}(B) = 0,97; \; P_{A_2}(B) = 0,98; \; P_{A_3}(B) = 0,99.$$

Искомая вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартна, по формуле полной вероятности равна

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+P(A_3)P_{A_3}(B)=$$

$$=0,5\cdot 0,97+0,3\cdot 0,98+0,2\cdot 0,99=0,977.$$

б) Вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь стандартная и изготовлена на каком-либо конкретном станке, находится по формуле Байеса.

На первом станке

$$P_B(A_1)=\frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{P(B)}=\frac{0,5\cdot 0.97}{0,977}=0,4964.$$

На втором станке

$$P_B(A_2)=\frac{P(A_2)P_{A_2}(B)}{P(B)}=\frac{0,3\cdot 0,98}{0,977}=0,3009.$$

На третьем станке

$$P_B(A_3)=\frac{P(A_3)P_{A_3}(B)}{P(B)}=\frac{0,2\cdot 0,99}{0,977}=0,2027.$$

Правильность вычислений подтверждается тем, что

$$P_B(A_1)+P_B(A_2)+P_B(A_3)=0,4964+0,3009+0,2027=1.$$

25.6. Формула Бернулли. Биномиальное распределение вероятностей

1°. Ряд испытаний называют *независимым* относительно события A, если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Вероятность появления события A при n независимых испытаниях ровно m раз находится по формуле Бернулли

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где p — вероятность появления события A в каждом отдельном испытании; $q = 1 - p$.

2°. Вероятность того, что число m случаев появления события A заключено в заданных границах между числами m_1 и m_2, либо меньше (не меньше) или больше (не больше) некоторого числа m_1 находится из биномиального распределения вероятностей

$$p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^2 p^2 q^{n-2} + C_n^1 p q^{n-1} + q^n = 1.$$

6.1. Всхожесть семян данного растения составляет 80%. **Найти** вероятность того, что из 8 посаженных семян взойдет 6.

Решение. Вероятность всхожести отдельного семени $p = 0,8$. Отсюда $q = 1 - p = 0,2$. По формуле Бернулли

$$P_{6,8} = C_8^6 p^6 q^{8-6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} 0,8^6 \cdot 0,2^2 = 0,17.$$

6.2. Вероятность поражения мишени в каждом отдельном выстреле равна 0,9. **Чему равна** вероятность того, что при 4 выстрелах мишень будет поражена?

Решение. Вероятность того, что мишень будет не поражена равна $P_{0,4}$.

Рассматривая поражение мишени, как событие противоположное, будем иметь

$$P(m \geq 1) = 1 - P_{0,4} = 1 - q^4 = 1 - 0,1^4 = 0,9999.$$

6.3. Найти вероятность того, что при $n = 6$ независимых испытаниях событие появится: а) ровно m раз; б) не менее m раз; в) не более m раз; г) хотя бы один раз; д) хотя бы два раза, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,7, а $m = 4$.

Решение. а) Вероятность того, что при n независимых испытаниях событие появится ровно m раз, находим по формуле Бернулли

$$P_{4,6} = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!2!} 0,7^4 \cdot 0,3^2 = 0,324.$$

б) Вероятность того, что событие появится не менее 4 раз, равна

$$P(m \geq 4) = P_{4,6} + P_{5,6} + P_{6,6} = C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q + p^6 = 0,744.$$

в) Вероятность того, что событие появится не более 4 раз, равна

$$P(m \leq 4) = P_{0,6} + P_{1,6} + P_{2,6} + P_{3,6} + P_{4,6} = 1 - (P_{5,6} + P_{6,6}) = 0,579825.$$

г) Вероятность того, что событие не появится, равна $P_{0,6}$. Тогда вероятность того, что событие появится хотя бы один раз, равна

$$P(m \geq 1) = 1 - P_{0,6} = 1 - q^6 = 0,999271.$$

д) Вероятность того, что событие появится хотя бы два раза, равна

$$P(m \geq 2) = 1 - (P_{0,6} + P_{1,6}) = 0,989.$$

6.4. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,96. **Найти** вероятность четырех попаданий при пяти выстрелах.

Решение. Обозначим за p — вероятность попадания, а за q — вероятность промаха при одном выстреле. Вероятность промаха при двух выстрелах равна q^2. Тогда вероятность хотя бы одного попадания $1 - q^2 = 0,96$. Отсюда

$$q^2 = 0,04; \ q = 0,2; \ p = 1 - q = 0,8.$$

Применяя формулу Бернулли, получим искомую вероятность

$$P_{4,5} = C_5^4 p^4 q = \frac{5!}{4!} 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,2816.$$

25.7. Наивероятнейшее число появлений события

Наивероятнейшее число m_0 появлений события определяется из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$

где p — вероятность появления события в отдельном испытании; n — число независимых испытаний; $q = 1 - p$.

7.1. На каждые 20 деталей приходится в среднем 5 нестандартных. **Определить** наивероятнейшее число стандартных деталей из наудачу взятых 8 деталей.

Решение. Вероятность появления стандартной детали

$p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $q = \frac{1}{4}$; $n = 8$. Неравенство примет вид

$$8 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \le m_0 \le 8 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

или

$$5\frac{3}{4} \le m_0 \le 6\frac{1}{2}$$

откуда $m_0 = 6$.

7.2. Сколько раз следует стрелять из орудия, чтобы при вероятности попадания $p = 0,8$ наивероятнейшее число попаданий оказалось равным 15?

Решение. Здесь $m_0 = 15$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. Составляем неравенства

$$0,8\,n - 0,2 \le 15 \le 0,8\,n + 0,8.$$

Отсюда $0,8n \le 15,2$; $n \le 19$; $0,8n \ge 14,2$; $n \ge 17,75$. Таким образом, $n = 18$ или $n = 19$.

25.8. Локальная теорема Лапласа. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие появится ровно m раз при n независимых испытаниях, где числа m и n достаточно велики, определяется по формуле

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sigma} \varphi(x), \qquad (1)$$

где $\sigma = \sqrt{npq}$; $x = \dfrac{m - np}{\sigma}$.

Формулу Лапласа (1) иногда называют *асимптотической формулой*.

Функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ четна $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и приведена приложении (таблица (1)).

Формула Лапласа тем точней, чем больше σ, т. е. чем больше n и pq. Если же p мало, т. е. события редки, то применяют формулу Пуассона

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (2)$$

где $\lambda = np$.

Использование формулы Пуассона (2) целесообразно при $\lambda \le 10$ и она тем точней, чем больше n и меньше p.

Значения функции Пуассона $P(X = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ в зависимости от m и λ приведены в приложении (таблица (2)).

8.1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0{,}8$. **Какова вероятность** того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень 70 раз?

Решение. По условию $n = 100$; $m = 70$; $p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2$. Поскольку m и n достаточно велики, то воспользуемся асимптотической формулой Лапласа.

Находим

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 4; \ x = \frac{m - np}{\sigma} = \frac{70 - 80}{4} = -2,5.$$

Так как функция $\varphi(x)$ четна, то при $x = 2,5$ из таблиц находим, что $\varphi(2,5) = 0,01753$.

Откуда $P_{70,100} = \dfrac{\varphi(x)}{\sigma} = 0,00438$.

8.2. В партии из 1000 деталей имеется 20 с браком. Для контроля взяты 60 деталей. **Какова вероятность** того, что среди них: а) нет бракованных; б) число бракованных меньше двух?

Решение. а) По условию $n = 60$; $p = 0,02$; $q = 0,98$. Поскольку $\lambda = np = 1,2 < 10$, то воспользуемся формулой Пуассона. Отсутствие бракованной детали означает, что $m = 0$ и

$$P_{0,60} = \frac{1,2^0 e^{-1,2}}{0!} = 0,32137.$$

б) Вероятность появления одной бракованной детали равна

$$P_{1,60} = (1,2)^1 e^{-1,2} = 0,385644.$$

Отсюда вероятность того, что число бракованных меньше двух по теореме сложения равна

$$P(m < 2) = P_{0,60} + P_{1,60} = 0,707014.$$

25.9. Интегральная теорема Лапласа

Если производится большое число n независимых испытаний и вероятность наступления события в каждом испытании равна p, то вероятность того, что число m появления события удовлетворяет неравенству $a \le m \le b$ имеет своим пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, когда n неограниченно возрастает. Здесь

$$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}; \qquad \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для непосредственного вычисления используют функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

которая представлена в виде таблицы (3) и вероятность появления события в заданных границах определяется формулой

$$P(a \le m \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]. \qquad (1)$$

Функция Лапласа нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Если за $\varepsilon = \alpha\sqrt{\frac{pq}{n}}$ обозначить отклонение частости $\left(\frac{m}{n}\right)$ от вероятности появления события в отдельном испытании p, то вероятность того, что отклонение частости события от вероятности при n независимых испытаниях не превышает заданного ε, находится по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \simeq \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2)$$

9.1. При вытачивании гаек наблюдается в среднем 10% брака. **Найти** вероятность того, что в партии из 400 гаек число небракованных гаек: а) заключено между 340 и 380; б) не более 380.

Решение. а) Здесь $n = 400$; $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$; $a = 340$; $b = 380$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. Найдем сначала α и β

$$\alpha = \frac{340 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -3{,}33;$$

$$\beta = \frac{380 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 3{,}33.$$

Откуда

$$P(340 \le m \le 380) = \frac{1}{2}\left[\Phi(3{,}33) - \Phi(-3{,}33)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(3{,}33) + \Phi(3{,}33)\right] = \Phi(3{,}33) = 0{,}99913.$$

б) Вероятность того, что число небракованных гаек не более 380 означает, что $P(0 \le m \le 380) = ?$

Отсюда $\alpha = \dfrac{-400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -60$; $\beta = 3{,}33$.

$$P(0 \le m \le 380) = \frac{1}{2}\left[\Phi(3{,}33) - \Phi(-60)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(3{,}33) + \Phi(60)\right] \simeq 1,$$

так как для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) \simeq 1$.

9.2. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях частость появления события будет отличаться от его вероятности не более чем на 0,05, если вероятность появления события в каждом испытании $p = 0{,}8$.

Решение. Здесь $n = 400$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}05$. Надо найти $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$. Воспользуемся формулой (2). Так как $\alpha = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}} = 2{,}5$, то $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le 0{,}05\right) = \Phi(2{,}5) = 0{,}98758$.

9.3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. **Найти**, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,98785 при 2500 испытаниях.

Решение. По условию $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $n = 2500$; $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 0{,}98785$. Пользуясь формулой (2), имеем

$$0{,}98785 = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{m}}\right);$$

$$0{,}98785 = \Phi(\varepsilon \cdot 125).$$

По таблице $\Phi(x)$ находим $125 \cdot \varepsilon = 2{,}5$, откуда $\varepsilon = 0{,}02$.

Глава 26
СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

26.1. Дискретная случайная величина и ее распределение

Случайной величиной называется переменная, которая в зависимости от исхода испытания может принимать различные числовые значения.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между возможными ее значениями $x_1, x_2, ..., x_n$ и их вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Закон распределения обычно задается в табличном виде

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X определяется соотношением $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$, $(x_i < x)$, т. е. суммирование ведется по индексам, для которых $x_i < x$.

1.1. Производится стрельба по мишени до первого попадания или до израсходования всех патронов. **Составить таблицу** распределения случайной величины — числа израсходованных патронов, если патронов $n = 3$, а вероятность попадания при отдельном выстреле $p = 0{,}6$. **Построить график** этого распределения.

Решение. Случайная величина может принимать значения: $x_1 = 1$ — попадание с первого выстрела, $x_2 = 2$ — попадание со второго выстрела и $x_3 = 3$ — попадание с третьего выстрела или три промаха. Вероятности этих событий $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = qp = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$; $p_3 = q^2 p + q^3 = q^2(p+q) = = q^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$, отсюда таблица распределения

x_i	1	2	3
p_i	0.6	0.24	0,16

Проверка: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}16 = 1$

График закона распределения вероятностей случайной величины X имеет вид (рис. 26.1).

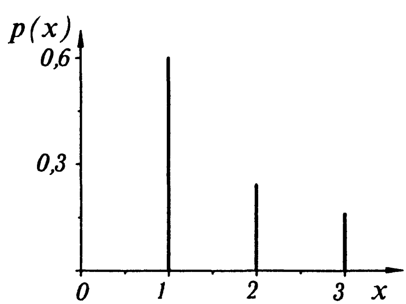


Рис. 26.1

1.2. Вероятность появления события в каждом из 4 независимых испытаний равна $p = 0{,}4$. **Составить** функцию распределения дискретной случайной величины и **построить** график.

Решение. Значения вероятностей появления события m раз $m = 0, 1, 2, 3, 4$ находим по формуле Бернулли. Отсюда таблица распределения

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

По данным таблицы находим функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad -\infty < x \le 0 \\ 0{,}1296 & \textit{при} \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}4752 & \textit{при} \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}8208 & \textit{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 0{,}9744 & \textit{при} \quad 3 < x \le 4 \\ 1 & \textit{при} \quad 4 < x < \infty \end{cases}$$

График функции распределения дискретной случайной величины (рис. 26.2) наглядно отражает ступенчатый характер функции.

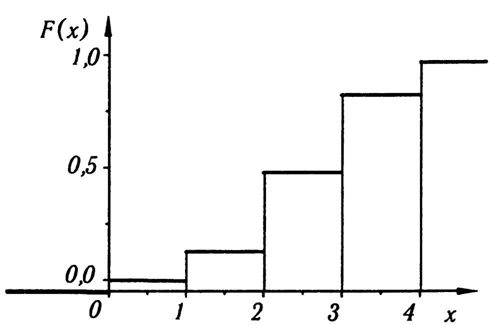


Рис. 26.2

26.2. Математическое ожидание и его свойства

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины называется сумма произведений всех значений случайной величины на соответствующие им вероятности

$$M(X)=\bar{X}=a=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Здесь следует отметить, что $\sum_{i=1}^{n}p_i=1.$

Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна p, находится по формуле

$$M(X)=np.$$

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой же постоянной $M(C)=C.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX)=CM(X).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

2.1. Найти среднее значение числа попаданий стрелком в мишень при 8 выстрелах, если вероятность попадания при каждом отдельном выстреле $p=\frac{2}{3}.$

Решение. Пользуясь формулой Бернулли, составим таблицу распределения числа попаданий

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{6561}$	$\frac{16}{6561}$	$\frac{112}{6561}$	$\frac{448}{6561}$	$\frac{1120}{6561}$	$\frac{1792}{6561}$	$\frac{1792}{6561}$	$\frac{1024}{6561}$	$\frac{256}{6561}$

Отсюда по определению математического ожидания находим среднее значение числа попаданий

$$\overline{X} = M(X) = (1\cdot 16 + 2\cdot 112 + 3\cdot 448 + 4\cdot 1120 + 5\cdot 1792 +$$
$$+6\cdot 1792 + 7\cdot 1024 + 8\cdot 256)/6561 = 5{,}3.$$

2.2. Вероятность промаха при стрельбе в мишень равна 0,2. **Найти** математическое ожидание числа попаданий при 10 выстрелах.

Решение. Вероятность поражения мишени $p = 1 - q = 0{,}8$. Поскольку события независимы, то $M(X) = np = 10\cdot 0{,}8 = 8$.

2.3. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы 3 из них были выигрышными, если вероятность выигрыша одного билета $p = 0{,}01$.

Решение. Поскольку события независимые, то искомое число билетов

$$n = \frac{M(X)}{p} = \frac{3}{0{,}01} = 300.$$

2.4. Дискретные независимые случайные величины X и Y **заданы** таблицами распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,5	0,3	0,2

y_j	2	4
q_j	0,6	0,4

Найти математическое ожидание суммы $X + Y$ и произведения XY двумя способами:

а) составив закон распределения $X + Y$ и XY;

б) пользуясь свойствами.

Решение. а) Составим распределение суммы $X+Y$

$x_i + y_i$	1+2	1+4	2+2	2+4	3+2	3+4
$p_i q_i$	$0{,}5 \cdot 0{,}6$	$0{,}5 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}2 \cdot 0{,}6$	$0{,}2 \cdot 0{,}4$

Отсюда

$$M(X+Y) = 3\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}18 + 6\cdot 0{,}12 + 5\cdot 0{,}12 + \\ +7\cdot 0{,}08 = 4{,}5.$$

Составим распределение произведения XY

XY	$1\cdot 2$	$1\cdot 4$	$2\cdot 2$	$2\cdot 4$	$3\cdot 2$	$3\cdot 4$
$p_i q_i$	$0{,}5 \cdot 0{,}6$	$0{,}5 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}2 \cdot 0{,}6$	$0{,}2 \cdot 0{,}4$

Отсюда

$$M(XY) = 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}18 + 8\cdot 0{,}12 + \\ +6\cdot 0{,}12 + 12\cdot 0{,}08 = 4{,}76.$$

б) Математические ожидания случайных величин

$$M(X) = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}2 = 1{,}7;$$

$$M(Y) = 2\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}8.$$

Отсюда

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 1{,}7 + 2{,}8 = 4{,}5;$$

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y) = 1{,}7\cdot 2{,}8 = 4{,}76.$$

26.3. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

1°. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математитческого ожидания называется *дисперсией случайной величины*

$$D(X) = M(X-a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i = M(X^2) - a^2. \qquad (1)$$

Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна p, находится по формуле $D(X) = npq$, где $q = 1 - p$.

2°. Свойства:

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю $D(C) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат $D(CX) = C^2 D(X)$.

3) Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

4) Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

3°. Среднее значение абсолютной величины отклонения $|X - \bar{X}|$ называется средним отклонением

$$\overline{|X - \bar{X}|} = \sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{X}| p_i. \qquad (2)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

3.1. По таблице распределения случайной величины

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,15	0,2	0,3	0,2	0,15

определить среднее отклонение и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Находим среднее значение случайной величины

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,15 = 2.$$

Составим таблицу распределения абсолютных величин отклонений

$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$	2	1	0	1	2
p_i	0,15	0,2	0,3	0,2	0,15

Отсюда по формуле (2) имеем

$$\overline{\lvert x_i - \overline{X} \rvert} = 2 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,15 = 1.$$

Составим таблицу распределения квадратов отклонений случайной величины от ее среднего значения

$(x_i - \overline{X})^2$	4	1	0	1	4
p_i	0,15	0,2	0,3	0,2	0,15

Отсюда дисперсия

$$D(X) = 4 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,15 = 1,6.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,6} = 1,29.$$

3.2. Дисперсия случайной величины X равна 4. **Найти** дисперсию следующих величин: а) $X - 3$; б) $-4X$; в) $2X + 1$.

Решение. Воспользуемся свойствами дисперсии

а) $D(X-3) = D(X) + D(3) = 4;$

б) $D(-4X) = (-4)^2 D(X) = 64;$

в) $D(2X+1) = 2^2 D(X) + D(1) = 16.$

3.3. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, если вероятность появления его в каждом отдельном испытании равна 0,6.

Решение. Вероятность непоявления события $q = 1 - p = 0,4$. Так как испытания независимы, то

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 24.$$

3.4. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. **Найти** x_1 и x_2, зная, что $p_1 = 0,4;\ M(X) = 3,6;\quad D(X) = 0,24.$

Решение. По определению математического ожидания и дисперсии имеем

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = M(X);$$

$$(x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 = D(X).$$

Так как $p_2 = 1 - p_1$, то

$$0,4x_1 + 0,6x_2 = 3,6;$$

$$0,4(x_1 - 3,6)^2 + 0,6(x_2 - 3,6)^2 = 0,24.$$

Решая систему относительно x_1 и x_2, приходим к квадратному уравнению

$$x_2^2 - 7,2x_2 + 12,8 = 0,$$

откуда $x_2 = 4$ или $x_2 = 3,2$.

Условию $x_1 < x_2$ соответствует $x_1 = 3;\ x_2 = 4.$

26.4. Закон больших чисел

1°. *Неравенство Маркова.* Если X — неотрицательная случайная величина, то для любого положительного $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$P(X < \delta) \geq 1 - \frac{a}{\delta},$$

где $a = M(X)$.

2°. *Неравенство Чебышева.* Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше некоторого положительного $\delta > 0$, определяется неравенством

$$P(|X-a|<\delta)\geq 1-\frac{D(X)}{\delta^2}.$$

3°. *Теорема Чебышева.* Если $X_1, X_2, ..., X_n$ независимые случайные величины, причем дисперсии их не превышают постоянного числа C. то каково бы ни было положительное число δ

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\delta\right)\geq 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}{n^2\delta^2}\geq 1-\frac{C}{n\delta^2}$$

и при $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\delta\right)=1$.

Если случайные величины имеют одинаковые математические ожидания и одинаково ограниченные дисперсии, то

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}-a\right|<\delta\right)\geq 1-\frac{a}{n\delta^2},$$

т. е. среднее арифметическое случайных величин при большем n сколь угодно мало отличается от математического ожидания.

4°. ***Теорема Бернулли.*** Вероятность того, что отклонение частости появления события A при n независимых испытаниях от вероятности появления его в отдельном испытании по абсолютной величине не превышает некоторого $\varepsilon>0$, удовлетворяет неравенству

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

4.1. В среднем университет ежегодно заканчивает 600 человек. **Какова вероятность** того, что в этом году университет закончит не более 630 студентов?

Решение. Чтобы оценить вероятность $P(x < 600)$, воспользуемся неравенством Маркова. По условию $a = 600$, $\delta = 630$.

$$P(X < 630) \geq 1 - \frac{600}{630} = \frac{1}{21}.$$

4.2. Среднее значение длины удочки 3 м, а дисперсия равна 0,15. **Какова вероятность** того, что купленная удочка окажется по своей длине не меньше 2,5 м и не больше 3,5 м?

Решение. По условию $a = 3$; $D(X) = 0,15$, а возможная длина заключена в пределах $2,5 \leq X \leq 3,5$. Поскольку $|X - a| \leq 0,5$, то полагая $\delta = 0,5$, воспользуемся для нахождения вероятности этого события неравенством Чебышева

$$P(|X - 3| < 0,5) \geq 1 - \frac{0,15}{0,25} = 0,4.$$

4.3. По данным ОТК вероятность стабильной работы телевизора равна $p = 0,9$. **Найти вероятность** того, что из 1500 телевизоров отклонение числа стабильно работающих телевизоров от математического ожидания по абсолютной величине не превышает 50.

Решение. Поскольку стабильная работа телевизора события независимые, то математическое ожидание числа работающих телевизоров равно $M(X) = np = 1500 \cdot 0,9 = 1350$, а дисперсия $D(X) = npq = 1500 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 135$. Вероятность того, что $|X - M(X)| < 50$, находим с помощью неравенства Чебышева

$$P(|X - a| < 50) \geq 1 - \frac{135}{2500} = 0,946.$$

4.4. При каком числе независимых испытаний вероятность того, что отклонение частости от вероятности появления события в отдельном испытании $p = 0,8$ по абсолютной величине меньше 0,04, превысит 0,75?

Решение. Из условия $\varepsilon = 0,05$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. По теореме Бернулли имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,8\right|<0,04\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}>0,75;$

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2}<0,25;\quad n>\frac{0,8\cdot 0,2}{0,04^2\cdot 0,25}=400.$$

4.5. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,1. **Какова вероятность** того, что в партии из 1500 деталей отклонение установленного процента брака не превышает 5%?

Решение. Требуется найти $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$, если известно, что $p=0,1;$ $q=0,9;$ $\varepsilon=0,05;$ $n=1500.$ По теореме Бернулли

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,1\right|<0,05\right)>1-\frac{0,1\cdot 0,9}{1500\cdot(0,05)^2}=0,976.$$

4.6. Для определения средней урожайности поля площадью в 2000 га с каждого гектара взяли на выборку по 1м^2. Известно, что среднее квадратическое отклонение на каждом гектаре не превышает 0,5 *ц*. **Найти вероятность** того, что отклонение средней выборочной урожайности от средней урожайности по всему полю отличается не более чем на 0,1*ц*.

Решение. При определении вероятности воспользуемся теоремой Чебышева. По условию задачи: $n=2000,$ $\delta=0,1,$

$$D(X)=\sigma^2<0,25.$$

Отсюда

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-a\right|<0,1\right)\geq 1-\frac{0,25}{2000\cdot 0,01}$$

или

$$P\geq 1-0,0125=0,9875.$$

4.7. Истинное значение величины равно a. **Сколько раз** нужно провести эксперимент, чтобы с вероятностью 0, 9 можно было утверждать, что отклонение средней арифметической этих измерений от среднего значения a отличается не более чем на 5, если дисперсия не превышает 8?

Решение. Применяя теорему Чебышева, по условию имеем

$$P \geq 1 - \frac{C}{n\delta^2} = 0,9,$$

где $C = 8$, $\delta = 5$.

Число измерений находим из выражения

$$1 - \frac{8}{n25} = 0,9; \quad n = 3,2.$$

Таким образом, $n = 4$.

26.5. Начальные и центральные моменты

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right]. \tag{1}$$

Если $M(X) = 0$, то момент называется *начальным*

$$\nu_k = M(X^k). \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию

$$\nu_1 = M(X), \tag{3}$$

а центральный момент второго порядка равен дисперсии

$$\mu_2 = D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{4}$$

Центральные моменты через начальные моменты выражаются по формулам

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \qquad (5)$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

5.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	4
p	0,1	0,4	0,5

Найти: а) начальные моменты первого, второго и третьего порядка; б) центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядка.

Решение. а) Начальный момент первого порядка по формуле (3) равен

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}9.$$

Запишем закон распределения случайной величины X^2

X^2	1	4	16
p	0,1	0,4	0,5

Начальный момент второго порядка равен

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 16 \cdot 0{,}5 = 9{,}7.$$

Закон распределения X^3 имеет вид

X^3	1	8	64
p	0,1	0,4	0,5

Начальный момент третьего порядка равен

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}5 = 35{,}3.$$

б) Центральный момент первого порядка по формуле (1) равен

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков находим по формулам (5)

$$\mu_2 = 9,7 - 2,9^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = 35,3 - 3 \cdot 2,9 \cdot 9,7 + 2 \cdot 2,9^3 = -0,312.$$

Начальный момент четвертого порядка равен

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,4 + 256 \cdot 0,5 = 184,5.$$

Центральный момент четвертого порядка будет

$$\mu_4 = 184,5 - 4 \cdot 35,3 \cdot 2,9 + 6 \cdot 9,7 \cdot 2,9^2 - 3 \cdot 2,9^4 = 52,2977.$$

26.6. Простейший поток событий

Простейшим (пуассоновским) потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Вероятность появления m событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}, \tag{1}$$

где λ — интенсивность потока (среднее число событий в единицу времени).

Простейший поток характеризуется свойствами:

а) стационарности, т. е. вероятность появления m событий за некоторый промежуток времени зависит только от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета;

б) ординарности, т. е. появление двух и более событий за малый промежуток времени невозможно, поскольку вероятность появления более одного события мала в сравнении с вероятностью появления одного события;

в) появление события в предыдущий период не сказывается на вероятности появления событий в последующий период.

6.1. Среднее число вызовов, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно двум. **Найти** вероятность того, что за 4 минуты поступит: а) 3 вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов.

Решение. а) Предполагаем, что поток вызовов простейший по условию $l = 2$, $t = 4$, $m = 3$. Воспользуемся формулой (1)

$$P_4(3) = \frac{(2\cdot 4)^3 e^{-2\cdot 4}}{3!} = 0,028.$$

б) Вероятность того, что наступило менее трех вызовов, по теореме сложения вероятностей равна

$$P_4(m<3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) =$$

$$= e^{-2\cdot 4} + \frac{2\cdot 4\cdot e^{-2\cdot 4}}{1!} + \frac{(2\cdot 4)^2 e^{-2\cdot 4}}{2!} = 0,0135.$$

в) События «поступило менее трех вызовов» и «поступило не менее трех вызовов» противоположны, поэтому вероятность того, что за 4 минуты поступит не менее трех вызовов, равна

$$P_4(m \ge 3) = 1 - P_4(m<3) = 1 - 0,0135 = 0,9865.$$

26.7. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

1°. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x) = P(X<x)$ есть непрерывная, кусочно дифференцируемая функция.

Производная от функции распределения называется *плотностью распределения вероятностей* (дифференциальной функцией) непрерывной случайной величины

$$f(x) = F'(x). \tag{1}$$

Функция распределения при заданной плотности распределения находится по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{2}$$

Свойства плотности распределения:

$$1)\ f(x) > 0;$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \tag{3}$$

$$3)\ P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{4}$$

2°. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины определяются по формулам

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx; \tag{5}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - a^2, \tag{6}$$

где a математическое ожидание.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \tag{7}$$

3°. *Модой* M_0 непрерывной случайной величины X называется ее возможное значение, которому соответствует максимум дифференциальной функции.

Медианой M_e непрерывной случайной величины X называется ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P(X < M_e) = P(X > M_e), \tag{8}$$

т. е. медиана делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам.

4°. Центральный момент k-го порядка непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k f(x)dx \tag{9}$$

Если $a = 0$, то момент называется начальным и определяется по формуле

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \tag{10}$$

Если $k=1$, то $\nu_1 = M(X) = a$, $\mu_1 = 0$; если $k = 2$, то $\mu_2 = D(X)$. Центральные моменты выражаются через начальные моменты по формулам (26.5 (5)), т. е. по тем же, что и для дискретной величины.

7.1. Случайная величина **задана** плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0; \\ a\sin x & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0 & \textit{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения; в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(0; \frac{\pi}{2})$.

Решение. а) Из условия (3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ находим, что $\int\limits_0^{\pi} a \sin x\, dx = 1$. Откуда

$$-a \cos x \Big|_0^{\pi} = 1; \quad -a(-1-1) = 1; \quad a = \frac{1}{2}.$$

б) При $x \le 0$ $f(x) = 0$, следовательно $F(x) = 0$. Функцию распределения при $0 < x \le \pi$ находим по формуле (2)

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_0^x \frac{1}{2} \sin x\, dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^x = \frac{1-\cos x}{2}.$$

При $x > \pi$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin x\, dx + \int\limits_{\pi}^{x} 0 \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = 1.$$

Отсюда

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2} & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1 & \textit{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

в) Искомая вероятность находится по формуле (4)

$$P(0 < X < \tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{-1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

7.2. Случайная величина X **задана** функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \textit{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию (плотность вероятности); б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины; в) среднее квадратическое отклонение; г) построить графики интегральной и дифференциальной функции.

Решение. а) По формуле (1) дифференциальная функция имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & при \quad 0<x\le 2,\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

б) Математическое ожидание и дисперсию находим по формулам (5), (6)

$$M(X)=\int_0^2 x\frac{x}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$D(X)=\int_0^2 x^2\frac{x}{2}dx-\frac{16}{9}=\frac{x^4}{8}\Big|_0^2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

в) среднее квадратическое отклонение находим по формуле (7)

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

г) Графики интегральной (рис. 26.3) и дифференциальной (рис. 26.4) функций

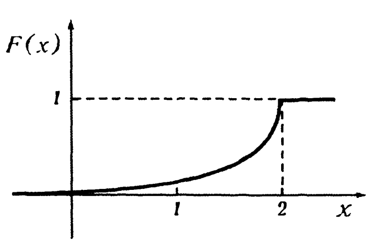


Рис. 26.3

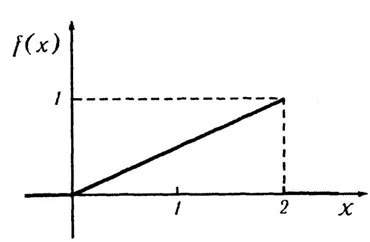


Рис. 26.4

7.3. Случайная величина **задана** интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0;\\ 1-\cos x & при \;\; 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1 & при \;\; x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию (плотность вероятности); б) математическое ожидание и дисперсию X ; в) построить графики интегральной и дифференциальной функции.

Решение. а) Дифференциальную функцию находим по формуле (1)

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0;\\ \sin x & при \;\; 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0 & при \;\; x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б) Математическое ожидание и дисперсию находим по формулам (5), (6)

$$M(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin dx=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

$$D(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx-1=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx-1=$$

$$=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-1=\pi+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-1=\pi-3.$$

в) Графики интегральной (рис. 26.5) и дифференциальной (рис. 26.6) функций имеют вид

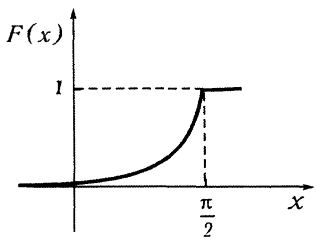


Рис. 26.5

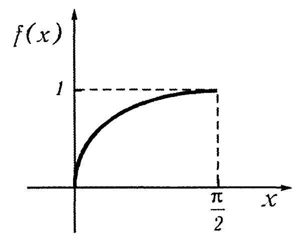


Рис. 26.6

7.4. Найти моду и медиану, если случайная величина задана дифференциальной функцией распределения: а) $f(x) = \cos x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, вне этого интервала $f(x) = 0$; б) $f(x) = x^2 - 4x - 3$ в интервале $(1; 3)$, вне этого интервала $f(x) = 0$.

Решение. а) Поскольку функция $f(x) = \cos x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ не имеет максимума, то X моды не имеет.

Из определения медианы (8) имеем, что

$$P(X < M_e) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку возможные значения X положительны, то запишем это равенство в виде $P(0 < X < M_e) = \frac{1}{2}$ или $\int_0^{M_e} \cos x\, dx = = \sin x \Big|_0^{M_e} = \sin M_e = \frac{1}{2}$. Таким образом: $M_e = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Запишем дифференциальную функцию в виде $y = (x-2)^2 - 7$. Отсюда видно, что дифференциальная функция достигает максимума при $x = 2$, следовательно $M_0 = 2$.

Поскольку кривая распределения представляет параболу, то она симметрична относительно прямой $x = 2$, следовательно, $M_e = 2$.

7.5. Случайная величина X **задана** дифференциальной функцией $f(x) = 4x$ в интервале $(0, \frac{1}{2})$, вне этого интервала

$f(x)=0$. **Найти** начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. Начальные моменты находим по формуле (10):

$$\nu_1=\int_0^{1/2} x\,4x\,dx=\frac{1}{6};\quad \nu_2=\int_0^{1/2} x^2\,4x\,dx=\frac{1}{16};$$

$$\nu_3=\int_0^{1/2} x^3\,4x\,dx=\frac{1}{40};\quad \nu_4=\int_0^{1/2} x^4\,4x\,dx=\frac{1}{96}.$$

Центральные моменты выражаются через начальные по формулам ((5) п.5):

$$\mu_1=0;\quad \mu_2=\nu_2-\nu_1=0,0347;\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3=0,003;$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4=0,00185.$$

26.8. Функция распределения вероятностей случайных величин

1°. Случайная величина имеет нормальное распределение, если плотность ее вероятности определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\tag{1}$$

где a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение. Если случайная величина имеет нормальное распределение с плотностью $f(x)$, то вероятность попадания ее в заданный интервал определяется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right].\tag{2}$$

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше некоторого $\varepsilon>0$, определяется по формуле

$$P(|X-a|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (3)$$

2°. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины называется *равномерным* на интервале (a,b), если плотность распределения на этом интервале сохраняет постоянное значение, равное $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, а вне интервала $f(x)=0$.

3°. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется *показательным,* если плотность распределения определяется функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0,\end{cases} \quad (4)$$

где λ — постоянная положительная величина.

Интегральная функция показательного распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0.\end{cases} \quad (5)$$

Если случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал (a,b) определяется по формуле

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \quad (6)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, соответственно, равны

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma=\frac{1}{\lambda}. \quad (7)$$

Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, интегральная функция которого имеет вид

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\quad (\lambda>0), \quad (8)$$

где λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени), t — длительность времени безотказной работы элемента.

Вероятность отказа элемента за время длительностью t определяется по формуле

$$P(T < t) = 1 - R(t), \tag{9}$$

где $R(t) = e^{-\lambda t}$ — функция надежности, определяющая вероятность безотказной работы элемента.

4°. Оценка отклонения распределения от нормального определяется асимметрией и эксцессом.

Асимметрия определяется отношением

$$\alpha = \mu_3 / \sigma^3.$$

Если асимметрия положительна, то «длинная часть» кривой расположена правее моды (рис. 26.7); если отрицательна — левее моды.

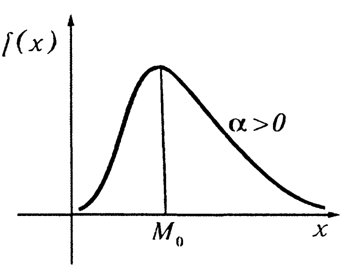


Рис. 26.7

Эксцесс определяется по формуле

$$\varepsilon = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

и характеризует степень крутизны кривой распределения. Если $\varepsilon > 0$, то кривая имеет более высокую вершину, чем нормальное распределение, если $\varepsilon < 0$ — более низкую.

Для нормального распределения $\alpha = 0,4; \quad \varepsilon = 0.$

8.1. Найти вероятность попадания в заданный интервал (α, β) нормально распределенной случайной величины X, если известны ее математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение:

а) $\alpha = 6$; $\beta = 10$; $a = 2$; $\sigma = 4$;

б) $\alpha=3$; $\beta=9$; $a=8$; $\sigma=1$.

Решение. а) Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал определяется по формуле (2)

$$P(6 < X < 10) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{10-2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{6-2}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(1)].$$

По таблице значений функций Лапласа

$$P(6 < X < 10) = \frac{1}{2}(0,95450 - 0,68269) = 0,135905.$$

б) По формуле (2) имеем

$$P(3 < X < 9) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{9-8}{1}\right) - \Phi\left(\frac{3-8}{1}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(1) - \Phi(-5)].$$

Так как функция Лапласа нечетная, то $\Phi(-5) = -\Phi(5)$. Нетрудно заметить, что $\Phi(5)$ в таблице нет, а ее значение приблизительно равно 1. Отсюда

$$P(3 < X < 9) = \frac{1}{2}(0,68269 + 1) = 0,841345.$$

8.2. Найти вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше 0,2, если среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4.

Решение. По условию $\varepsilon = 0,2$; $\sigma = 0,4$. Воспользуемся формулой (3)

$$P(|X - a| < 0,2) = \Phi\left(\frac{0,2}{0,4}\right) = \Phi(0,5) = 0,382923$$

8.3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (a,b).

Решение. Математическое ожидание случайной величины определяется по формуле

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx.$$

Поскольку равномерно распределенная случайная величина имеет плотность, равную $f(x)=\frac{1}{b-a}$, то

$$M(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсию определяем по формуле

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-(M(X))^2.$$

Подставляя сюда

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\qquad M(X)=\frac{a+b}{2}$$

и интегрируя, получим

$$D(X)=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение определяется по формуле $\sigma=\sqrt{D(X)}$ и равно $\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

8.4. Интервал движения маршрутного автобуса 8 мин. **Найти** вероятность того, что пассажир, подошедший к автобусу, будет ожидать автобус менее 6 мин.

Решение. Поскольку распределение вероятностей равномерно, то плотность распределения имеет постоянное значение, равное $f(x)=\frac{1}{8-0}=\frac{1}{8}$.

Вероятность того, что пассажир будет ожидать менее 6 мин, равна

$$P(2 < X < 8) = \int_2^8 f(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

8.5. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному дифференциальной функцией $f(x) = 5e^{-5x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. **Найти** вероятность попадания X в интервал (1,5; 3,5).

Решение. Воспользуемся формулой (6). Учитывая, что по условию задачи $\lambda = 5$; $a = 1,5$ и $b = 3,5$, получим

$$P(1,5 < X < 3,5) = e^{-5\cdot 1,5} - e^{-5\cdot 3,5} = e^{-7,5} - e^{-17,5} = 0,00055.$$

8.6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного интегральной функцией

$$F(x) = 1 - e^{-0,2x} \quad (x \geq 0).$$

Решение. По условию задачи $\lambda = 0,2$. Воспользуемся теперь формулами (7). Окончательно получим

$$M(X) = \frac{1}{0,2} = 5; \quad D(X) = \frac{1}{0,2^2} = 25; \quad \sigma = \frac{1}{0,2} = 5.$$

8.7. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное **распределение** $F(t) = 1 - e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. **Найти** вероятность того, что за время длительностью $t = 10$ *час*: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Поскольку интегральная функция $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t, то, подставив $t = 10$ в интегральную функцию, получим

$$P(T < 10) = 1 - e^{-0,02\cdot 10} = 1 - e^{-0,2} = 0,18.$$

б) Вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t определяется функцией надежности

$$R(10) = e^{-0,02\cdot10} = e^{-0,2} = 0,82.$$

8.8. Производится испытание двух элементов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,3t}$. **Найти** вероятность того, что за время длительностью $t = 8$ *час*: а) откажут оба элемента; б) оба элемента не откажут; в) откажет только один элемент; г) откажет хотя бы один элемент.

Решение. а) Вероятность отказа первого элемента по формуле (9) равна

$$P_1 = 1 - e^{-0,1\cdot8} = 1 - e^{-0,8} = 0,55.$$

Вероятность отказа второго элемента

$$P_2 = 1 - e^{-0,3\cdot8} = 1 - e^{-2,4} = 0,01.$$

Вероятность того, что откажет и первый, и второй элемент по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $P_1 \cdot P_2 = 0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

б) Вероятность безотказной работы первого элемента $q_1 = R_1(8) = e^{-0,1\cdot8} = 0,45$. Вероятность безотказной работы второго элемента $q_2 = R_2(8) = e^{-0,3\cdot8} = 0,09$. Вероятность, что оба элемента не откажут, равна $q_1 \cdot q_2 = 0,45 \cdot 0,09 = 0,04$.

в) Вероятность того, что откажет только один элемент (либо первый, либо второй) по теореме сложения вероятностей равна $P_1 \cdot q_2 + P_2 \cdot q_1 = 0,0495 + 0,0045 = 0,054$.

г) Вероятность того, что откажет хотя бы один элемент, равна $P = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,04 = 0,96$.

8.9. **Найти** асимметрию и эксцесс показательного распределения.

Решение. Находим сначала начальные моменты: $\nu_1 = M(X) = \frac{1}{\lambda}$ по формуле (7); $\nu_2 = \lambda\int\limits_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx$, интегрируя дважды по частям

$$\begin{vmatrix} x^2 = u & e^{-\lambda x}dx = d\text{v} \\ du = 2xdx & \text{v} = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{vmatrix}$$

получим $\nu_2 = \frac{2}{\lambda^2}$; $\nu_3 = \lambda\int\limits_0^\infty x^3 e^{-\lambda x}dx$, интегрируя трижды по частям, будем иметь $\nu_3 = \frac{6}{\lambda^3}$; $\nu_4 = \lambda\int\limits_0^\infty x^4 e^{-\lambda x}dx$, интегрируя четыре раза по частям, получим $\nu_4 = \frac{24}{\lambda^4}$.

Центральные моменты третьего и четвертого порядков находим по формулам ((5) п.5):

$$\mu_3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{1}{\lambda}\frac{2}{\lambda^2} + 2\frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3};$$

$$\mu_4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\frac{6}{\lambda^3}\frac{1}{\lambda} + 6\frac{2}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4}.$$

Среднее квадратическое отклонение по формулам (7) равно $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. Таким образом, асимметрия равна $\alpha = \mu_3/\sigma^3 = 2$, а эксцесс равен $\varepsilon = \mu_4/\sigma^4 - 3 = 9 - 3 = 6$.

26.9. Функции случайных аргументов

1°. Если каждому значению одной случайной величины X ставится в соответствии одно значение другой случайной величины Y, то Y называют функцией одного случайного аргумента

$$Y = \varphi(X),$$

если же случайным величинам X,Y соответствует одно значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов

$$Z=\varphi(X,Y).$$

При составлении распределения функций по известному распределению дискретного аргумента пользуются следующими правилами:

а) если функция Y случайного аргумента X известна $Y=\varphi(X)$, то возможные значения Y находят из равенства $y_i=\varphi(x_i)$;

б) вероятности соответствующих значений X и Y монотонной функции Y одного аргумента X между собой равны, т. е. $P(X=x_i)=P(Y=y_i)$;

в) если же функция Y не монотонная и среди Y есть значения, равные между собой, то их вероятности следует складывать. Данное правило справедливо и для функции двух случайных аргументов. Если аргумент X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая, монотонная функция, имеющая обратную функцию $x=\Psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле

$$g(y)=f(\Psi(y))\left|\Psi'(y)\right|. \tag{1}$$

Если в интервале возможных значений X функция $y=$ $=\varphi(x)$ не монотонна, то этот интервал разбивается на интервалы, где $\varphi(x)$ монотонна и $g(x)$ представляется в виде суммы $g(y)=\sum_i g_i(y)$. Так для функции $\varphi(x)$ монотонной в двух интервалах имеем

$$g(y)=f(\Psi_1(y))\cdot\left|\Psi'_1(y)\right|+f(\Psi_2(y))\cdot\left|\Psi'_2(y)\right|, \tag{2}$$

где $\Psi_1(y)$ и $\Psi'_1(y)$ — обратные функции на соответствующих интервалах.

2°. Математическое ожидание функции одного дискретного случайного аргумента находится по формуле

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i \tag{3}$$

Если аргумент непрерывная случайная величина, то математическое ожидание

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx, \tag{4}$$

где $f(x)$ — плотность распределения, а дисперсия

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2g(y)dy-(M(Y))^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x))^2f(x)dx-(M(Y))^2. \tag{5}$$

3°. Пусть X,Y — дискретные независимые случайные величины. Чтобы найти распределение функции $Z=X+Y$ (или XY), следует найти все возможные значения Z. Для этого необходимо сложить (умножить) каждое возможное значение X со всеми возможными значениями Y, вероятности же найденных возможных значений Z равны произведениям соответствующих вероятностей значений X и Y.

Плотность распределения $g(Z)$ суммы $Z=X+Y$ (при условии, что плотность хотя бы одного из аргументов задана на интервале $(-\infty,\infty)$ одной формулой) определяется по формуле

$$g(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \tag{6}$$

или

$$g(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy, \tag{7}$$

где f_1,f_2 — плотность распределения аргументов.

Вероятность попадания случайной точки (x,y) в область S определяется интегральной функцией распределения

$$P(X+Y<Z)=G(Z) \qquad (8)$$

и равна двойному интегралу по всей этой области от произведения дифференциальных функций

$$P((X,Y)\subset S)=G(Z)=\iint_S f_1(x)f_2(x)dx\,dy, \qquad (9)$$

Производная от интегральной функции равна дифференциальной функции $g(z)=G'(Z)$ величины $Z=X+Y$.

9.1. Найти закон распределения случайной величины $Y=X^2$, если дискретная случайная величина X задана законом распрсдслсния

а)

x_i	2	3	4
P_i	0,1	0,3	0,6

б)

x_i	–2	2	3
P_i	0,2	0,3	0,5

Решение. а) Находим значения случайной величины Y: $y_1=4;\ y_2=9;\ y_3=16$. Отсюда распределение Y имеет вид

y_i	4	9	16
P_i	0,1	0,3	0,6

б) Поскольку несовместным событиям $x_1=-2;\ x_2=2$ соответствует одно значение случайной величины $y_1=4$, то его вероятность равна сумме вероятностей случайных величин x_1 и x_2. Отсюда распределение Y примет вид

y_i	4	9
P_i	0,5	0,5

9.2. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы законом распределения

x_i	1	2	3
P_i	0,2	0,3	0,5

y_i	2	4
P_i	0,3	0,7

Найти законы распределения функции: а) $Z = X + Y$; б) $Z = XY$.

Решение. а) Возможные значения случайной величины z_i есть суммы каждого значения x_i со всеми случайными значениями y_i

$$z_1 = 1 + 2 = 3;\ z_2 = 1 + 4 = 5;\ z_3 = 2 + 2 = 4;$$

$$z_4 = 2 + 4 = 6;\ z_5 = 3 + 2 = 5;\ z_6 = 3 + 4 = 7.$$

Поскольку случайные величины x_i, y_i независимы, то вероятность их совместного наступления находится по теореме умножения вероятностей

$$P_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06;\ P_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14;\ P_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$$

$$P_4 = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21;\ P_5 = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15;\ P_6 = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35.$$

Складывая вероятности несовместных событий z_2 и z_5, запишем искомое распределение

z_i	3	4	5	6	7
P_i	0,06	0,09	0,29	0,21	0,35

б) Возможные значения случайных величин z_i есть произведения каждого значения x_i на каждое y_i

$$z_1 = 1 \cdot 2 = 2;\ z_2 = 1 \cdot 4 = 4;\ z_3 = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$z_4 = 2 \cdot 4 = 8;\ z_5 = 3 \cdot 2 = 6;\ z_6 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Поскольку величины x_i, y_i независимы, то вероятности их совместного наступления находятся по теореме умножения вероятностей

$P_1 = 0{,}06;\ P_2 = 0{,}14;\ P_3 = 0{,}09;\ P_4 = 0{,}21;\ P_5 = 0{,}15;\ P_6 = 0{,}35.$

Складывая вероятности несовместных событий z_2 и z_3, запишем искомое распределение

z_i	2	4	6	8	12
P_i	0,06	0,23	0,15	0,21	0,35

9.3. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. **Найти** дифференциальную функцию $g(y)$ случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. Поскольку случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, то дифференциальная функция случайной величины X будет

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}.$$

Функция $y = \sin x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ монотонно возрастает, следовательно, имеет обратную функцию $\Psi(y) = x = \arcsin y$. Найдем производную от обратной функции

$$\Psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Дифференциальная функция $g(y)$ согласно формуле (1) имеет вид

$$g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}.$$

Так как $y = \sin x$, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $0 < y < 1$. Вне этого интервала $g(y) = 0$.

Проверка.

$$\int_0^1 g(y)dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1 = 1.$$

9.4. Задана дифференциальная функция

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Найти дифференциальную функцию $g(y)$ случайной величины $Y = 2X^2$.

Решение. Так как в интервале $(-\infty,\infty)$ функция $y = 2x^2$ не монотонна, то разобьем этот интервал на два интервала: $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$, в которых заданная функция монотонна. Обратные функции в этих интервалах будут $\Psi_1(y) = -\sqrt{\frac{y}{2}}$ и $\Psi_2(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$, соответственно.

Находя производные $\Psi'_1(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2y}}$, $\Psi'_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y}}$ и учитывая, что $f(\Psi_1(y)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{4\sigma^2}}$ и $f(\Psi_2(y)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{4\sigma^2}}$, по формуле (2) окончательно будем иметь

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{4\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2y}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{y}{4\sigma^2}}.$$

Поскольку $y = 2x^2$, где $-\infty < x < \infty$, то $0 < y < \infty$ и вне этого интервала $g(y) = 0$.

Проверка.

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{4\sigma^2}}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} y = t^2 \\ dy = 2tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

Здесь при вычислении использован интеграл Пуассона $\int_0^\infty e^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

9.5. Дискретная случайная величина X **задана** распределением

x_i	1	2	3
P_i	0.2	0.3	0.5

Найти математическое ожидание $Y = X^3 + 1$.

Решение. Найдем значения случайной величины $y_i = \varphi_i(x_i)$: $y_1 = 1+1 = 2$; $y_2 = 8+1 = 9$; $y_3 = 27+1 = 28$.

По формуле (3) математическое ожидание равно

$$M(Y) = 2\cdot 0,2 + 9\cdot 0,3 + 28\cdot 0,5 = 17,1.$$

9.6. Найти математическое ожидание и дисперсию функции $Y = X^2$, если $f(x) = cos\,x$ плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0,\pi)$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Решение. Из условия $\varphi(x) = x^2$. Математическое ожидание по формуле (4) равно

$$M(Y) = \int_0^\infty x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x\,dx =$$

$$= 2x\cos x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos x\,dx = -2\pi.$$

Дисперсию находим по формуле (5)

$$D(Y) = \int_0^\pi (\varphi(x))^2 f(x)dx - (M(Y))^2 = \int_0^\pi x^4 \cos x\,dx - 4\pi^2.$$

Интегрируя четырежды по частям, получим

$$D(Y) = -4\pi(\pi^2 - 6) - 4\pi^2 = -4\pi(\pi^2 + \pi - 6).$$

9.7. Независимые случайные величины X и Y заданы дифференциальными функциями:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2} \qquad (0 \le x < \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{3}e^{-y/3} \qquad (0 \le y < \infty).$$

Найти дифференциальную функцию случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Поскольку возможные значения аргументов x, y неотрицательны, то по формуле (6) имеем

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z - x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^z e^{-x/2}\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^z e^{-\frac{z}{3}} e^{-\frac{x}{6}}\,dx = -e^{z/3}e^{x/6}\Big|_0^z = e^{-z/3}(1 - e^{-z/6}).$$

Здесь $z \ge 0$, т.к. возможные значения X и Y неотрицательны. Вне интервала $(0, \infty)$ дифференциальная функция $g(z) = 0$.

9.8. Заданы дифференциальные функции равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y:

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \quad (0 \le x \le 3); \quad f_2(y) = \frac{1}{3} \quad (0 \le y \le 3).$$

Вне заданных интервалов функции равны нулю. Найти интегральную и дифференциальную функции случайной величины $Z = X + Y$. **Построить** график дифференциальной функции $g(z)$.

Решение. Поскольку возможные значения X определяются неравенством $0 < X < 3$, а Y — неравенством $0 < Y < 3$, то возможные случайные точки (x, y) расположены в квадрате $OABC$ (рис. 26.8), сторона которого равна 3 единицам.

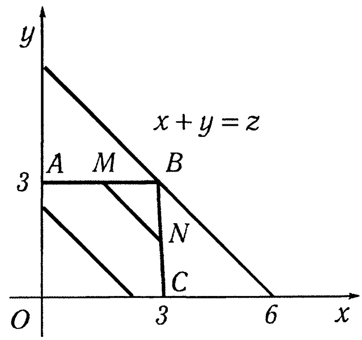


Рис. 26.8

По определению интегральной функции (8) неравенству $x+y<z$ удовлетворяют те точки (x,y) плоскости, которые лежат в квадрате ниже прямой $x+y=z$, отсекающий на осях координат Ox и Oy отрезки, равные z.

Так как возможные значения случайных величин X и Y независимы, то на основании формулы (9) имеем

$$G(z)=\iint\limits_S f_1(x)f_2(x)\,dx\,dy=\frac{1}{9}\iint\limits_S dx\,dy,$$

где S — площадь квадрата $OABC$, лежащая ниже прямой $x+y=z$. Если $0<z<3$, то прямая отсекает от квадрата прямоугольник площадью $z^2/2$ и интегральная функция равна

$$G(z)=\frac{1}{9}\frac{z^2}{2}=\frac{z^2}{18}.$$

При $3<z<6$ площадь фигуры $OAMNC$ найдем как разность между площадью квадрата $z^2=9$ и площадью треугольника MBN, равной $(6-z)^2/2$. Таким образом,

$$G(z)=\tfrac{1}{9}(9-(6-z)^2/2)=1-\frac{(6-z)^2}{18}.$$

Очевидно, что если $z \le 0$, то $S = 0$ и $G(z) = 0$; если $z > 6$, то $G(z) = \frac{1}{9} S_{OABC} = \frac{1}{9} 9 = 1$. Окончательно получим

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad z \le 0; \\ z^2/18 & \textit{при} \quad 0 < z < 3; \\ 1-(6-z)^2/18 & \textit{при} \quad 3 < z < 6; \\ 1 & \textit{при} \quad z > 4. \end{cases}$$

Дифференциальная функция примет вид

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad z \le 0; \\ z/9 & \textit{при} \quad 0 < z < 3; \\ \frac{1}{3}(2-\frac{z}{3}) & \textit{при} \quad 3 < z < 6; \\ 0 & \textit{при} \quad z > 4. \end{cases}$$

График дифференциальной функции $g(z)$ показан на рис. 26.9.

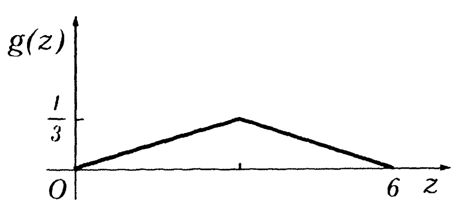


Рис. 26.9

26.10. Системы случайных величин

1°. В ряде случаев результат опыта или некоторое событие описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами $X, Y, Z, \ldots$, образующими систему.

Систему двух случайных величин будем обозначать (X,Y), где каждая из величин X и Y называется составляющей. Геометрически система двух случайных величин представляется случайной точкой на плоскости.

Трехмерную случайную величину геометрически можно интерпретировать как точку $M(X,Y,Z)$ в трехмерном пространстве или как вектор $\overrightarrow{OM}$.

Аналогично определяется и n-мерная случайная величина.

2°. Законом распределения вероятностей дискретной двумерной величины (X,Y) называют соответствие возможных значений этой величины (x_i,y_j) и их вероятностей $P(x_i,y_j)$ $(i=1,2,...,n; j=1,2,...,m)$, при этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин удобно задавать в виде таблицы

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_m
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
y_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

причем $x_1 < x_2 < ... < x_m$; $y_1 < y_2 < ... < y_n$.

3°. Функцией распределения двумерной случайной величины (дискретной или непрерывной) называют функцию

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y). \quad (1)$$

Свойства функции распределения:

1) функция распределения удовлетворяет неравенству $0 \le F(x,y) \le 1$;

2) функция $F(x,y)$ — неубывающая функция по каждому

аргументу, т. е.: $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$, если $x_2 > x_1$; $F(x,y_2) \geq$ $\geq F(x,y_1)$, если $y_2 > y_1$.

3) функция $F(x,y)$ удовлетворяет предельным соотношениям:

$$F(-\infty,y)=0, \quad F(x,-\infty)=0, \quad F(-\infty,-\infty)=0, \quad F(\infty,\infty)=1.$$

4) при $y=\infty$ функция распределения системы является функцией распределения составляющей : $F(x,\infty)=F_1(x)$, а при $x=\infty$, соответственно, функцией распределения составляющей Y: $F(\infty,y)=F_2(y)$.

4°. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник находится по формуле

$$P(x_1 \leq X < x_2,\ y_1 \leq Y < y_2) =$$
$$= \left[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)\right]-\left[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\right], \tag{2}$$

где $X=x_1$; $X=x_2$; $Y=y_1$; $Y=y_2$.

5°. Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ непрерывной двумерной случайной величины называют вторую частную смешанную производную от функции распределения

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}. \tag{3}$$

Функция распределения находится по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Свойства функции плотности вероятности:

1) $f(x,y)\geq 0$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$.

Вероятность попадания случайной (X,Y) точки в область S определяется по формуле

$$P((X,Y)\subset S)=\iint_S f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

Если известна плотность совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ системы двух случайных величин, то плотности распределения каждой из составляющих X и Y находятся по формулам

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy; \tag{6}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx. \tag{7}$$

10.1. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной в виде таблицы с двойным входом

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,25	0,2
y_2	0,3	0,04	0,11

Решение. Поскольку вероятности несовместны, то для того чтобы найти вероятность $P(X=x_i)$, надо просуммировать вероятности i-го столбца: $P(x_1)=0,4$; $P(x_2)=0,29$; $P(x_3)=0,31$. Закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
P_i	0,4	0,29	0,31

Проверка: 0,4 + 0,29 + 0,31 = 1.

Сложив вероятности по строкам, найдем вероятности возможных значений Y: $P(y_1)=0,55$; $P(y_2)=0,45$.

Закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
P	0,55	0,45

Проверка: 0,55 + 0,45 = 1.

10.2. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X < 2$ и при этом составляющая Y примет значение $Y < 4$, если функция распределения имеет вид

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{xy}{8}.$$

Решение. Положив в формуле (1) $x = 2$, $y = 4$, получим искомую вероятность

$$P(X < 2, Y < 4) = F(2,4) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot 4}{8} = \frac{1}{4}.$$

10.3. Найти вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $y_1 = \frac{\pi}{6}$; $y_2 = \frac{\pi}{4}$, если известна функция распределения

$$F(x,y) = \sin x \sin y \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2};\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Положив $x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $y_1 = \frac{\pi}{6}$; $y_2 = \frac{\pi}{4}$ в формуле (2), находим

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{6} < Y < \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \left[F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}1.$$

10.4. Найти плотность совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ системы случайных величин по известной функции распределения $F(x,y)=\cos x\cos y$ и вероятность попадания точки в прямоугольник $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. По формуле (3) имеем

$$f(x,y)=\frac{\partial^2(\cos x\cos y)}{\partial x\,\partial y}=\sin x\sin y.$$

Зная плотность распределения, вероятность попадания точки в прямоугольник определяется по формуле (5)

$$P=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\sin y\,dx\,dy=-\int_0^{\pi/2}\sin x\cos y\Big|_0^{\pi/2}dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

10.5. Найти функцию распределения двумерной случайной величины по известной плотности совместного распределения $f(x,y)=C\sin(x+y)$ внутри прямоугольника $x=0;\ x=\frac{\pi}{2};$ $y=0;\ y=\frac{\pi}{2};$ и $f(x,y)=0$ вне прямоугольника.

Решение. Учитывая, что x и y изменяются от 0 до $\frac{\pi}{2}$, будем иметь

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}C\sin(x+y)\,dx\,dy=1.$$

Интегрируя сначала по y, а затем по x, получим

$$-C\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx=-C\int_0^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos x\right)dx=$$

$$=C\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)\,dx=C(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=C(1+1)=1.$$

Откуда $C=\frac{1}{2}$.

Функция распределения по формуле (4) будет

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y \sin(x+y)\,dx\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^x \cos(x+y)\Big|_0^x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^x(\cos(x+y)-\cos x)dy=-\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin x)\Big|_0^x=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)).$$

$$\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

10.6. Внутри прямоугольника $x=4$, $x=6$, $y=10$, $y=15$, функция $f(x,y)$ сохраняет постоянное значение и $f(x,y)=0$ вне этого прямоугольника. **Найти** плотность совместного распределения и функцию распределения системы.

Решение. Поскольку функция $f(x,y)$ сохраняет постоянное значение внутри прямоугольника, то обозначая ее за C, будем иметь

$$\int_4^6\int_{10}^{15} C\,dx\,dy=1,$$

откуда

$$5C\int_4^6 dx=2\cdot5\cdot C=1 \quad \text{и} \quad C=0{,}1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}1 & \textit{внутри прямоугольника}\\ 0 & \textit{вне прямоугольника.}\end{cases}$$

Функцию распределения находим по формуле (4)

$$F(x,y)=\int_4^x\int_{10}^y 0{,}1\,dx\,dy=0{,}1\int_4^x(y-10)dx=0{,}1(y-10)(x-4).$$

10.7. Плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \textit{при}\ \ x^2+y^2<1,\\ 0 & \textit{при}\ \ x^2+y^2\ge1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения составляющих X и Y.

Решение. Плотность распределения составляющей X находится по формуле (6)

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2};$$

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2} & при\ |x|<1,\\ 0 & при\ |x|\geq 1.\end{cases}$$

Плотность распределения составляющей Y находим по формуле (7)

$$f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-y^2};$$

$$f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-y^2} & при\ |y|<1,\\ 0 & при\ |y|\geq 1.\end{cases}$$

26.11. Условные законы распределения вероятностей составляющих системы

1°. Условный закон распределения составляющей X системы дискретных случайных величин в предположении, что событие $Y=y_j$ произошло, находится по формуле

$$P(x_i|y_i)=\frac{P(x_i,y_i)}{P(y_i)}, \qquad (1)$$

здесь j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X.

Условный закон распределения составляющей Y:

$$P(y_i|x_i)=\frac{P(x_i,y_i)}{P(x_i)}. \qquad (2)$$

2°. Для непрерывных случайных величин X, Y условная дифференциальная функция $\varphi(x|y)$ составляющей X при заданном значении $Y=y$ определяется отношением

$$\varphi(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \tag{3}$$

где $f_2(y)$ — дифференциальная функция составляющей Y непрерывной двумерной случайной величины (см.(7) п.10).

Аналогично, условная дифференциальная функция составляющей Y равна

$$\varphi(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \tag{4}$$

3°. Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X=x$ называется сумма произведений возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y|X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_i P(y_i|x). \tag{5}$$

Для непрерывных величин

$$M(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y|x)dy. \tag{6}$$

Аналогично определяется математическое ожидание случайной величины X на $Y=y$.

11.1. Задана двумерная дискретная случайная величина

$Y \backslash X$	$x_1=0,1$	$x_2=0,3$	$x_3=0,6$
$y_1=2$	0,05	0,25	0,30
$y_2=5$	0,20	0,14	0,06

Найти: а) условный закон распределения составляющей X, при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=2$;

б) условный закон распределения Y, при условии, что $X = x_2 = 0,3$.

Решение. а) Условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 2$, находим по формуле (1)

$$P(x_i | y_1) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)},$$

где $P(y_1)$ равна сумме вероятностей первой строки

$$P(y_1) = P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1) + P(x_3, y_1) = 0,05 + 0,25 + 0,30 = 0,6.$$

$$P(x_1 | y_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,05}{0,6} = \frac{1}{12};$$

$$P(x_2 | y_1) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,25}{0,6} = \frac{5}{12};$$

$$P(x_3 | y_1) = \frac{P(x_3, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}.$$

Искомый условный закон распределения X имеет вид

X	0,1	0,3	0,6
$P(x_i \| y_i)$	1/12	5/12	1/2

Проверка: $\sum_{i=1}^{3} P(x_i \,|\, y_1) = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = 1.$

б) Условные вероятности значений Y, при условии $x_2 = 0,3$, находим по формуле (2)

$$P(y_i | x_2) = \frac{P(x_2, y_j)}{P(x_2)},$$

где

$$P(x_2) = P(x_2, y_1) + P(x_2, y_2) = 0,25 + 0,14 = 0,39.$$

$$P(y_1 | x_2) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(x_2)} = \frac{0,25}{0,39} = \frac{25}{39};$$

$$P(y_2|x_2)=\frac{P(x_2,y_2)}{P(x_2)}=\frac{0,14}{0,39}=\frac{14}{39}.$$

Таким образом, условный закон распределения

Y	2	5
$P(y_i\|x_2)$	25/39	14/39

Проверка: $\sum_{j=1}^{2} P(y_j\Big|x_2)=\frac{25}{39}+\frac{24}{39}=1.$

11.2. Задана дифференциальная функция непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y)=e^{-(x^2+2xy+4y^2)}$. **Найти** условные дифференциальные функции составляющих.

Решение. Найдем сначала дифференциальную функцию составляющей X

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dy=e^{-\frac{3x^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x^2}{4}+2xy+4y^2)}dy=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2}d(\frac{x}{2}+2y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{3}{4}x^2}.$$

При вычислении здесь использован интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$. Дифференциальная функция составляющей Y равна

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dx=e^{-3y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y)=\sqrt{\pi}e^{-3y^2}.$$

Подставляя найденные функции в формулы (3), (4), окончательно получим:

$$\varphi(x|y)=\frac{e^{-(x^2+2xy+y^2)}}{\sqrt{\pi}e^{-3y^2}}=\frac{e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{\pi}};$$

$$\varphi(y|x)=\frac{e^{-(x^2+2xy+y^2)}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{3}{4}x^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x}{2}+2y)^2}.$$

11.3. Дискретная двумерная случайная величина **задана** таблицей распределения

$Y \backslash X$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 6$
$y_1 = 3$	0,10	0,16	0,04
$y_2 = 4$	0,15	0,25	0,30

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 2$.

Решение. Найдем вероятность $P(x_1)$, для чего сложим вероятности в первом столбце $P(x_1) = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$.

Условные вероятности возможных значений Y, при условии $x_1 = 2$, находим по формуле (2)

$$P(y_j | x_1) = \frac{P(x_1, y_j)}{P(x_1)};$$

$$P(y_1 | x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4;$$

$$P(y_2 | x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6.$$

Искомое условное математическое ожидание находим по формуле (5)

$$M(Y | x_1 = 2) = \sum_{j=1}^{2} y_j P(y_j | x_1) =$$

$$= y_1 P(y_1 | x_1) + y_2 P(y_2 | x_1) = 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}6.$$

26.12. Числовые характеристики системы двух случайных величин

1°. Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, вычисляются по формулам

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij};$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j\,p_{ij}. \qquad (1)$$

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяют по формулам

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x_i-M(X))^2;$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(y_j-M(Y))^2, \qquad (2)$$

а средние квадратические отклонения по формулам

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}, \qquad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}. \qquad (3)$$

2°. В случае непрерывных случайных величин математические ожидания равны

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)\,dx\,dy \qquad (4)$$

или, зная дифференциальные функции составляющих

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x)\,dx;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_2(y)\,dy. \qquad (5)$$

Дисперсии непрерывных случайных величин X и Y определяются по формулам

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x,y)\,dx\,dy;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-M(Y))^2 f(x,y)\,dx\,dy \qquad (6)$$

или через дифференциальные функции составляющих по формулам

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_1(x)\,dx-(M(X))^2;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-M(Y))^2 f_2(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f_2(y)\,dy-(M(Y))^2 \qquad (7)$$

Для вычисления дисперсий можно также использовать формулы

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2. \qquad (8)$$

3°. *Корреляционным моментом* μ_{xy} случайных величин называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин. Для вычисления μ_{xy} дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M(X))(y_i-M(Y))p_{ij}, \qquad (9)$$

для непрерывных

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (10)$$

Корреляционный момент может быть найден по формуле

$$M_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y), \qquad (11)$$

где для дискретных случайных величин X и Y

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij},$$

а для непрерывных

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f(x,y)\, dx\, dy.$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми,* если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая величина.

Характеристикой линейной связи $Y = aX + b$ между случайными величинами X и $У$ служит *коэффициент корреляции:*

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{12}$$

где $\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$

Если случайные величины независимы, то $r_{xy} = 0$. Коэффициент корреляции удовлетворяет условию $|r_{xy}| \le 1$, причем, чем ближе $|r_{xy}|$ к единице, тем связь сильнее.

Если корреляционный момент отличен от нуля, то случайные величины X и Y называются коррелированными. Если $\mu_{xy} = 0$, то X и Y называются некоррелированными случайными величинами.

4°. Пусть в результате n испытаний случайные величины X и Y принимают значения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Если n достаточно велико и $|r_{xy}|\sqrt{n-1} \ge 3$, то вероятно существует связь между случайными величинами X и Y.

Линейное приближение Y от X дается формулой линейной регрессии $Y \simeq g(X) = aX + b$, где a, b — коэффициенты, подлежащие определению. Наилучшее приближение, в смысле метода наименьших квадратов, дает функция $g(X)$, которая называется *среднеквадратической регрессией* Y на X.

Прямая линия среднеквадратической регрессии Y на X имеет вид

$$g(X) - m_y = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x), \tag{13}$$

а X на Y

$$g(Y)-m_x=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-m_y), \tag{14}$$

где $m_x=M(X),\quad m_y=M(Y),\quad X\simeq g(Y)$.

Коэффициент $b(Y/X)=r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ — называется коэффициентом регрессии Y на X, а $b(X/Y)=r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ — коэффициентом регрессии X на Y.

Прямые регрессии (13), (14) проходят через точку (m_x, m_y), которая называется центром рассеивания системы случайных величин X и Y.

12.1. Двумерная дискретная **величина задана** таблицей распределения

$Y \backslash X$	$x_1=0,1$	$x_2=0,2$	$x_3=0,3$
$y_1=1$	0,04	0,15	0,05
$y_2=2$	0,16	0,05	0,10
$y_3=3$	0,10	0,15	0,20

Найти математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин X и Y.

Решение. Воспользуемся формулами (1), тогда:

$$M(X) = 0,1(0,04+0,16+0,10)+0,2(0,15+0,05+0,15)+$$

$$+0,3(0,05+0,10+0,20) = 0,03+0,07+0,105 = 0,205;$$

$$M(Y) = 1(0,04+0,15+0,05)+2(0,16+0,05+0,10)+$$

$$+3(0,10+0,15+0,20) = 0,24+0,62+1,35 = 2,21.$$

Точка (0,205; 2,21) является центром рассеивания для заданной системы случайных величин.

Составим таблицу отклонений значений случайных величин от их математических ожиданий

$y_j - M(Y)$ \ $x_i - M(X)$	$-0{,}105$	$-0{,}05$	$-0{,}095$
$-1{,}21$	0,04	0,15	0,05
$-0{,}21$	0,16	0,05	0,10
0,79	0,10	0,15	0,20

Дисперсии находим по формулам (2)

$$D(X) = (-0{,}105)^2+(0{,}04+0{,}16+0{,}10)+(-0{,}05)^2(0{,}15+$$

$$+0{,}05+0{,}15)+(0{,}095)^2(0{,}05+0{,}10+0{,}20)=0{,}0082437;$$

$$D(Y) = (-1{,}21)^2(0{,}04+0{,}15+0{,}05)+(-0{,}21)^2(0{,}16+$$

$$+0{,}05+0{,}10)+(0{,}79)^2(0{,}10+0{,}15+0{,}20)=0{,}6459.$$

Средние квадратические отклонения находим по формулам (3)

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}0082437} = 0{,}09079; \quad \sigma_y = \sqrt{0{,}6459} = 0{,}803689.$$

12.2. Закон распределения вероятностей системы двух дискретных случайных величин (X, Y) дан в таблице. **Найти:** а) ряды распределения для X и для Y; б) $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, μ_{xy}, r_{xy}; в) линии регрессии Y на X и X на Y.

Y \ X	1	2	3	$q_j = P(y_j)$
2	0,1	0,3	0,2	0,6
4	0,05	0,2	0,15	0,4
$p_i = P(x_i)$	0,15	0,5	0,35	1

Решение. а) Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений для X, а сложив по строкам, получим вероятности возможных значений для Y.

б) $M(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1\cdot 0{,}15+2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}35=2{,}2;$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{2} y_j q_j = 2\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}4=2{,}8.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}(x_i-M(X))^2 p_i =$$

$$=1{,}2^2\cdot 0{,}15+0{,}2^2\cdot 0{,}5+0{,}8^2\cdot 0{,}35=0{,}46$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{3}(y_j-M(Y))^2 q_j = 0{,}8^2\cdot 0{,}6+1{,}2^2\cdot 0{,}4=0{,}96$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}46}=0{,}6782329$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}96}=0{,}97979.$$

Корреляционный момент находим по формуле (9)

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}=1{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+$$

$$+1{,}2\cdot 1{,}2\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3-0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 0{,}2-$$

$$-0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 1{,}2\cdot 0{,}15=0{,}04.$$

Коэффициент корреляции вычислим по формуле (12)

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=0{,}06.$$

Находим коэффициенты регрессии

в) $b(Y/X)=r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0{,}0577848,\ b(X/Y)=r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=0{,}0276889.$

Таким образом, линия регрессии Y на X принимает вид:

$$y=m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x);$$

$$y=0{,}058x+2{,}67287.$$

а линия регрессии X на Y вид:

$$x = m_x + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y); \quad x = 0{,}0277y + 2{,}12247.$$

12.3. Задана дифференциальная функция непрерывной двумерной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} xye^{-(x^2+y^2)} & \textit{при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \textit{при } x < 0 \textit{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти: $M(X),\ M(Y),\ D(X),\ D(Y)$.

Решение. Математические ожидания составляющих находим по формулам (5). Найдем сначала дифференциальные функции:

$$f(x,y) = \int_0^\infty f(x,y)dy = xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy = \frac{1}{2}xe^{-x^2};$$

$$f_2(y) = ye^{-y^2}\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}ye^{-y^2}.$$

$$M(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x(2xe^{-x^2}dx) =$$

$$= \frac{1}{4}(-xe^{-x^2} + \int_0^\infty e^{-x^2}dx) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}.$$

Здесь, интегрируя по частям, учитывается, что интеграл Пуассона $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Аналогично, $M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^2e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$.

Дисперсию находим по формулам (7)

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2}dx) -$$

$$-\frac{\pi}{64} = \frac{1}{4}(-x^2e^{-x^2} + \int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx) - \frac{\pi}{64} = \frac{1}{4}(1 - \frac{\pi}{16}).$$

Аналогично,

$$D(Y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^3e^{-y^2}dy-\frac{\pi}{64}=\frac{1}{4}(1-\frac{\pi}{16}).$$

12.4. Внутри квадрата $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$ плотность распределения системы двух случайных величин $f(x,y)=$ $=\frac{1}{2}\sin(x+y)$; вне квадрата $f(x,y)=0$.

Найти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, μ_{xy}, r_{xy}.

Решение. Математическое ожидание составляющей X находим по формуле (5)

$$M(X)=\int_0^{\pi/2}x\,f_1(x)dx,$$

где $f_1(x)$ вычисляется по формуле ((5) п.10)

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dx=-\frac{1}{2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos x\right]=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x).$$

Отсюда

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x(\sin x+\cos x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

Аналогично находим математическое ожидание составляющей Y

$$M(Y)=\int_0^{\pi/2}y\,f(y)dy,$$

где

$$f_2(y)=\int_0^{\pi/2}f(x,y)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}(\sin y+\cos y);$$

$$M(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} y(\sin y+\cos y)\,dy=\frac{\pi}{4}.$$

Дисперсии составляющих определяем по формулам (7)

$$D(X)=\int_0^{\pi/2}(x-M(X))^2 f_1(x)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}x^2 f_1(x)dx-[M(X)]^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

$$D(Y)=\int_0^{\pi/2}(y-M(Y))^2 f_2(y)dy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}y^2 f_2(y)dy-[M(Y)]^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Корреляционный момент по формуле (11) равен

$$\mu_{xy}=M(XY)-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\,y\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\left(\int_0^{\pi/2}y\sin(x+y)dy\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x(-y\cos(x+y)+\sin(x+y))\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x(\frac{\pi}{2}\sin x+\cos x-\sin x)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}((\frac{\pi}{2}-1)x\sin x+x\cos x)dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)(-x\cos x+$$

$$+\sin x)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}.$$

Коэффициент корреляции находим по формуле (12)

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=-\frac{0,7369}{3,0023}=-0,245.$$

Глава 27
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

27.1. Основные понятия математической статистики

1°. Все объекты данной совокупности называют *генеральной совокупностью.*

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных для обследования из генеральной совокупности объектов.

Если случайно отобранный объект возвращается обратно в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной.* Если же не возвращается, то выборка называется *бесповторной.*

Случайная бесповторная выборка имеет место тогда, когда из генеральной совокупности берется сразу нужное количество объектов.

Любой результат, вычисленный по данным выборки, имеет погрешность, которая называется *ошибкой репрезентативности* (или представительности).

Ошибка репрезентативности характеризует величину расхождения между результатами выборочного метода и соответствующими данными по генеральной совокупности.

Изменение изучаемого признака x_i данной статистической совокупности называется его *вариацией*.

Наблюдаемые значения объекта (признака) x_i, извлеченного при выборке из генеральной совокупности, называют *вариантами*.

Варианты принято группировать по отдельным значениям признака (дискретная группировка) или по интервалам изменения признака (интервальная группировка).

Вариационным рядом называется последовательность вариант или интервалов вариации, расположенных в возрастающем порядке.

Число наблюдений объекта n_i при выборке называется *частотой*. Отношение частоты к объему выборки $n_i/n=W_i$ называется *относительной частотой*.

Представленная в виде таблицы совокупность вариант и соответствующих им частот или относительных частот называется *статистическим распределением выборки*.

2°. Пусть известно статистическое распределение частот количественного (дискретного или непрерывного) признака X.

Функцией распределения выборки или *эмпирической функцией распределения* называется функция $F^*(x)$, определяющая относительную частоту события $X<x$ для каждого значения x:

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант, при которых значение признака меньше x, n — объем выборки.

Свойства эмпирической функции распределения:

1) функция $F^*(x)$ — неубывающая;

2) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0,1]$;

3) если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая, то эмпирическая функция $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x)=1$ при $x_i \ge x_k$.

3°. Геометрическая иллюстрация статистического распределения представляется графическим изображением вариационных рядов: полигоном, гистограммой, кумулянтой и огивой.

При построении полигона частот на оси абсцисс прямоугольной системы координат откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Ломаная линия, соединяющая точки (x_i, n_i), называется *полигоном частот*. Если по оси ординат откладывать относительные частоты w_i — соответствующие вариантам x_i, то ломаная линия, соединяющая точки (x_i, w_i), называется *полигоном относительных частот*.

Гистограмма — графическое изображение интервального вариационного ряда. В случае непрерывного распределения признака в некотором интервале, интервал разбивают на несколько частичных интервалов длины h и находят суммы частот n_i в каждом частичном интервале. При построении гистограммы на оси абсцисс откладывают интервалы значений признака h, и на каждом из них, как на основании, строят прямоугольник с высотой равной отношению n_i/h, где n_i — частота вариант i–го интервала; n_i/h — плотность частоты. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.

Если высоты прямоугольников равны w_i/h — плотности относительных частот, то ступенчатая фигура, состоящая из этих прямоугольников, называется *гистограммой относительных частот.*

Накопленной частотой в точке x_i называется суммарная частота элементов статистической совокупности со значениями признака, меньшими чем x_i.

Кумулятивным рядом называется ряд накопленных частот $\gamma_i(x)$, члены которого соответствуют границам интервалов или значениям признака.

Если на оси ординат откладывать накопленные частоты $\gamma_i(x)$, а на оси абсцисс соответствующие границы интервалов x_i, то ломаная линия, соединяющая точки x_i, $\gamma_i(x)$, называется *кумулянтой.*

Если на оси абсцисс откладывать накопленные частоты, а на оси ординат границы интервалов или значение признака, то ломаная линия, соединяющая точки $(\gamma_i(x), x_i)$, называется *огивой.*

1.1. Выборка задана в виде распределения частот

x_i	2	4	6	9	11
n_i	1	3	7	5	4

Написать распределение относительных частот. **Построить**: а) полигон частот; б) полигон относительных частот; в) найти эмпирическую функцию и построить ее график.

Решение. Найдем объем выборки

$$n = 1+3+7+5+4 = 20.$$

Деля частоты на объем выборки, находим относительные частоты

$$w_1 = \frac{1}{20} = 0,05; \quad w_2 = \frac{3}{20} = 0,15; \quad w_3 = \frac{7}{20} = 0,35;$$

$$w_4 = \frac{5}{20} = 0,25; \quad w_5 = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Распределение относительных частот примет вид

x_i	2	4	6	9	11
w_i	0,05	0,15	0,35	0,25	0,2

Проверка $\sum_{i=1}^{5} w_i = 0,05+0,15+0,35+0,25+0,2=1.$

а) На оси абсцисс отложим варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие частоты n_i (рис. 27.1).

Соединив последовательно точки (x_i,n_i) прямыми, получим искомый полигон частот.

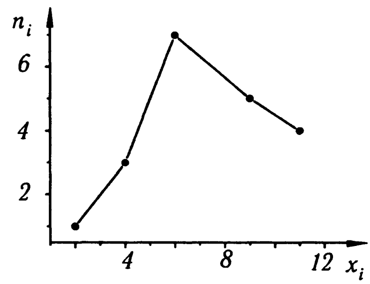


Рис. 27.1

б) На оси абсцисс отложим варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им относительные частоты w_i (рис. 27.2).

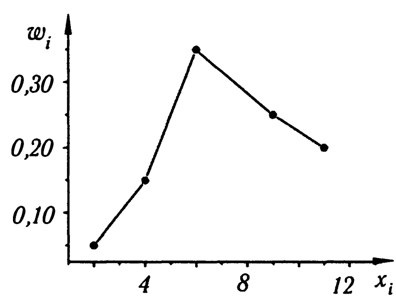


Рис. 27.2

Соединив последовательно точки (x_i, w_i) прямыми, получим искомый полигон относительных частот.

в) Наименьшая варианта равна 2, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$.

Значение $X < 4$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось один раз, следовательно, $F^*(x) = 1/20 = 0{,}05$ при $2 < x \le 4$.

Значения $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, и $x_2 = 4$, наблюдались $1+3 = 4$ раза, следовательно, $F^*(x) = 4/20 = 0{,}2$ при $4 < x \le 6$.

Значения $X < 9$, а именно $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, наблюдались $1+3+7=11$ раз, следовательно, $F^*(x) = 11/20 = 0{,}55$ при $6 < x \le 9$.

Значения $X<11$, а именно $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=6$ и $x_4=9$, наблюдались 1+3+7+5=16 раз, следовательно $F^*(x)=16/20=0,8$ при $9<x\le 11$.

Так как $x=11$ — наибольшая варианта, то, согласно свойств эмпирической функции распределения, получим $F^*(x)=1$ при $x>11$.

Отсюда, искомая функция распределения примет вид

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x\le 2, \\ 0,05 & при\ \ 2<x\le 4, \\ 0,2 & при\ \ 4<x\le 6, \\ 0,55 & при\ \ 6<x\le 9, \\ 0,8 & при\ \ 9<x\le 11, \\ 1 & при\ \ x>11. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 27.3.

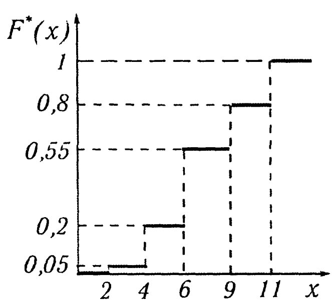


Рис. 27.3

1.2. По данному распределению выборки

интервал $x_i - x_{i+1}$	2–6	6–10	10–14	14–18	18–22
частота n_i	4	6	10	25	5

построить: а) гистограмму частот; б) гистограмму относительных частот.

Решение. а) Нетрудно решить, что длина интервалов равна $h=4$. Тогда плотности частот равны $\frac{n_1}{h}=1$; $\frac{n_2}{h}=1,5$; $\frac{n_3}{h}=2,5$; $\frac{n_4}{h}=6,25$; $\frac{n_5}{h}=1,25$.

На оси абсцисс построим заданные интервалы (рис. 27.4).

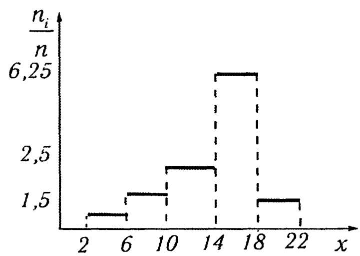


Рис. 27.4

Над этими интервалами параллельно оси абсцисс проведем отрезки на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты $\frac{n}{h}$ и построим ступенчатую фигуру из прямоугольников, которая и будет искомой гистограммой частот.

б) Найдем сначала объем выборки $n=\sum n_i = 4+6+10+25+5=50$.

Относительные частоты будут $w_1=\frac{4}{50}=0,08$; $w_2=\frac{6}{50}=0,12$; $w_4=\frac{25}{50}=0,5$; $w_5=\frac{5}{50}=0,1$.

Плотности относительных частот будут: $\frac{w_1}{h}=\frac{0,08}{4}=0,02$; $\frac{w_2}{h}=\frac{0,12}{4}=0,03$; $\frac{w_3}{h}=\frac{0,2}{4}=0,05$; $\frac{w_4}{h}=\frac{0,5}{4}=0,125$; $\frac{w_5}{h}=\frac{0,1}{4}=0,025$.

На оси абсцисс откладываем заданные частичные интервалы (рис. 27.5).

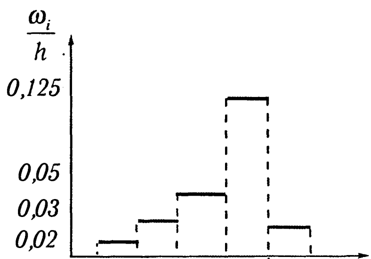


Рис. 27.5

Над частичными интервалами параллельно оси абсцисс проведем отрезки на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительных частот $\frac{w_i}{h}$.

1.3. В магазине за день проданы рубашки следующих размеров

40 37 39 42 40 39 38 40 41 36
41 41 40 39 41 40 37 43 40 39
39 38 40 37 40 38 42 41 40 42
41 40 38 39 41 40 41 41

Написать дискретный вариационный ряд и **построить** полигон.

Решение. Различные значения признака (размеры рубашек) располагаем в порядке их возрастания и под каждым из этих значений записываем их частоту, тогда вариационный ряд примет вид

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	3	4	6	11	9	3	1

На оси абсцисс отложим варианты x_i, на оси ординат соответствующие им частоты.

Полигон распределения показан на рис. 27.6.

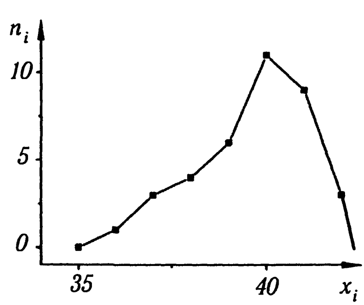


Рис. 27.6

1.4. В течение дня измерялось напряжение тока в электросети (в). При этом были получены следующие значения:

209 215 215 232 220 220 218 220 221

222 224 227 217 226 212 221 225 219

220 222 216 223 218 230 211 219 227

226 220 219 216 232 215 219 218 223

По этим данным **написать**: а) интервальный вариационный ряд с равными интервалами в три деления; б) построить гистограмму; в) написать кумулятивный ряд; г) построить кумулянту и огиву.

Решение. а) Разобъем диапазон изменения напряжений на равные интервалы и составим таблицу, в первой строке которой расположим в порядке возрастания интервалы, а во второй значения подсчитанных частот

интервал $x_i - x_{i+1}$	209–212	212–215	215–218	218–221	221–224	224–227	227–230	230–233
n_i	2	1	6	11	6	4	3	3
γ_i	2	3	9	20	26	30	33	36

б) Гистограмма распределения показана на рис. 27.7.

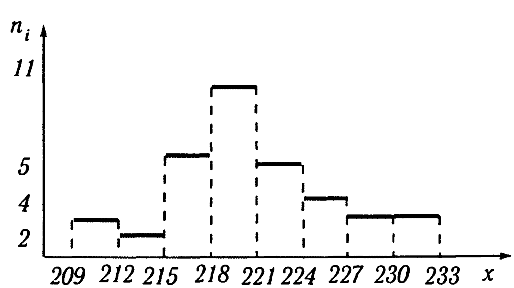


Рис. 27.7

в) Находим накопленные частоты для каждого из интервалов вариационного ряда $\gamma_1 = n_1 = 2$; $\gamma_2 = n_1 + n_2 = 3$; γ_3

$=n_1+n_2+n_3=9$; $\gamma_4=20$; $\gamma_5=26$; $\gamma_6=30$; $\gamma_7=33$; $\gamma_8=36$. Подставляя частоты в третью строку таблицы, получим кумулятивный ряд.

г) Откладывая накопленные частоты по оси ординат, интервалы по оси абсцисс, получим кумулянту (рис. 27.8).

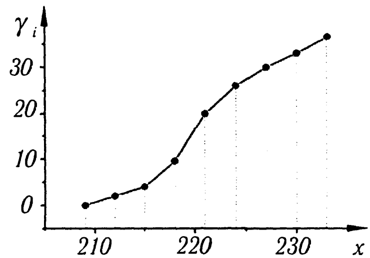


Рис. 27.8

Откладывая на оси абсцисс накопленные частоты, а на оси ординат границы интервалов, получим огиву (рис. 27.9).

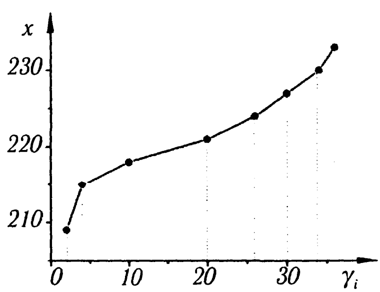


Рис. 27.9

27.2. Средние значения признака совокупности

1°. *Генеральной средней* при наличии в совокупности повторяющихся значений признака называется среднее значение изучаемого признака в генеральной совокупности

$$\bar{X} = \frac{\sum N_i x_i}{N} \qquad \left(\sum N_i = N\right), \tag{1}$$

где N_i — частота признака x_i.

При отсутствии повторений признака используется формула средней арифметической

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}, \tag{2}$$

Выборочной средней называется среднее значение признака в выборочной совокупности

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} \qquad \left(\sum n_i = n\right), \tag{3}$$

или $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, если признак не повторяется.

Ошибка репрезентативности Δ определяется разностью между выборочной средней и генеральной средней $\Delta = \bar{x} - \bar{X}$.

2°. *Генеральной долей* называется отношение количества единиц M, обладающих данным признаком, к численности генеральной совокупности

$$p = \frac{M}{N}.$$

Выборочная доля определяется отношением $w = m/n$, где m — количество единиц, обладающих данным признаком в выборочной совокупности n. Ошибка репрезентативности определяется разностью $\Delta = w - p$.

Пусть значения признака X генеральной или выборочной совокупности разбиты на несколько групп. *Групповой средней* называется среднее арифметическое значение признака в группе. Общая средняя совокупности равна средней арифметической групповых средних, взвешенных по объемам групп.

Если варианты x_i — большие числа, то с целью упрощения расчета из каждой варианты следует вычесть некоторое число

x_0, близкое к среднему значению, т. е. перейти к условным вариантам $u = x_i - x_0$. В этом случае среднее арифметическое выборки определяется по формуле

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i u_i}{n} + x_0 \qquad (4)$$

Средним степенным k–го порядка искомого признака некоторой выборки называется величина

$$\overline{x}_k = \sqrt[3]{\overline{x^k}}, \qquad (x_i > 0)$$

если $k = 1$ среднее степенное есть среднее арифметическое; $k = 2$ — среднее квадратическое; $k = 3$ — среднее кубическое и т. д.

При $k = -1$ среднее степенное называется *средним гармоническим.*

Среднее геометрическое определяется по формуле

$$\overline{x} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_i^{n_i}} \qquad \left(\sum_i n_i = n, \quad x_i > 0\right).$$

2.1. Из генеральной совокупности взята выборка, определяемая распределением

x_i	2	4	6	9	10
n_i	11	8	12	14	5

Найти ошибку репрезентативности, если генеральная средняя равна $\overline{X} = 6$.

Решение. Находим выборочную среднюю

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{11 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 14 \cdot 9 + 5 \cdot 10}{50} = 6{,}04.$$

Ошибка репрезентативности равна

$$\Delta = \overline{x} - \overline{X} = 6{,}04 - 6 = 0{,}04.$$

2.2. В цехе из 1000 рабочих 126 женщин. В выборочной совокупности из 100 человек их оказалось 14. **Найти** ошибку репрезентативности.

Решение. Генеральная доля женщин в генеральной совокупности равна $p = \frac{M}{N} = \frac{126}{1000} = 0{,}126$. Выборочная доля $w = \frac{m}{n} = \frac{14}{100} = 0{,}14$. Таким образом, ошибка репрезентативности будет $\Delta = 0{,}14 - 0{,}126 = 0{,}014$.

2.3. Совокупность разбита на две группы

x_i	1	2	4	y_i	1	3	6
n_i	3	7	5	m_i	2	4	4

Найти общую среднюю совокупности.

Решение. Найдем групповые средние

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 4}{3 + 7 + 5} = \frac{37}{15};$$

$$\overline{y} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{2 + 4 + 4} = 3{,}8.$$

Общую среднюю находим по групповым средним

$$Z = \frac{15 \cdot \frac{37}{15} + 10 \cdot 3{,}8}{15 + 10} = 3.$$

2.4. Пусть известно распределение роста мужчин

Рост. см	число мужчин	Рост. см	число мужчин
150–154	1	174–178	13
154–158	4	178–182	10
158–162	7	182–186	5
162–166	9	186–190	2
166–170	12	190 и выше	2
170–174	15		

Найти среднее арифметическое роста.

Решение. Считаем, что среднее значение искомого признака примерно 170 см. Воспользуемся формулой (4), необходимые вычисления по которой приведены в таблице

интервал	n_i	середина интервала	u_i	$n_i u_i$
150–154	1	152	–18	–18
154–158	4	156	–14	–56
158–162	7	160	–10	–70
162–166	9	164	–6	–54
166–170	12	168	–2	–24
170–174	15	172	2	30
174–178	13	176	6	78
178–182	10	180	10	100
182–186	5	184	14	70
186–190	2	188	18	36
190 и выше	2	192	22	44
$\sum$	80			136

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i u_i}{n} + x_0 = \frac{136}{80} + 170 = 171,7 см.$$

27.3. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

1°. *Генеральной дисперсией* называется средняя взвешенная квадратов отклонений значений признака от их среднего значения

$$D_г = \left(\sum_i N_i (x_i - \overline{x}_г)^2 \right) / N \tag{1}$$

Выборочной дисперсией называется средняя взвешенная квадратов отклонений значений признака от их среднего значения в выборке

$$D = \left(\sum_i n_i (x_i - \overline{x})^2 \right) / n \qquad (2)$$

Дисперсия равна разности среднего квадратов значений и квадрата общей средней

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i x_i}{n} \right)^2 \qquad (3)$$

2°. *Выборочным средним квадратическим отклонением* называется квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D} \qquad (4)$$

Исправленная выборочная дисперсия обозначается за s^2 и определяется по формуле

$$s^2 = \frac{\sum_i n_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{\sum n_i x_i^2 - \frac{(\sum n_i x_i)^2}{n}}{n-1} \qquad (5)$$

Среднее квадратическое отклонение в этом случае равно $\sigma = \sqrt{s^2}$.

Если $n>30$, то формулы (2) и (5) практически совпадают.

Средним абсолютным отклонением δ называется среднее арифметическое абсолютных отклонений

$$\delta = \left(\sum n_i \left| x_i - \overline{x} \right| \right) / \sum n_i. \qquad (6)$$

Если первоначальные варианты большие числа, то в условных вариантах $u_i = x_i - x_0$ и $u_i = Cx_i$, где $C = 10^k$, исправленная дисперсия равна

$$s_u^2 = \left(\sum n_i u_i^2 - \left(\sum n_i u_i \right)^2 / n \right) / (n-1), \qquad (7)$$

а сами дисперсии будут $s^2 = s_u^2$ и $s^2 = s_u^2 / C^2$.

3°. *Коэффициентом вариации* называется отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака (в процентах):

$$v = \frac{s}{\overline{x}} 100\%$$

Размахом вариации называется разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

4°. Если совокупность разбита на группы, то *групповой дисперсией* называется дисперсия значений признака некоторой группы, относительно ее групповой средней

$$D_x = \left(\sum n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2\right) / \sum n_i.$$

Если известны дисперсии каждой группы, то *внутригрупповой дисперсией* называется средняя арифметическая дисперсия, взвешенная по объемам групп.

$$D_{вгр} = \left(\sum N_i D_{i\,гр}\right) / N = \left(nD_x + mD_y\right) / \left(m + n\right),$$

где N — объем всей совокупности; N_i — объем группы.

Если известны групповые средние и общая средняя, то *межгрупповой дисперсией* называется дисперсия групповых средних относительно общей средней

$$D_{м\,гр} = \left(m\left(\overline{x} - \overline{z}\right)^2 + m\left(\overline{y} - \overline{z}\right)^2\right) / \left(m + n\right),$$

где $\overline{z}$ — общая средняя.

Общей дисперсией называется дисперсия признака всей совокупности относительно общей средней

$$D_{об} = \left(\sum n_i \left(x_i - \overline{z}\right)^2 + \sum m_i \left(y_i - \overline{z}\right)^2\right) / \left(m + n\right). \qquad (8)$$

3.1. Дана выборочная совокупность распределения

x_i	1	3	4	8
n_i	5	25	20	10

Найти: а) выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение; б) среднее абсолютное отклонение.

Решение. а) Найдем общую среднюю

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 1 + 25\cdot 3 + 20\cdot 4 + 10\cdot 8}{5+25+20+10} = \frac{240}{60} = 4.$$

Выборочная дисперсия по формуле (2) равна

$$D = \frac{5(1-4)^2 + 25(3-4)^2 + 20(4-4)^2 + 10(8-4)^2}{60} = \frac{23}{6};$$

Дисперсия, найденная по формуле (3), дает тот же самый результат

$$D = \frac{5\cdot 1^2 + 25\cdot 3^2 + 20\cdot 4^2 + 10\cdot 8^2}{60} - 4^2 = \frac{23}{6}.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = \sqrt{\frac{23}{6}} =$ $= 1{,}95789.$

б) Для нахождения среднего абсолютного отклонения воспользуемся формулой (6)

$$\delta = \frac{5|1-4| + 25|3-4| + 20|4-4| + 10|8-4|}{60} = \frac{4}{3}.$$

3.2. Совокупность разбита на две группы

x_i	1	4	5	y_i	1	3	4
n_i	1	6	3	m_i	1	3	2

Найти: а) групповые дисперсии; б) внутригрупповую дисперсию; в) межгрупповую и общую дисперсию.

Решение. а) Найдем групповые средние:

$$\overline{x} = \left(\sum n_i x_i\right) / \sum n_i = (1\cdot 1 + 6\cdot 4 + 3\cdot 5)/(1+6+3) = 4;$$

$$\overline{y} = \left(\sum m_i y_i\right) / \sum m_i = (1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4)/(1+3+2) = 3.$$

Искомые групповые дисперсии:

$$D_x = \left(\sum n_i (x_i - \overline{x})^2\right)/n = \left(1(1-4)^2 + 6(4-4)^2 + 3(5-4)^2\right)/10 = 1,2;$$

$$D_y = \left(\sum m_i (y_i - \overline{y})^2\right)/m = \left(1(1-3)^2 + 3(3-3)^2 + 2(4-3)^2\right)/6 = 1;$$

б) Внутригрупповая дисперсия равна

$$D_{в\ гр} = (10 \cdot 1,2 + 6 \cdot 1)/16 = \frac{9}{8}.$$

в) Найдем общую среднюю

$$\overline{z} = \frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{(1+6+3)+(1+3+2)} = \frac{29}{8}.$$

Межгрупповая дисперсия равна

$$D_{м\ гр} = \left(10\left(4 - \frac{29}{8}\right)^2 + 6\left(3 - \frac{29}{8}\right)^2\right)/16 = \frac{15}{64}.$$

Находим общую дисперсию по формуле (8)

$$D_{об} = \left(1\left(1 - \frac{29}{8}\right)^2 + 6\left(4 - \frac{29}{8}\right)^2 + 3\left(5 - \frac{29}{8}\right)^2 + 1\left(1 - \frac{29}{8}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 3\left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + 2\left(4 - \frac{29}{8}\right)^2\right)/16 = \frac{87}{64}.$$

3.3. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие значения 80, 83, 87, 89, 91. **Найти** выборочную и исправленную дисперсии ошибок измерений.

Решение. Найдем сначала выборочную среднюю

$$\overline{x} = 80 + \frac{0+3+7+9+11}{5} = 86.$$

Выборочная дисперсия, вычисленная по формуле (2), будет равна

$$D=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(80-86)^2+(83-86)^2+(87-86)^2}{5}+$$

$$+\frac{(89-86)^2+(91-86)^2}{5}=16.$$

По формуле (5) найдем исправленную дисперсию

$$s^2=\frac{n}{n-1}D=\frac{5}{4}\cdot 16=20.$$

3.4. Найти исправленную выборочную дисперсию по заданному распределению

x_i	151	155	159
n_i	2	5	3

Решение. Переходя к условным вариантам $u_i=x_i-155$, получим распределение

u_i	– 4	0	4
n_i	2	5	3

Исправленную выборочную дисперсию условных вариант находим по формуле (7)

$$s_u^2=\frac{1}{9}\left(2\cdot 16+5\cdot 0+3\cdot 16-\frac{(2(-4)+5\cdot 0+3\cdot 4)^2}{10}\right)=\frac{392}{45}.$$

Поскольку искомая дисперсия равна дисперсии условных вариант, то

$$s^2=s_u^2=\frac{392}{45}.$$

3.5. Найти исправленную выборочную дисперсию по заданному распределению

x_i	0,02	0,03	0,07
n_i	2	5	3

Решение. С целью упрощения расчетов переходим в распределении к целым числам посредством условных вариант $u_i = 100x_i$

u_i	2	3	7
n_i	2	5	3

Исправленную выборочную дисперсию условных вариант находим по формуле (7)

$$s_u^2 = \frac{1}{9}(2\cdot 4+5\cdot 9+3\cdot 49-\frac{(2\cdot 2+5\cdot 3+3\cdot 7)^2}{10}) = \frac{40}{9}.$$

Искомая исправленная дисперсия находится по формуле

$$s^2 = \frac{s_u^2}{C^2} = \frac{40}{9\cdot 100^2} = \frac{1}{2250}.$$

3.6. В результате испытания некоторого параметра получено распределение

170–190	190–210	210–230	230–250	250–270
10	11	12	9	8

Найти дисперсию, коэффициент вариации и размах вариации признака.

Решение. Необходимые вычисления приведем в виде таблицы

интервал	n_i	середина интервала	$u_i=x_i-220$	n_iu_i
170–190	10	180	–40	–400
190–210	11	200	–20	–220

210–230	12	220	0	0
230–250	9	240	20	180
250–270	8	260	40	320
сумма	50			–120

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum n_i u_i}{n} = 220 - 2,4 = 217,6.$$

Искомую выборочную дисперсию находим по формуле

$$D = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n}\right)^2 = \frac{10 \cdot 1600 + 11 \cdot 400 + 9 \cdot 400 + 8 \cdot 1600}{50} -$$

$$-2,4^2 = 730,34.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = \sqrt{D} =$ $=27,0248$. Отсюда коэффициент вариации $\nu = \frac{\sigma}{x} 100\% = 12,419$, а ее размах $R = x_{max} - x_{min} = 270 - 170 = 100$.

27.4. Мода и медиана

1°. *Модой* называется варианта с наибольшей частотой, т. е. наиболее часто встречающееся значение признака.

Если интервалы вариационного ряда имеют постоянную ширину h, то мода признака определяется по формуле

$$M_0 = x_m + h \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})}, \qquad (1)$$

где x_m — начальное значение модального интервала, n_m — наибольшая частота, n_{m-l} и n_{m+l} — частота интервала предшествующего и последующего модальному.

2°. *Медианой* называется варианта, которая делит статистическую совокупность на две равные части по числу вариант.

Медиана признака в случае интервального распределения определяется по формуле

$$M_e = x_e + h\frac{\frac{n}{2} - \gamma_{e-1}}{n_e}, \qquad (2)$$

где n — объем статистической совокупности, γ_{e-1} — накопленная частота до e–го интервала, n_e — частота e–го интервала, e — номер медианного интервала определяется из условия $\gamma_{e-1} \le \frac{n}{2}$ и $\gamma_{e+1} > \frac{n}{2}$, x_e — начальное значение медианного интервала.

4.1. Дано интервальное распределение

8–11	11–14	14–17	17–20	20–23	23–26
5	11	32	18	17	6

Найти моду и медиану.

Решение. Наибольшей частоте $n_m = 32$ соответствует интервал 14–17. Воспользуемся формулой (1). Так как $h = 3$; $x_m = 14$; $n_{m-1} = 11$ и $n_{m+1} = 18$, то

$$M_0 = 14 + 3\frac{32-11}{(32-11)+(32-18)} = 14 + 1{,}8 = 15{,}8.$$

Для нахождения медианы строим кумулятивный ряд

8–11	11–14	14–17	17–20	20–23	23–26
5	16	48	66	83	89

В нашем случае $\frac{n}{2} = 44{,}5$, поэтому медианным интервалом является интервал 14–17. Медиану находим по формуле (2)

$$M_e = 14 + 3\frac{44{,}5-16}{32} \simeq 16{,}67.$$

27.5. Доверительные интервалы для средних. Выборочный метод

1°. Пусть требуется оценить по данным выборки некоторый параметр. При выборке малого объема пользуются точечными и интервальными оценками. *Точечной* называется оценка, которая определяется одним числом. При точечном оценивании предполагается, что истинное значение параметра генеральной совокупности приблизительно равно соответствующей выборочной характеристике. Так, выборочное среднее $\overline{x}$ служит точечной оценкой величины генеральной средней $\overline{x}_г$ и т. д. Под *интервальной оценкой* будем понимать интервал, который покрывает оцениваемый параметр. Интервал, покрывающий оцениваемый параметр с заданной надежностью γ, (доверительной вероятностью), называется *доверительным*.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормально распределенной величины по выборочной средней $\overline{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности определяется неравенством

$$\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где n — объем выборки, t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. Значение t определяется по таблице функции Лапласа по заданной надежности γ.

Точность оценки или средняя ошибка выборки, с которой доверительный интервал покрывает неизвестный параметр a, определяется по формуле

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n}. \tag{2}$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности по выборочной средней $\overline{x}$ и объеме выборки $n > 30$ определяется неравенством

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

где s — исправленное среднее квадратическое отклонение, значение t_γ находится при заданных n и γ по таблице (4).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения количественного признака X генеральной совокупности с надежностью γ по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s определяются неравенствами

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad при \quad q < 1; \tag{4}$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad при \quad q > 1, \tag{5}$$

где значения q находятся по таблице (5) по заданным n и γ.

2°. Выборочный метод позволяет по данным выборочного обследования определить признаки, характеризующие генеральную совокупность.

Пользуясь теоремой Лапласа

$$P(|\overline{X} - \overline{x}| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\mu}\right), \tag{6}$$

где $\overline{X}$ — генеральная средняя, μ — средняя квадратическая ошибка выборки, можно найти:

1) какова вероятность того, что отклонение генеральной средней от выборочной не превышает заданного значения δ;

2) при каком объеме выборки n выполнима заданная точность того, что отклонение генеральной средней $\overline{X}$ от выборочной $\overline{x}$ не превышает определенного числа;

3) в каких границах заключена генеральная средняя, если известна вероятность того, что отклонение генеральной средней

от выборочной удовлетворяет соответствующему отклонению.

Для случайной повторной выборки при определении средней признака величина μ определяется по формуле

$$\mu = \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

где s_n^2 — дисперсия случайной величины в выборке; для бесповторной выборки

$$\mu = \sqrt{\frac{s_n^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \tag{8}$$

где $1 - \frac{n}{N}$ — необследованная часть генеральной совокупности.

Для случайной повторной выборки при определении доли признака

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \simeq \sqrt{\frac{pq}{n}}; \tag{9}$$

для бесповторной выборки.

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \tag{10}$$

где w и $1-w$ — доли данного и противоположного признака в выборке.

Если требуется определить необходимый объем выборки с заданной точностью P=2$\Phi(t)$, то разрешая формулы (7), (8) относительно n для повторной выборки получим

$$n = \frac{t^2 s_n^2}{\delta^2}; \tag{11}$$

для бесповторной

$$n = \frac{N t^2 s_n^2}{N\delta^2 + t^2 s_n^2}. \tag{12}$$

Разрешая относительно n (9), (10) при определении доли признака, для повторной выборки получим

$$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\delta^2}, \tag{13}$$

для бесповторной

$$n = \frac{Nt^2 pq}{N\delta^2 + t^2 pq}. \tag{14}$$

5.1. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной величины с надежностью 0,95, если известно генеральное среднее квадратическое отклонение σ =4, объем выборки n=36 и выборочная средняя $\bar{x} = 8$.

Решение. Для нахождения доверительного интервала воспользуемся формулой (1). Значение t находим из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475$ по таблице (3): t=1,96. Подставив все значения в формулу (1), получим

$$8 - 1,96\frac{4}{\sqrt{36}} < a < 8 + 1,96\frac{4}{\sqrt{36}};$$

$$6,794 < a < 9,206.$$

5.2. Известно среднее квадратическое отклонение σ = 3 нормально распределенной генеральной совокупности. **Найти** с надежностью 0,95: а) минимальный объем выборки, если точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней равна δ= 0,2; б) точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание, если выборка объема n = 100.

Решение. а) Для определения минимального объема выборки воспользуемся формулой (2) $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$. По условию γ=0,95, тогда $\Phi(t)=0{,}475$ и по таблице (3) находим $t = 1{,}96$. Искомый объем выборки $n=\dfrac{1{,}96^2\cdot 3^2}{(0{,}2)^2}$; $n=\left(\dfrac{1{,}96\cdot 3}{0{,}2}\right)^2=869$.

б) Для определения точности оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней воспользуемся формулой (2). Поскольку при $\gamma = 0{,}95$ значения $t = 1{,}96$, то точность оценки выборки объема $n = 100$ равна $\delta = 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{100}} = 0{,}588$.

5.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	2	3	5	8
n_i	2	3	6	4

Оценить с надежность 0,99 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней.

Решение. Математическое ожидание будем оценивать при помощи доверительного интервала. Поскольку среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности неизвестно, то для оценки математического ожидания воспользуемся формулой (3). Выборочную среднюю находим по формуле

$$\bar{x} = \sum n_i x_i / n = (2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 6\cdot 5 + 4\cdot 8)/15 = 5.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение находим по формуле

$$s = \sqrt{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)} = ((2(2-5)^2 + 3(3-5)^2 + 6(5-5)^2 +$$
$$+4(8-5)^2)/14)^{1/2} = 2{,}1679.$$

Пользуясь таблицей (4) по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 15$ находим $t_\gamma = 2{,}98$.

Подставляя найденные величины в формулу (3), получим искомый доверительный интервал

$$5-2,98\frac{2,1679}{\sqrt{15}}<a<5+2,98\frac{2,1679}{\sqrt{15}};$$

$$3,3319<a<6,6681.$$

5.4. По данным 7 независимых испытаний физической величины найдено среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x}=50,7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s = 4,5. **Оценить** истинное значение измеряемой величины с надежностью γ = 0,99.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Следовательно, решение сводится к оценке математического ожидания при неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности. Рассматривая число измерений, как объем выборки, математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) оценим при помощи доверительного интервала по формуле (3). Значение t_γ определяем по таблице (4) при γ = 0,99 и n = 7: t_γ = 3,71.

Подставляя все величины в формулу (3), получим

$$50,7-3,71\frac{4,5}{\sqrt{7}}<a<50,7+3,71\frac{4,5}{\sqrt{7}};$$

$$44,389<a<57,01.$$

5.5. По выборке объема n = 12 из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s=1,2$ нормально распределенного количественного признака X. **Найти** доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Решение. Доверительный интервал в данном случае находится по формуле (4) или (5) в зависимости от q. Так как при

$\gamma = 0{,}95$ и $n = 12$ по таблице (5) $q = 0{,}55 < 1$, то искомый доверительный интервал находим по формуле (4)

$$1{,}2(1-0{,}55) < \sigma < 1{,}2(1+0{,}55);$$

$$0{,}54 < \sigma < 1{,}86.$$

5.6. Найти точность прибора с надежностью 0,99, если по 8 равноточным измерениям некоторой величины найдено, что исправленное среднее квадратическое отклонение равно $s = 0{,}25$.

Решение. Точность прибора определяется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок измерений. Найдем доверительный интервал, покрывающий σ с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$. Поскольку при $\gamma = 0{,}99$ и $n = 8$ по таблице (5) значение $q = 1{,}38 > 1$, то воспользуемся неравенством (5)

$$0 < \sigma < 0{,}25(1+1{,}38);$$

$$0 < \sigma < 0{,}595.$$

5.7. Результаты урожайности риса на различных участках поля площадью 1000 га приведены в следующей таблице

урожайность в ц. с га	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
количество га	15	20	45	20

Найти: а) при повторной и бесповторной выборке вероятность того, что средняя урожайность риса на всем поле отличается от средней выборочной не более чем на 0,1 ц; б) границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключена урожайность на всем поле.

Решение. а) Принимая за значение признака середины интервалов, найдем среднюю арифметическую и дисперсию заданного в условии распределения

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{15\cdot 11 + 20\cdot 13 + 45\cdot 15 + 20\cdot 17}{15+20+45+20} = 14{,}4;$$

$$s_n^2 = \frac{\sum n_i(x_i - \overline{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{15(-3,5)^2 + 20(-1,5)^2 + 45(0,5)^2 + 20(2,5)^2}{99} = 2,53.$$

При определении вероятности искомого события воспользуемся формулой (6), в которой $\delta = 0,1$. Найдем среднюю квадратическую ошибку выборки μ. Для повторной выборки по формуле (7), в которой $n = 100$, получим $\mu = \sqrt{\frac{2,53}{100}} \simeq 0,16.$

Искомая вероятность по таблице

$$P(\left|\overline{X} - 14,4\right| \le 0,1) = 2\Phi\left(\frac{0,1}{0,16}\right) = 2\Phi(0,625) = 0,468.$$

В случае бесповторной выборки по формуле (8), (6) и табл. (3) имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{2,53}{100}\left(1 - \frac{100}{1000}\right)} = 0,150897.$$

$$P(\left|\overline{X} - 14,4\right| \le 0,1) = 2\Phi\left(\frac{0,1}{0,151}\right) = 2\Phi(0,6627) = 0,49.$$

б) По таблице (3) и *правилу трех сигм*

$$P(\left|\overline{X} - \overline{x}\right| \le \delta) = 2\Phi(3) = 0,9973$$

находим, что $\delta = 3\mu$.

Если выборка повторная, то $\delta = 3 \cdot 0,16 = 0,48$ ц; если бесповторная, то $\delta = 3 \cdot 0,150897 = 0,45269$ ц.

Таким образом, средняя урожайность при повторной выборке на всем поле с вероятностью 0,9973 находится по формуле (3) и заключена в границах

$$\bar{x} - \delta \le \bar{X} \le \bar{x} + \delta; \quad 14,4 - 0,48 \le \bar{X} \le 14,4 + 0,48;$$

$$13,92 \le \bar{X} \le 14,88;$$

если выборка бесповторная

$$14,4 - 0,45 \le \bar{X} \le 14,4 + 0,45;$$

$$13,95 \le \bar{X} \le 14,85.$$

5.8. В партии из 10000 лампочек было проверено 1000 лампочек. Среди проверенных оказалось 5% бракованных. **Найти:** а) при повторной и бесповторной выборке вероятность того, что доля бракованных лампочек во всей партии отличается от их доли в выборке не более чем на 0,01. б) границы, в которых с вероятностью 0,9836 заключена доля бракованных лампочек во всей партии.

Решение. а) Средняя квадратическая ошибка при повторной выборке при доле бракованных лампочек в выборке w=0,05 по формуле (9) равна

$$\mu = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{1000}} = 0,00689,$$

при бесповторной выборке и объеме генеральной совокупности N=10000 равна

$$\mu = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{1000}\left(1 - \frac{1000}{10000}\right)} = 0,0065364.$$

Искомая вероятность при повторной выборке будет

$$P(|p - 0,05| \le 0,01) = 2\Phi\left(\frac{0,01}{0,00689}\right) = 0,853,$$

при бесповторной

$$P(|p - 0,05| \le 0,01) = 2\Phi\left(\frac{0,01}{0,006536}\right) = 0,874.$$

б) По таблице (3) находим, что $\Phi(2,4) = 0,9836$; откуда $t = \dfrac{\delta}{\mu} = 2,4.$

Средняя квадратическая ошибка, если выборка повторная, $\mu = 0,00689$, а, если выборка бесповторная, $\mu = 0,0065364$. Таким образом, предельная ошибка для повторной выборки $\delta = 2,4 \cdot 0,00689 = 0,0165$; для бесповторной $\delta = 2,4 \cdot 0,0065364 = 0,0157$.

Границы, в которых с вероятностью 0,9836 заключена доля бракованных лампочек, для повторной выборки равна

$$0,5 - 0,0165 \le P \le 0,5 + 0,0165;$$

$$0,4835 \le P \le 0,5165,$$

для бесповторной

$$0,5 - 0,0157 \le P \le 0,5 + 0,0157;$$

$$0,4843 \le P \le 0,5157.$$

5.9. При каком объеме повторной выборки можно утверждать с вероятностью 0,9836, что отклонение выборочной средней от генеральной не превысит $\delta = 0,2$, если $\sigma = 0,9$?

Решение. Из выражения (6) имеем

$$P(|\bar{X} - \bar{x}| \le 0,2) = 2\Phi(t) = 0,9836,$$

откуда по таблице (3) $t = 2,4$. Поскольку выборка повторная, то полагая $\sigma \simeq s_n$ по формуле (11) ее объем равен

$$n = \frac{2,4^2 \cdot 0,9^2}{0,2^2} = 117.$$

5.10. Из партии в 1000 деталей для определения доли брака производится выборка. **Найти** объем выборки, при котором с вероятностью $P = 0,9973$ гарантируется ошибка не свыше 0,2, если: а) выборка повторная; б) выборка бесповторная и вероятность изготовления бракованных деталей равна $q = 0,2$.

Решение. В условии нет значения доли брака, поэтому при определении объема выборки в формуле (13) $n = \dfrac{t^2 pq}{\delta^2}$ следует использовать наибольшее значение $pq = 0{,}25$.

Таким образом, учитывая, что при заданной вероятности по формуле (6) $t = 3$, получим $n = \dfrac{9 \cdot 0{,}25}{0{,}2^2} = 57$.

б) По условию $P(|w - p| < 0{,}2) = 0{,}9973$ значение $t = 3$, $p = 1 - q = 0{,}8$. Величина выборки по формуле (14) равна

$$n = \frac{1000 \cdot 9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}{1000 \cdot 0{,}2^2 + 9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 34{,}749.$$

5.11. При изучении физико–механических свойств ткани было испытано $n = 12$ образцов и получены следующие значения предела прочности на разрыв $Н/мм^2$: 19,5;16,8;17,1;17,5; 15,7; 15,5; 14,6; 20,0; 19,4; 18,2; 16,2; 19,2. **Требуется:** а) найти выборочное среднее $\overline{x}$, «исправленное» стандартное отклонение $s(x)$ и коэффициент вариации v изучаемого признака; б) найти доверительный интервал для среднего предела прочности a этой ткани на уровне заданной надежности $\gamma = 0{,}95$.

Решение. а) Вычисления будем вести в табличном виде. Запишем результаты наблюдений в столбец 1 таблицы и найдем их сумму

пределы прочности	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	2	3
19.5	2.02	4.08
16.8	–0.68	0.46
17.1	–0.38	0.14
17.5	0.02	0.0004
15.7	–1.78	3.17
15.5	–1.98	3.92

14.6	–2.88	8.28
20.0	2.52	6.35
19.4	1.92	3.69
18.2	0.72	0.52
16.2	–1.28	1.64
19.2	1.72	2.96
Σ 209.7		Σ 35.21

Выборочное среднее равно

$$\overline{x} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{209,7}{12} = 17,48\,H/мм^2.$$

Вычислим отклонения $(x_i - \overline{x})$ и внесем их в столбец 2. В столбец 3 запишем квадраты $(x_i - \overline{x})^2$ этих отклонений и найдем их сумму $\sum(x_i - \overline{x})^2 = 35,21$.

Найдем «исправленное» стандартное отклонение

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{12-1}35,21} = 17,9H/мм^2.$$

Коэффициент вариации υ изучаемого признака

$$\upsilon = \frac{s(x)}{\overline{x}}\cdot 100\% = \frac{1,79}{17,48}\cdot 100\% = 10,24\%.$$

б) Для заданной доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ и числа степеней свободы $\nu = n - 1 = 12 - 1 = 11$ из табл.4 находим $t_\gamma(0,95;\ 11) - 2,20$. В случае малой выборки $n < 30$ предельная ошибка выборки определяется по формуле

$$\Delta = t_\gamma(\gamma,\nu)\frac{s(x)}{\sqrt{n}} = 2,2\frac{1,79}{\sqrt{12}} \simeq 1,14H/\text{мм}^2.$$

Искомый 95%–ный доверительный интервал для ожидаемого предела прочности a исследуемой ткани определяется неравенством $\bar{x} - \Delta < a < \bar{x} + \Delta$, откуда $17{,}48 - 1{,}14 < a < 17{,}48 + 1{,}14$ или $16{,}34 < a < 18{,}62$. Таким образом, средний предел прочности ткани находится в интервале от 16,34 $Н$/мм^2 до 18,62 $Н$/мм^2.

5.12. С целью определения размеров детской одежды проведено выборочное обследование детей и получено следующее распределение количества детей по величине обхвата груди

обхват груди, x, см	56–58	59–61	62–64	65–67	68–70	71–73
количествог детей	28	48	70	78	36	20

Требуется: а) построить гистограмму относительных частот для наблюдаемых значений признака X; б) определить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочное стандартное отклонение σ_B, коэффициент вариации v изучаемого признака; в) найти доверительный интервал для ожидаемого среднего значения a обхвата груди на уровне надежности $\gamma = 0{,}9108$, вероятность того, что величина признака X у выбранного случайным образом ребенка окажется в пределах от $\alpha = 58$ см до $\beta = 66$ см.

Решение. а) Вычисления будем вести в табличном виде. В рассматриваемой задаче область наблюдаемых значений признака X разбита на $m = 6$ непересекающихся и одинаковых по длине интервалов (столбец 1). В столбце 2 приведено распределение числа n_k наблюдений по этим интервалам

X, см	n_k	$\tilde{x}_k$	w_k	$\tilde{x}_k w_k$	$(\tilde{x}_k - \bar{x})$	$(\tilde{x}_k - \bar{x})^2$	$(\tilde{x}_k - \bar{x})^2 w_k$
1	2	3	4	5	6	7	8
56–58	28	57	0.1	5.7	–7.13	50.84	5.084
59–61	48	60	0.171	10.26	–4.13	17.06	2.916
62–64	70	63	0.25	15.75	–1.13	1.28	0.32
65–67	78	66	0.279	18.41	1.87	3.5	0.975
68–70	36	69	0.129	8.90	4.87	23.72	3.059
71–73	20	72	0.071	5.11	7.87	61.94	4.397
Итого	280		1,000	64,13			16,751

Построим гистограмму относительных частот для наблюдаемых значений признака X. Для этого определим среднее значение $\tilde{x}_k$ признака X для каждого k–го интервала по формуле $\tilde{x}_k = \frac{1}{2}(x_H(k) + x_B(k))$, где $x_H(k)$ и $x_B(k)$ — нижняя и верхняя границы k–го интервала. Полученные значения $\tilde{x}_k$ внесем в столбец 3.

Вычислим относительную частоту $w_k = \frac{n_k}{n}$ попадания величины признака X в k–ый интервал, где n_k — число наблюдений в k–м интервале; $n = \sum n_k$ — общее число наблюдений. Полученные значения w_k внесем в столбец 4. Проверка $\sum w_k = 1$. Гистограмма относительных частот показана на рис. 27.10.

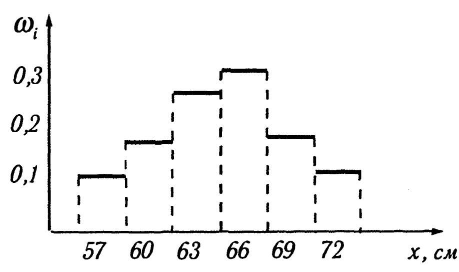


Рис. 27.10

б) Выборочное среднее $\bar{x}$, стандартное отклонение σ_B и коэффициент вариции υ признака X определим по формулам

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_k w_k; \quad \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 w_k}; \quad \upsilon = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} 100\%.$$

Вычислим произведения $\tilde{x}_k w_k$, внесем их в столбец 5 и найдем сумму $\bar{x} = 64{,}13$.

Вычислим отклонения $\tilde{x}_k - \bar{x}$ и внесем их в столбец 6. В столбце 7 запишем квадраты $(\tilde{x}_k - \bar{x})^2$ этих отклонений. Определим произведения $(\tilde{x}_k - \overline{x})^2 w_k$, внесем их в столбец 8 и найдем сумму $\sum = 16,751$. Откуда $\sigma_B = \sqrt{16,751} = 4,09$; $v = \dfrac{4,09 \cdot 100\%}{64,13} = 6,38\%$.

в) Поскольку объем выборки достаточно велик ($n > 30$), то величину предельной ошибки выборки Δ определяем по формуле $\Delta = t_\gamma \dfrac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$, где t_γ — есть $\gamma\%$ –ная критическая точка нормального распределения и находится из уравнения

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,9108}{2} = 0,4554;$$

$t_\gamma = 1,7$ из табл.3. Тогда

$$\Delta = 1,7\frac{4,09}{\sqrt{280}} = 0,42.$$

Доверительный интервал для ожидаемого среднего значения a обхвата груди у детей рассматриваемой группы определяется неравенством $\overline{x} - \Delta < a < \overline{x} + \Delta$ или $64,13 - 0,42 < a < 64,13 + 0,42$. Откуда $13,71 < a < 64,55$.

Будем полагать, что случайная изменчивость признака X описывается законом нормального распределения с параметрами a и σ, и воспользуемся точечными оценками величин этих параметров: $a \simeq 64,13$ и $\sigma \simeq \sigma_B = 4,09$. Используя соотношение

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

и учитывая нечетность функции Лапласа, имеем

$$P(58 < X < 66) = \Phi\left(\frac{66 - 64,13}{4,09}\right) - \Phi\left(\frac{58 - 64,13}{4,09}\right) =$$

$$= \Phi(0,46) + \Phi(1,5) = 0,1772 + 0,4332 = 0,6104.$$

27.6. Моменты, асимметрия и эксцесс

1°. *Моментом k–го порядка* называется среднее арифметическое из k–х степеней отклонений значений признака от C

$$v_k = \left(\sum n_i \left(x_i - C\right)^k\right)/n,$$

где x_i — наблюдаемая варианта; n_i — частота варианты; $n=\sum n_i$ — объем выборки; C — произвольное постоянное число.

Если $C = 0$, то момент называется *начальным*. Нетрудно заметить, что начальный момент первого порядка есть выборочная средняя

$$\bar{x} = \left(\sum n_i x_i\right)/n.$$

Если $C = \bar{x}$, то момент называется *центральным порядка k*

$$\mu_x = \left(\sum n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^k\right)/n.$$

Нетрудно заметить, что центральный момент первого порядка равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии.

Между центральными и начальными моментами существует зависимость

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2;$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^2;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4. \qquad (1)$$

2°. *Асимметрия распределения* определяется равенством

$$\alpha = \mu_3 / \sigma^3 \qquad \left(\alpha \in \left]-\infty, +\infty\right[\ \right) \qquad (2)$$

и является показателем отклонения распределения признака X от симметрии относительно $\bar{x}$. При $\alpha = 0$ — распределение симметрично.

3°. *Эксцессом* называется величина

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad \left(\varepsilon \in \left[-3, +\infty\right[\ \right). \tag{3}$$

Эксцесс характеризует степень крутости кривой распределения признака X по сравнению с кривой нормального распределения. При $\varepsilon = 0$ — распределение нормально. Если $\varepsilon > 0$, то кривая распределения имеет более острую вершину, чем нормальное; если $\varepsilon < 0$ — более плоскую вершину, чем нормальная кривая.

6.1. Дано распределение признака X

x_i	–2	–1	0	1	3	5
n_i	1	3	7	6	2	1

Найти асимметрию и эксцесс.

Решение. Начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков данного распределения находим, пользуясь расчетами в табличном виде

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$n_i x_i^3$	$n_i x_i^4$
–2	1	–2	4	–8	16
–1	3	–3	3	–3	3
0	7	0	0	0	0
1	6	6	6	6	6
3	2	6	18	54	162
5	1	5	25	125	625
Σ	20	12	56	174	812

Отсюда $\nu_1 = \frac{12}{20} = 0,6;\quad \nu_2 = \frac{56}{20} = 2,8;\quad \nu_3 = \frac{174}{20} = 8,7;\quad \nu_4 = 40,6.$

Центральные моменты вычисляем по формулам (1):

$$\mu_2 = 2{,}8 - (0{,}6)^2 = 2{,}44;$$

$$\mu_3 = 8{,}7 - 3\cdot 0{,}6\cdot 2{,}8 + 2(0{,}6)^3 = 4{,}092;$$

$$\mu_4 = 40{,}6 - 4\cdot 0{,}6\cdot 8{,}7 + 6(0{,}6)^2\cdot 2{,}8 - 3(0{,}6)^4 = 25{,}3792.$$

Асимметрия (2) равна $\alpha = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \dfrac{4{,}092}{\left(\sqrt{2{,}44}\right)^3} = 1{,}07365.$

Эксцесс находим по формуле (3)

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{25{,}3792}{(2{,}44)^2} = 4{,}2628.$$

27.7. Условные варианты. Метод расчета сводных характеристик выборки

1°. *Равностоящими* называются варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с одинаковой разностью h между любыми двумя соседними вариантами.

Условными называются варианты, определяемые по формуле

$$u_i = (x_i - C)/h, \tag{1}$$

где C — произвольное постоянное число.

Если вариационный ряд состоит из равностоящих вариант с шагом h, то условные варианты целые числа.

Условным моментом k–го порядка называется начальный момент порядка k, вычисленный по формуле

$$v'_k = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\dfrac{x_i - C}{h}\right)^k}{n} = \frac{v_k}{h^k}. \tag{2}$$

Обычный момент равен условному, умноженному на h^k, т. е. $v_k = v'_k\, h^k$.

Центральные моменты через условные определяются равенствами:

$$\mu_2 = \left(v'_2 - (v'_1)^2\right) \cdot h^2,$$

$$\mu_3 = \left(v'_3 - 3v'_2 v'_1 + 2(v'_1)^3\right) \cdot h^3, \tag{3}$$

$$\mu_4 = \left(v'_4 - 4v'_3 v'_1 + 6v'_2 (v'_1)^2 - 3(v'_1)^4\right) \cdot h^4.$$

Выборочная средняя и дисперсия по условным моментам определяются, соответственно, равенствами

$$\overline{x} = v'_1 h + C \quad \text{и} \quad D = (v'_2 - (v'_1)^2) \cdot h^2. \tag{4}$$

2°. Вычисление центральных моментов по условным целесообразно выполнять методом произведений в табличном виде по следующей схеме:

1) первый столбец таблицы содержит заданные варианты;

2) второй — заданные частоты;

3) третий столбец содержит условные варианты, вычисленные по формуле (1), причем за C выбирается варианта, расположенная в середине вариационного ряда;

4) четвертый столбец содержит $n_i u_i$, пятый — $n_i u_i^2$, шестой — $n_i (u_i + 1)^2$.

5) шестой столбец служит для контроля, т.к.

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n.$$

Если требуется найти моменты четвертого порядка, то в седьмом столбце помещают $n_i u_i^3$, в восьмом — $n_i u_i^4$ и девятом $n_i (u_i + 1)^4$.

Контролем в данном случае будет выражение

$$\sum n_i (u_i + 1)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n.$$

Если первоначальные варианты не являются равностоящими, то для сведения их к равностоящим весь интервал, в котором они заключены, делят на несколько равных частотных интервалов. Середины частотных интервалов образуют равностоящие варианты. За частоту каждой равностоящей варианты принимают сумму частот, попавших в соответствующий частотный интервал.

7.1. Методом произведений **найти** асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки

x_i	6	8	10	12	14	16
n_i	4	16	50	18	10	2

Решение. Составим расчетную таблицу. В качестве ложного нуля C выберем варианту (10), которая имеет наибольшую частоту и в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей ложный нуль, пишем 0 и над нулем последовательно записываем –1, –2, а под нулем последовательно записываем 1, 2, 3. Последовательность расчета приведена в таблице

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
6	4	–2	–8	16	4	–32	64	4
8	16	–1	–16	16	0	–16	16	0
10	50	0	0	0	50	0	0	50
12	18	1	18	18	72	18	18	288
14	10	2	20	40	90	80	160	810
16	2	3	6	18	32	54	162	512
$\sum$	100		20	108	248	104	420	1664

Последний столбец служит для контроля вычислений

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n=$$

$$=420+4\cdot 104+6\cdot 108+4\cdot 20+100=1664.$$

Найдем условные моменты

$$v'_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{20}{100} = 0,2; \quad v'_2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{108}{100} = 1,08;$$

$$v'_3 = \frac{\sum n_i u_i^3}{n} = \frac{104}{100} = 1,04; \quad v'_4 = \frac{\sum n_i u_i^4}{n} = \frac{420}{100} = 4,20.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$\mu_3 = \left(v'_3 - 3v'_2\, v'_1 + 2\left(v'_1\right)^3\right)\cdot h^3 =$$

$$= (1,04 - 3\cdot 1,08\cdot 0,2 + 2\cdot 0,2^3)\cdot 2^3 = 3,264;$$

$$\mu_4 = \left(v'_4 - 4v'_3\, v'_1 + 6v'_2\left(v'_1\right)^2 - 3\left(v'_1\right)^4\right)\cdot h^4 =$$

$$= \left(4,2 - 4\cdot 1,04\cdot 0,2 + 6\cdot 1,08\cdot 0,2^2 - 3\cdot 0,2^4\right)\cdot 2^4 = 57,952.$$

Выборочная дисперсия по условным моментам равна

$$D = \left(v'_2 - \left(v'_1\right)^2\right)h^2 = (1,08 - 0,04)4 = 4,16.$$

Таким образом, асимметрия и эксцесс будут

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{3,264}{\sqrt{4,16^3}} = 0,38.$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{57,952}{\sqrt{4,16^4}} - 3 = 0,35.$$

27.8. Элементы теории корреляции

1°. В массовых явлениях некоторому значению одной величины x соответствует распределение значений другой y, причем с различными вероятностями.

Связь такого характера называется *статистической* и, как правило, задается таблицей распределения или корреляционной таблицей, связывающей значения переменных.

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_n	n_x
x_1	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	...	$n_{1,n}$	n_{x1}
x_2	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	...	$n_{2,n}$	n_{x2}
...	...	...	...	...	...
x_m	$n_{m,1}$	$n_{m,2}$	...	$n_{m,n}$	n_{xm}
n_y	n_{y1}	n_{y2}	...	n_{yn}	N

Во внутренних клетках таблицы обозначены частоты появления переменной x_i (i=1,...,m), соответствующей переменной y_j (j=1,...,n). Суммы чисел $n_{i,j}$ по строкам представляют частоты соответствующих значений переменной x_i. Так

$$\sum n_{1,j} = n_{1,1} + n_{1,2} + \ldots + n_{1,n} = n_{x_1}$$

$$\sum n_{2,j} = n_{2,1} + n_{2,2} + \ldots + n_{2,n} = n_{x_2}, \ldots$$

Суммы чисел по столбцам представляют частоты соответствующих значений переменной y_i

$$\sum n_{i,1} = n_{1,1} + n_{2,1} + \ldots + n_{m,1} = n_{y_1}$$

$$\sum n_{i,2} = n_{1,2} + n_{2,2} + \ldots + n_{m,2} = n_{y_2}, \ldots$$

причем $\sum n_x = \sum n_y = N$.

Математическая обработка корреляционной таблицы позволяет установить форму корреляционной связи между переменными x и y и тесноту этой связи. Найденные из этой таблицы пары соответствующих значений $\bar{y}_x$ и x (y по x) или $\bar{x}_y$ и y (x по y) используются для отыскания параметров уравнений регрессии.

Методы математического описания анализа корреляционных (стохастических) связей между признаками рассматриваются в разделах корреляционного и регрессионного анализа математической статистики.

Уравнение $M_x(Y)=f(x)$, описывающее зависимость условного математического ожидания случайной величины Y при заданном $X=x$, называется *уравнением регрессии* Y на X, а график этого уравнения на плоскости будет *линией регрессии.* Корреляционная связь между X и Y характеризуется двумя параметрами: формой связи и теснотой этой связи. Форма корреляционной связи определяется формой линии регрессии.

Различают положительную и отрицательную, линейную и нелинейную корреляцию. Теснота связи характеризуется степенью случайного разброса величин признака Y вокруг линии регрессии, чем меньше разброс, тем связь будет теснее.

2°. В случае линейной корреляции уравнения прямых регрессии имеют вид

$$\bar{y}_x = ax+b \text{ и } \bar{x}_y = cy+d. \tag{1}$$

Система нормальных уравнений для отыскания параметров a и b уравнения прямой регрессии y по x, получаемая в результате использования метода наименьших квадратов, имеет вид

$$\begin{cases} a\sum n_x x^2 + b\sum n_x x = \sum n_x x\bar{y}_x, \\ a\sum n_x x + b\sum n_x = \sum n_x \bar{y}_x \quad , \end{cases} \tag{2}$$

а для отыскания параметров c и d уравнения прямой регресии x по y

$$\begin{cases} c\sum n_y y^2 + d\sum n_y y = \sum n_y y\,\bar{x}_y, \\ c\sum n_y y + d\sum n_y = \sum n_y \bar{x}_y \;. \end{cases} \tag{3}$$

3°. Схема расчета. Расчет удобнее вести в табличном виде:

1	2	3	4	5	6	7
x_i ...	n_x ...	$n_x x$ ...	$n_x x^2$ ...	$\overline{y}_x$ ...	$n_x \overline{y}_x$ ...	$n_x x\,\overline{y}_x$ ...
Σ	N	$\Sigma\, n_x x$	$\Sigma\, n_x x^2$	$\Sigma\, \overline{y}_x$	$\Sigma\, n_x \overline{y}_x$	$\Sigma\, n_x x\,\overline{y}_x$

а) для каждого значения x_i находим сумму частот и располагаем их во втором столбце;

б) третий столбец равен произведению членов первых двух столбцов, а четвертый равен произведению членов второго на квадраты первого, соответственно;

в) в пятом столбце для каждого значения x_i корреляционной таблицы находим среднее значение $\overline{y}_x$ по правилу определения средней взвешенной

$$\overline{y}_x = \frac{\sum n_{x_i} y_{x_i}}{n_x},$$

где n_x — частота появления значения x_i, y_{x_i} — соответствующее значению x_i при данной частоте значение переменной y;

г) шестой столбец равен произведению членов второго и пятого, а седьмой третьего и пятого.

Поскольку

$$\sum n_x x = N\overline{x}, \quad \sum n_x x^2 = N\overline{x^2}, \quad \sum n_x \overline{y}_x = N\overline{y}, \tag{4}$$

$$\sum n_x x\overline{y}_x = N\overline{xy},$$

то после сокращения на N система (2) примет вид

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy}, \\ a\overline{x} + b = \overline{y}. \end{cases} \tag{5}$$

Откуда уравнение прямой регрессии y по x имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{y/x}(x - \overline{x}), \tag{6}$$

здесь $\rho_{y/x} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$ — коэффициент прямой регрессии y по x.

Аналогично, уравнение прямой регрессии x по y

$$\overline{x}_y - \overline{x} = \rho_{x/y}(y - \overline{y}), \tag{7}$$

где $\rho_{x/y} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{y^2} - \overline{y}^2}$ — коэффициент прямой регрессии x по y;

$$\overline{y} = \frac{\sum n_y y}{N}; \quad \overline{y^2} = \frac{\sum n_y y^2}{N}; \quad \overline{x} = \frac{\sum n_y \overline{x}_y}{N};$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum n_y y \overline{x}_y}{N}; \quad N = \sum n_y. \tag{8}$$

Если ввести коэффициент корреляции, характеризующий меру тесноты линейной корреляционной связи

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (|r| < 1) \tag{9}$$

то коэффициенты регрессии примут вид

$$\rho_{y/x} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \qquad \rho_{x/y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \tag{10}$$

где $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$ — дисперсии соответствующих рядов распределений. Если $r < 0{,}4$, то считают, что линейной корреляции между x и y нет. Чем $|r|$ ближе к единице, тем теснее связь между переменными.

3°. Упрощенный способ вычисления коэффициента корреляции. При постоянных разностях Δx и Δy в таблице распределения вычисления значительно упрощаются, если перейти к новым переменным

$$u = \frac{x - x_0}{\Delta x}, \quad \upsilon = \frac{y - y_0}{\Delta y}, \tag{11}$$

где x_0, y_0 — произвольно выбираемые значения переменных x и y (обычно их средние или ближайшие к ним).

Вычисление коэффициентов корреляции и коэффициентов регрессии сводится к аналогичным операциям над новыми переменными u и v (со значительно меньшими по абсолютной величине числами). Так

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\sigma_u \sigma_v},$$

$$\rho_{y/x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\overline{u^2} - \overline{u}^2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\sigma_v}{\sigma_u} r, \qquad (12)$$

$$\rho_{x/y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\overline{v^2} - \overline{v}^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\sigma_u}{\sigma_v} r.$$

Новые переменные u, v помещают в исходной таблице, соответственно, u — слева от соответствующих значений x, а v — над соответствующими значениями y.

Если линейная корреляция обнаруживает малую тесноту связи $r = 0{,}4 - 0{,}6$, то следует обратиться к криволинейной корреляции.

4°. Если корреляционная зависимость между значениями x и y корреляционной таблицы близка к параболической, то уравнение регрессии примет вид

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c, \qquad (13)$$

где параметры a, b, c на основании метода наименьших квадратов определяются из решения системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} a\sum n_x x^4 + b\sum n_x x^3 + c\sum n_x x^2 = \sum x^2 n_x \overline{y}_x, \\ a\sum n_x x^3 + b\sum n_x x^2 + c\sum n_x x = \sum x n_x \overline{y}_x, \\ a\sum n_x x^2 + b\sum n_x x + cN = \sum n_x \overline{y}_x. \end{cases}$$

5°. В случае корреляционной зависимости гиперболического типа уравнение регрессии имеет вид

$$\overline{y}_x = a + \frac{b}{x}, \tag{15}$$

где параметры a, b определяются из решения системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} \sum n_x \overline{y}_x = aN + b\sum n_x \cdot \frac{1}{x}, \\ \sum n_x \frac{\overline{y}_x}{x} = a\sum \frac{n_x}{x} + b\sum \frac{n_x}{x^2}. \end{cases} \tag{16}$$

При составлении системы нормальных уравнений (14), (16) необходимые данные целесообразно вычислять в табличном виде.

8.1. Дана корреляционная таблица

x \ y	11	21	31	41	51	n_x
15	2	3	–	–	–	5
20	–	4	6	–	–	10
25	–	4	10	3	–	17
30	–	2	16	10	–	28
35	–	–	8	12	5	25
40	–	–	–	8	7	15
n_y	2	13	40	33	12	100

Найти уравнение прямой регрессии: а) y по x ; б) x по y.

Решение. а) Проведем расчет в табличном виде

x_i	n_x	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$\overline{y}_x$	$n_x \cdot \overline{y}_x$	$n_x \cdot x \cdot \overline{y}_x$
15	5	75	1125	17	85	1275
20	10	200	4000	27	270	5400
25	17	425	10625	30,41	516,97	12924,25

30 35 40	28 25 15	840 875 600	25200 30625 24000	33,86 39,8 45,66	948,08 995 684,9	28442,4 34825 27396
$\sum$	100	3015	95575	193,74	3499,95	110262,65

По данным таблицы и формулам (4) $\bar{x} = \frac{\sum n_x x}{100} = 30,15;$

$\bar{x}^2 = 909,0225;$ $\bar{y} = \frac{\sum n_x \bar{y}_x}{100} = 34,999;$ $\overline{x^2} = \frac{\sum n_x x^2}{100} = 955,75;$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = 1055,23;$ $\overline{xy} = \frac{\sum n_x x \bar{y}_x}{100} = 1102,63.$

Коэффициент регрессии y по x равен

$$\rho_{y/x} = \frac{1102,63 - 1055,23}{955,75 - 909,0225} = 1,014.$$

Таким образом, уравнение прямой регрессии y по x (6) примет вид $\bar{y}_x - 34,999 = 1,014(x - 30,15)$ или $\bar{y}_x = 1,014 + 4,4269.$

б) При определении прямой регрессии x по y составим вспомогательную таблицу

y_i	n_y	$n_y \cdot y$	$n_y \cdot y^2$	$\bar{x}_y$	$n_y \bar{x}_y$	$n_y y \bar{x}_y$
11 21 31 41 51	2 13 40 33 12	22 273 1240 1353 612	242 5733 38440 55473 31212	15 21,923 28,25 33,788 30,333	30 284,999 1130 1115,004 363,9996	330 5984,98 37510 45715,164 18563,979
$\sum$	100	3500	131100	131,29	3004,0026	108104,12

По данным таблицы и формулам (8) $\bar{x} = \frac{\sum n_y \bar{x}_y}{100} = 30,04;$

$$\overline{y} = \frac{\sum n_y y}{100} = 35; \quad \overline{y}^2 = 1225; \quad \overline{y^2} = \frac{\sum n_y y^2}{100} = 1311;$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = 1051,4; \quad \overline{xy} = \frac{\sum n_y y \overline{x}_y}{100} = 1081,0412.$$

Коэффициент регрессии x по y равен

$$\rho_{x/y} = \frac{1081,04 - 1051,4}{1311 - 1225} = 0,34465.$$

Уравнение прямой регрессии x по y (7) примет вид

$$\overline{x}_y - 30,04 = 0,34465(y - 35),$$

$$\overline{x}_y = 0,34465y + 17,97725.$$

8.2. Пользуясь таблицей распределения задачи 8.1, **найти** упрощенным способом коэффициент корреляции и уравнения прямых регрессий.

Решение. Дополним заданную корреляционную таблицу соответствующими значениями u и v, полагая, что $x_0 = 30$, $y_0 = 31$.

	v	-2	-1	0	1	2	
u	$x \backslash y$	11	21	31	41	51	n_x
-3	15	2	3	–	–	–	5
-2	20	–	4	6	–	–	10
-1	25	–	4	10	3	–	17
0	30	–	2	16	10	–	28
1	35	–	–	8	12	5	25
2	40	–	–	–	8	7	15
	n_y	2	13	40	33	12	100

Составляем вспомогательные таблицы

u	n_x	$n_x u$	$n_x u^2$	$n_x \overline{v}_u$	$u n_x \overline{v}_u$
–3	5	–15	45	–7	21
–2	10	–20	40	–4	8
–1	17	–17	17	–1	1
0	28	0	0	8	0
1	25	25	25	22	22
2	15	30	120	22	44
$\sum$	100	3	247	40	96

v	n_y	$n_y v$	$n_y v^2$
–2	2	–4	8
–1	13	–13	13
0	40	0	0
1	33	33	33
2	12	24	48
$\sum$	100	40	102

По данным расчетов находим: $N = 100$;

$$\overline{u} = \frac{\sum n_x u}{N} = 0,03; \quad \overline{v} = \frac{\sum n_y v}{N} = 0,04; \quad \overline{u^2} = \frac{\sum n_x u^2}{N} = 2,47;$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_y v^2}{N} = 1,02; \quad \overline{u}^2 = 0,0009; \quad \overline{v}^2 = 0,16; \quad \overline{uv} = \frac{\sum u n_x \overline{v}_u}{N} = 0,96.$$

Учитывая, что $\Delta x = 5$, $\Delta y = 10$ и средние значения новых переменных $\overline{u} = 0,03$, $\overline{v} = 0,4$, находим средние значения старых переменных

$$\overline{x} = x_0 + \overline{u}\Delta x = 30 + 0,03 \cdot 5 = 30,15;$$

$$\overline{y} = y_0 + \overline{v}\Delta y = 31 + 0,4 \cdot 10 = 35.$$

Незначительное расхождение со значениями $\overline{x}$ и $\overline{y}$, вычисленных в задаче 8.1., связано с приближенным характером вычислений и является подтверждением правильности упрощенного способа расчета.

Находим средне квадратические отклонения

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \overline{u}^2} = \sqrt{2,47 - 0,0009} = 1,571337;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \overline{v}^2} = \sqrt{1,02 - 0,16} = 0,9273618.$$

Отсюда коэффициент корреляции

$$r = \frac{\overline{uv} - \overline{u} \cdot \overline{v}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{0,96 - 0,03 \cdot 0,4}{1,571337 \cdot 0,9273618} = 0,6505635,$$

а коэффициенты регрессии

$$\rho_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\sigma_v}{\sigma_u} \cdot r = \frac{10}{5}\frac{0,9273618}{1,571337} \cdot 0,6505635 = 0,7678909,$$

$$\rho_{x/y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{\sigma_u}{\sigma_v} \cdot r = \frac{5}{10}\frac{1,571337}{0,9273618} \cdot 0,6505635 = 0,5511626.$$

Уравнение прямой регрессии y по x примет вид:

$$\overline{y}_x - 35 = 0,7678(x - 30,15) \text{ или } \overline{y}_x = 0,7678x + 11,85,$$

а x по y

$$\overline{x}_y - 30,15 = 0,5511626(y - 35) \text{ или } \overline{x}_y = 0,5511626y + 10,859.$$

8.3. Дана корреляционная таблица

x \ y	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	2	4	7	–	–	–	–	–	–
1,5	–	7	13	8	–	–	–	–	–
2,0	–	2	4	5	5	–	–	–	–
2,5	–	1	1	5	6	–	–	–	–
3,0	–	–	–	–	1	2	2	1	–
3,5	–	–	–	–	–	–	1	2	1

Найти уравнение регрессии y по x, полагая корреляционную зависимость параболической.

Решение. Для составления системы нормальных уравнений (14) необходимые данные находятся суммированием, выполненным в табличном виде

x_i	n_x	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x \cdot \overline{y}_x$	$n_x \cdot x \cdot \overline{y}_x$	$n_x \cdot x^2 \cdot \overline{y}_x$
1	13	13	13	13	13	44	44	44
1,5	28	42	63	94,5	141,75	113	169,5	254,25
2,0	16	32	64	128	256	77	154	308
2,5	13	32,5	81,25	203,125	507,8125	68	170	425
3,0	6	18	54	162	486	45	135	405
3,5	4	14	49	171,5	600,25	36	126	441
$\sum$	80	151,5	324,25	772,125	2004,8125	383	798,5	1877,25

По результатам таблицы система нормальных уравнений имеет вид:

$$2004{,}8125a + 772{,}125b + 324{,}25c = 1877{,}25;$$

$$772{,}125a + 324{,}25b + 151{,}5c = 798{,}5;$$

$$324{,}25a + 151{,}5b + 80c = 383.$$

Решая систему, находим, что a = 0,47, b = –1091,45, c = 2069,82.

Таким образом, искомое уравнение будет

$$\overline{y}_x = 0{,}47x^2 - 1091{,}45x + 2069{,}82.$$

8.4. Корреляционная таблица отражает связь между значениями x и соответствующими частными средними $\overline{y}_x$

x	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12
$\overline{y}_x$	15	12	12	11	10	9
n_x	7	6	8	6	4	2

Найти корреляционное уравнение связи.

Решение. Прибрасывая зависимость между $\overline{y}_x$ и x на графике рис. 27.11, считаем, что наиболее близко соответствует уравнение гиперболы (15). Данные для составления нормальной системы уравнений (16) находим в табличной форме.

x	$\overline{y}_x$	n_x	$\frac{n_x}{x}$	$\frac{n_x}{x^2}$	$n_x\overline{y}_x$	$n_x\frac{\overline{y}_x}{x}$
1	15	7	7	7	105	105
3	12	6	2	0,6666	72	24
5	12	8	1,6	0,32	96	19,2
7	11	6	0,856	0,122	66	9,428
9	10	4	0,444	0,049	40	4,444
11	9	2	0,182	0,016	18	1,636
$\sum$		33	12,083	8,174	397	164,9

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$33\,a + 12{,}083\,b = 397;$$

$$12{,}083\,a + 8{,}174\,b = 164{,}9.$$

Решая эту систему, получим: $a = 10{,}122$; $b = 5{,}21$.

Искомое уравнение примет вид

$$\overline{y}_x = 10{,}122 + \frac{5{,}21}{x}.$$

Соответствующая этому уравнению кривая регрессии показана на рис. 27.11.

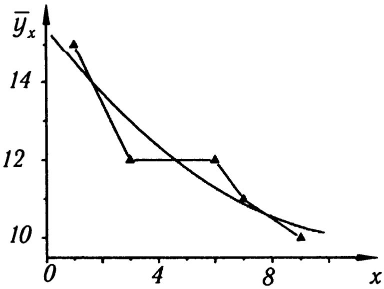


Рис. 27.11

8.5. При изучении зависимости выработки y (тыс. руб.) на одного работника торговли от величины товарооборота x (тыс. руб.) магазина за отчетный период обследовалось $n = 10$ магазинов торга и были получены следующие данные

x_i	80	55	75	110	85	70	40	100	50	95
y_i	4,4	4,0	3,7	5,7	4,2	3,8	3,1	4,3	3,8	5,0

Полагая, что между признаками x и y имеет место линейная корреляционная связь, **определить** выборочное уравнение линейной регрессии, выборочный коэффициент линейной корреляции и построить диаграмму рассеяния и линию регрессии. Сделать вывод о направлении и тесноте связи между признаками x и y. Используя полученное уравнение регрессии, оценить ожидаемое среднее значение признака y при $x^* = 60$ тыс. руб.

Решение. Построим диаграмму рассеяния (рис. 27.12).

Из диаграммы видно, что между признаками x и y действительно наблюдается линейная корреляция.

Составим исходную расчетную таблицу и найдем суммы по всем ее столбцам

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
80	4,4	6400	19,36	352
55	4,0	3025	16,00	220
75	3,7	5625	13,69	277,5
110	5,7	12100	32,49	627
85	4,2	7225	17,64	357
70	3,8	4900	14,44	266
40	3,1	1600	9,61	124
100	4,3	10000	18,49	430
50	3,8	2500	14,44	190
95	5,0	9025	25,00	475
760	42,0	62400	181,16	3318,5

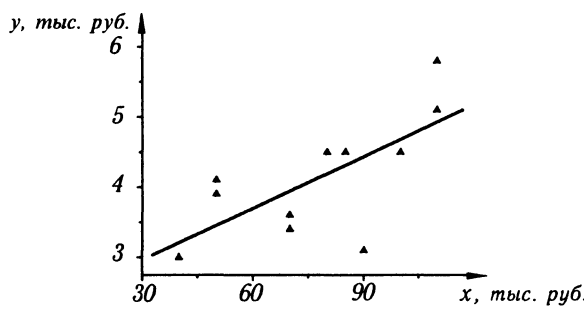


Рис. 27.12

Используя полученные суммы по столбцам, вычислим исходные статистические характеристики

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x = \frac{760}{10} = 76; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y = \frac{42}{10} = 4{,}2;$$

$$\sigma_x = \sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2 = 62400 - 57760 = 4640;$$

$$\sigma_y = \sum y^2 - \frac{1}{n}(\sum y)^2 = 181,16 - 176,4 = 4,76;$$

$$\sigma_{xy} = \sum xy - \frac{1}{n}(\sum x \cdot \sum y) = 3318,5 - 3192 = 126,5.$$

Определим параметры $\overline{y}$ и $\rho_{x/y}$ уравнения линейной регрессии $\overline{y}_x = \overline{y} + \rho_{x/y}(x - \overline{x})$ и величину r

$$\overline{y} = 4,2; \quad \rho_{x/y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} = \frac{126,5}{4640} \simeq 0,027;$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} = \frac{126,5}{\sqrt{4640 \cdot 4,76}} = \frac{126,5}{148,61} \simeq 0,85.$$

Выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\overline{y}_x = 4,2 + 0,027(x - 76) \text{ или } \overline{y}_x = 0,027x + 2,15.$$

Проведем анализ полученных результатов. Расчеты подтвердили, что между производительностью труда y и объемом товарооборота x магазина при изучении группы предприятий торговли наблюдается положительная линейная корреляция. Теснота связи между признаками высокая ($r = 0,85$)

Подставляя $x^* = 60$ тыс. руб. в полученное уравнение регрессии, находим ожидаемое среднее значение производительности труда для предприятий с объемом товарооборота 60 тыс. руб.

$$\overline{y}_{60} = 0,027 \cdot 60 + 2,15 = 1,62 + 2,15 = 3,77 \text{ тыс.руб.}$$

Глава 28
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

28.1. Основные понятия

1°. *Статистической гипотезой* называется гипотеза о виде неизвестного распределения или о характеристиках известных распределений.

Различают нулевую H_0 (основную) гипотезу, которая выдвигается, и противоположную ей гипотезу, которая называется конкурирующей H_1.

В результате статистической проверки выдвинутой гипотезы могут быть ошибки двух видов. Ошибка первого вида заключается в том, что отвергается правильная гипотеза, а ошибка второго вида, что принимается неправильная гипотеза. Вероятность ошибки первого вида называется уровнем значимости, который принимается обычно равным $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$.

2°. Для проверки статистической гипотезы используется статистический критерий K. Множество значений критерия, при которых нулевая гипотеза принимается, образует область принятия гипотезы. Множество значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, образует критическую область.

Таким образом, если статистический критерий принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают, если статистический критерий принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают. Все возможные значения критерия принадлежат некоторому интервалу.

3°. Для определения критической области задаются достаточно малой вероятностью (уровнем значимости α).

Если $P(K > k_{кр}) = \alpha$, где $k_{кр}$ — критическая точка, отделяющая критическую область от области принятия гипотезы, то K определяет такие значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Значения $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$, определяют правостороннюю критическую область.

Если $P(K < k_{кр}) = \alpha$ $(k_{кр} < 0)$, то значения K определяют левостороннюю критическую область.

Если $P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}$ $(k_{кр} > 0)$ и $P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}$, то значения K определяют двустороннюю симметричную относительно нуля область.

28.2. Сравнения двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

1°. Пусть по двум независимым выборкам с объемами n_1 и n_2, извлеченными из нормальных генеральных совокупностей X, Y, найдены исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей H_0: $D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гипотезе а) $H_1: D(X) > D(Y)$; б) $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

а) При вычислении наблюдаемого значения критерия $F_н$ находим отношение большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей $F_н = \frac{s_x^2}{s_y^2}$. По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (табл.6), при заданном уровне значимости α и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, находим критическую точку $k_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F_н < k_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $F_н > k_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В этом случае рассматриваем двустороннюю критическую область. Правую критическую точку $k_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2)$ находим по таблице по уровню значимости $\alpha/2$ и числам степеней свободы k_1 и k_2. Если $F_н < k_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $F_н > k_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается. При решении практических задач достаточно находить только одну критическую точку (правую).

2°. Пусть гипотетическая (предполагаемая) дисперсия нормальной генеральной совокупности равна σ_0^2, а выборка объема n из генеральной совокупности имеет исправленную выборочную дисперсию s^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 гипотетическому значению σ_0^2, $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$; б) $H_1 : \sigma \neq \sigma_0^2$; в) $H_1 : \sigma < \sigma_0^2$.

а) Сначала по формуле $\chi_н^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ находят наблюдаемое значение критерия. Затем по таблице критических точек распределения χ^2 (табл. 7) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 1$ находят критическую точку $\chi_{кр}^2(\alpha, k)$. Если $\chi_н^2 < \chi_{кр}^2$ — нулевая гипотеза принимается, если $\chi_н^2 > \chi_{кр}^2$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае двусторонней критической области по табл. 7 находят правую $\chi_{п.кр}^2(\frac{\alpha}{2}, k)$ и левую $\chi_{л.кр}^2(1 - \frac{\alpha}{2}, k)$ критические точки. Если $\chi^2_{л.кр} < \chi^2_{н} < \chi^2_{п.кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $\chi^2_{н} < \chi^2_{л.кр}$ или $\chi^2_{н} > \chi^2_{п.кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

в) В случае левосторонней критической области по табл. 7 находят критическую точку $\chi^2_{кр}(1-\alpha,k)$. Если $\chi^2_{н} > \chi^2_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $\chi^2_{н} < \chi^2_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

3°. В случае, если число степеней свободы $k > 30$, то критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha,k)$ находят по формуле Уилсона-Гильфери

$$\chi^2_{кр}(\alpha,k) = k\left(1-\frac{2}{9k}+x\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3, \tag{1}$$

где x определяется по таблице (3) значений функции Лапласа, используя выражение $\Phi(x)=\frac{1}{2}(1-2\alpha)$.

2.1. По двум независимым выборкам объемов n_1=11 и n_2=14, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 21,5$ и $s_y^2 = 7,6$. При уровне значимости $a = 0,01$ **проверить** нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Решение. Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, то критическая область — правосторонняя. Находим наблюдаемое значение критерия $F_н = \frac{21,5}{7,6}$.

Определяем числа степеней свободы k_1=11 –1=10 и k_2=14 – –1=13. По таблице (6) критических точек распределения Фишера-Снедекора находим критическую точку $k_{кр}(0,01;10;13) = 4,1$.

Поскольку $F_н < k_{кр}$, то нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий принимаем.

2.2. В результате двух независимых измерений некоторой величины получены значения:

а) первым методом x_1=8,2; x_2=9,4; x_3=10; x_4=10,7; x_5= 9,6;

в) вторым методом y_1=10,1; y_2= 9,8; y_3= 9,3; y_4=10,5.

Предполагая, что результаты замеров распределены нормально, **можно ли считать** при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ оба метода одинаковой точности?

Решение. Точность методов будем определять их дисперсиями. Равенство генеральных дисперсий (нулевая гипотеза) $H_0 : D(X) = D(Y)$ обеспечивает одинаковую точность методов. Конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$, т. е. критическая область двусторонняя и при нахождении критических точек уровень значимости следует брать в два раза меньше $\alpha/2 = 0{,}05$.

Найдем выборочные дисперсии s_u^2, s_v^2. Для этого по формулам $u_i = 10x_i - 100$; $v_i = 10y_i - 100$ перейдем к условным вариантам

u_i	−18	−6	0	7	−4
v_i	1	−2	−7	5	

Таким образом, исправленные выборочные дисперсии

$$s_u^2 = \frac{\sum u_i^2 - \frac{1}{n_1}\left(\sum u_i\right)^2}{n_1 - 1} = \frac{(324+36+49+16) - \frac{1}{5}441}{5-1} = 84{,}2;$$

$$s_v^2 = \frac{\sum v_i^2 - \frac{1}{n_2}\left(\sum v_i\right)^2}{n_2 - 1} = \frac{(1+4+49+25) - \frac{1}{4}9}{4-1} = 25{,}58.$$

Здесь каждая из дисперсий увеличина в 10^2 раз. Найдем наблюдаемое значение критерия $F_н = \frac{s_u^2}{s_v^2}$, т. е. отношение большей исправленной дисперсии к меньшей $F_н = \dfrac{84,2}{25,58} = 3,29.$

По числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ и $k_2 = n_2 - 1 = 4 - 1 = 3$ и табл. 6 находим критическую точку $k_{кр}(0,05;4;3) = 9,12$. Поскольку $F_н < k_{кр}$, то нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий принимаем, т. е. считаем, что оба метода одинаковой точности.

2.3. Из нормальной генеральной совокупности извлечены выборка объема $n = 18$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 15,3$. Теоретически установлено, что генеральная дисперсия $\sigma_0^2 = 13,1$. При уровне значимости 0,05 **проверить** нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, если конкурирующая гипотеза $H_1 : \sigma^2 > 13,1$.

Решение. Конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : \sigma^2 > 13,1$, поэтому критическая область правосторонняя. Найдем наблюдаемое значение критерия $\chi_н^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(18-1)15,3}{13,1} = 19,585$. Число степеней свободы равно $k = n - 1 = 18 - 1 = 17$.

По таблице 7 находим критическую точку $\chi_{кр}^2(0,05;17) = 27,6$.

Поскольку $\chi_н^2 < \chi_{кр}^2$, то нулевую гипотезу о равенстве генеральной дисперсии гипотетическому значению $\sigma_0^2 = 13,1$ принимаем. Иначе, различие между исправленной дисперией $s^2 = 15,3$ и теоретической $\sigma_0^2 = 13,1$ незначительное.

2.4. Партия изделий проверяется по дисперсии выборки, которая не должна превышать $\sigma_0^2 = 0,15$. Выборка дала следующие результаты

контрольный размер изделий	x_i	5,6	6,0	6,4	5,8	6,2
частота	n_i	2	3	10	4	1

Можно ли принять партию при уровне значимости 0,05?

Решение. Примем за нулевую гипотезу равенство неизвестной генеральной дисперсии σ^2 гипотетическому значению σ_0^2, $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}15$, а за конкурирующую $H_1 : \sigma^2 \neq 0{,}15$. Критическая область в этом случае двусторонняя и при определении критических точек уровень значимости берем меньше в два раза $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$.

Найдем исправленную выборочную дисперсию. Для этого по формуле $u_i = 10x_i - 60$ перейдем к условным вариантам

u_i	–4	0	4	–2	2
n	2	3	10	4	1

Отсюда, вспомогательная дисперсия условных вариант

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_i u_i\right)^2}{n-1} = \frac{(32+160+16+4) - \frac{1}{20}26^2}{19} = 9{,}38.$$

Искомая исправленная дисперсия будет

$$s^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = 0{,}0938.$$

Таким образом, наблюдаемое значение критерия

$$\chi_н^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 0{,}0938}{0{,}15} = 11{,}88.$$

Число степеней свободы равно $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$. По таблице 7 находим правую $\chi^2_{п.кр}(0{,}025; 19) = 32{,}9$ и левую $\chi^2_{л.кр}(0{,}975; 19) = 8{,}91$ критические точки. Поскольку $\chi^2_{л.кр} < \chi^2_н < \chi^2_{п.кр}$, то нулевая гипотеза принимается и партию принять можно.

2.5. Партия деталей принимается, если дисперсия контролируемого размера меньше или равна 0,3. Если исправленная выборочная дисперсия при выборе $n = 124$ равна $s^2 = 0{,}2$, то **можно ли** при уровне значимости 0,05 партию принять?

Решение. Равенство неизвестной генеральной дисперсии σ^2 предполагаемого значения σ_0^2 принимаем за нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}3.$ За конкурирующую гипотезу принимаем $H_1 : \sigma^2 > 0{,}2,$ т. е. критическая область правосторонняя.

Наблюдаемое значение критерия

$$\chi_н^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{123 \cdot 0{,}2}{0{,}3} = 82.$$

Поскольку значение числа степеней свободы $k = 123$ больше 30, то критическую точку находим из выражения Уилсона-Гильферти (1). Учитывая, что уровень значимости $\alpha = 0{,}05,$ из равенства $\Phi(x) = \frac{1}{2}(1 - 2\alpha) = 0{,}45$ по табл. (3) значений функции Лапласа находим, что $x = 1{,}645$. Подставляя k и x в формулу (1), получим

$$\chi_{кр}^2(\alpha; k) = 123\left(1 - \frac{2}{9 \cdot 123} + 1{,}645\sqrt{\frac{2}{9 \cdot 123}}\right)^3 = 150{,}7.$$

Так как $\chi_н^2 < \chi_{кр}^2$, то нулевая гипотеза справедлива и партию деталей можно принять.

28.3. Сравнение двух средних генеральных совокупностей

1°. Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально и дисперсии их известны $D(X)$ и $D(Y)$. По выборкам большого объема $n > 30$ и $m > 30$ найдены соответствующие выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних двух нормальных генеральных совокупностей $H_0: M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1: M(X)\neq M(Y)$; б) $H_1: M(X)>M(Y)$; в) $H_1: M(X)<M(Y)$.

Сначала по формуле

$$Z_н = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{(D(X)/n+D(Y)/m)^{1/2}}, \tag{1}$$

находится наблюдаемое значение критерия.

а) По табл. (3) функции Лапласа из формулы $\Phi(z_{кр})=\frac{1}{2}(1-\alpha)$ находится критическая точка $z_{кр}$. Если $|Z_н|<z_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|Z_н|>z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае правосторонней критической области критическая точка определяется из равенства $\Phi(z_{кр})=\frac{1}{2}-\alpha$ по табл. (3). Если $Z_н<z_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $Z_н>z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

в) Критическую точку $z_{кр}$ находим аналогично пункту б). Если $Z_н>-z_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $Z_н<-z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

2°. Пусть по независимым выборкам малого объема $n<30$, $m<30$ найдены выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. Генеральные дисперсии неизвестны, но предполагаются одинаковыми. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних двух нормальных генеральных совокупностей $H_0: M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1: M(X)\neq M(Y)$; б) $H_1: M(X)>M(Y)$; в) $H_1: M(X)<M(Y)$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$T_н = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{((n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2)^{1/2}}\sqrt{k\frac{nm}{n+m}}, \qquad (2)$$

где $k = n+m-2$ — число степеней свободы.

а) По таблице (8) критических точек распределения Стьюдента при заданном числе степеней свободы k находится двусторонняя критическая точка $t_{д.кр.}(\alpha,k)$. Если $|T_н| < t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|T_н| > t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае правосторонней критической области по таблице (8) находят правостороннюю критическую точку $t_{пр.кр.}$. Если $|T_н| < t_{пр.кр.}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|T_н| > t_{пр.кр.}$ — нулевая гипотеза отвергается.

в) В случае левосторонней критической области находят сначала правостороннюю критическую точку по правилу б), затем определяют $t_{л.кр.} = -t_{пр.кр.}$. Если $T_н > -t_{пр.кр.}$ — нулевую гипотезу принимают, если $T_н < -t_{пр.кр.}$ — нулевую гипотезу отвергают.

3°. Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, причем ее дисперсия σ^2 известна. По выборке объема n найдена выборочная средняя $\bar{x}$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной средней a гипотетическому значению $a_0, H_0 : a = a_0$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1 : a \neq a_0$; б) $H_1 : a > a_0$; в) $H_1 : a < a_0$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$U_н = \frac{(\bar{x}-a_0)\cdot\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (3)$$

а) По таблице (3) функции Лапласа из формулы $\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2}(1-\alpha)$ находится критическая точка $u_{кр}$. Если

$|U_н| < u_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|U_н| > u_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае правосторонней критической области критическая точка определяется из равенства $\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha$ по таблице (3). Если $U_н < u_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $U_н > u_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

в) Критическую точку $u_{кр}$ находим аналогично по пункту б). Если $U_н > -u_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $U_н < -u_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

4°. Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, причем ее дисперсия неизвестна. По выборке объема n найдена выборочная средняя $\overline{x}$. Требуется при заданном уровне значимости a проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной средней α гипотетическому значению a_0, $H_0 : a = a_0$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1 : a \neq a_0$; б) $H_1 : a > a_0$; в) $H_1 : a < a_0$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$T_н = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}, \tag{4}$$

где $s = \dfrac{\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_i x_i\right)^2}{n-1}$ — исправленное среднее квадратическое отклонение.

а) По таблице (8) распределения Стьюдента при заданном числе степеней свободы $k = n - 1$ находится двусторонняя критическая точка $t_{д.кр.}(\alpha, k)$. Если $|T_н| < t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|T_н| > t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае правосторонней критической области по табл. (8) находят правостороннюю критическую точку $t_{пр.кр.}$. Если $T_н < t_{пр.кр.}$ — нулевая гипотеза принимается, если $T_н > t_{пр.кр.}$ — нулевая гипотеза отвергается.

в) В случае левосторонней критической области сначала находят правостороннюю критическую точку по правилу пункта б) и полагают $t_{л.кр.} = -t_{пр.кр.}$. Если $T_н > -t_{пр.кр.}$ — нулевую гипотезу принимают, если $T_н < -t_{пр.кр.}$ — нулевую гипотезу отвергают.

5°. Пусть генеральные совокупности X, Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. По выборкам одинакового объема n, варианты которых соответственно равны x_i и y_i, найдены разности вариант с одинаковыми номерами $d_i = x_i - y_i$. Тогда средняя разностей вариант с одинаковыми номерами будет $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum d_i$, а исправленное среднее квадратическое отклонение

$$s = \left(\frac{\sum d_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum d_i\right)^2}{n-1} \right)^{1/2}.$$

Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве двух средних нормальных совокупностей X и Y, т. е. $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$T_к = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s}. \qquad (5)$$

По таблице (8) распределения Стьюдента при заданном числе степеней свободы $k = n - 1$ находится двусторонняя критическая точка $t_{д.кр.}(\alpha, k)$. Если $|T_н| < t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|T_н| > t_{д.кр.}$ — нулевая гипотеза отвергается.

3.1. По двум независимым выборкам объема $n = 20$ и $m = 30$ найден средний размер изделий, соответственно, $\bar{x} = 95$ см, $\bar{y} = 105$ см. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 15$ см^2, $D(Y) = 21$ см^2. Предполагая, что случайные величины X и Y распределены нормально, **проверить**, при уровне значимости 0,01, нулевую гипотезу $H_0: M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X)\neq M(Y)$.

Решение. Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: M(X)\neq M(Y)$, то критическая область двусторонняя. По формуле (1) найдем наблюдаемое значение критерия

$$Z_н=\frac{95-105}{\sqrt{\frac{15}{20}+\frac{21}{30}}}=-8,53.$$

По таблице (3) функции Лапласа из формулы $\Phi(z_{кр})=\frac{1}{2}(1-\alpha)=\frac{1-0,01}{2}=0,495$ находим критическую точку $z_{кр}$=2,58. Поскольку $|Z_н|>z_{кр}$, нулевую гипотезу отвергаем, т. е. средние размеры изделий различаются значительно.

3.2. По двум независимым выборкам объема n = 8 и m =10

x_i	2,3	2,4	2,6	2,8	y_i	2,1	2,4	2,5
n_i	2	1	3	2	m_i	4	5	1

проверить гипотезу о равенстве средних размеров изделий $H_0: M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X)\neq M(Y)$, если уровень значимости α = 0,1 и случайные величины X, Y распределены нормально.

Решение. Найдем выборочные средние

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum n_i x_i=\frac{1}{8}(4,6+2,4+7,8+5,6)=2,55;$$

$$\overline{y}=\frac{1}{m}\sum m_i y_i=\frac{1}{10}(8,4+12,0+2,5)=2,29.$$

При вычислении исправленных дисперсий перейдем к условным вариантам $u_i=10x_i-26,\quad v_i=10y_i-24.$

Тогда

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_i u_i\right)^2}{n-1} = \frac{30 - \frac{1}{8}16}{7} = 4;$$

$$s_v^2 = \frac{\sum m_i v_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum m_i v_i\right)^2}{m-1} = \frac{37 - \frac{1}{10}121}{9} = 27,7.$$

Следовательно, $s_x^2 = \frac{s_u^2}{10} = 0,4;\quad s_y^2 = \frac{s_v^2}{10} = 2,77.$

Поскольку исправленные дисперсии различны, а по условию (2) должны быть одинаковы, то их необходимо сравнить, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Используя критерий Фишера–Снедекора, находим наблюдаемое значение критерия.

$$F_н = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0,4}{2,77} = 0,144.$$

По уровню значимости $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = n - 1 = 7$; $k_2 = m - 1 = 9$ из таблицы (6) находим $F_{кр}(0,05; 7; 9) = 3,29$. Так как $F_н < F_{кр}$, то допущение о равенстве генеральных дисперсий справедливо.

Для сравнения средних по формуле (2) находим наблюдаемое значение критерия

$$T_н = \frac{2,55 - 2,29}{\sqrt{7 \cdot 0,4 + 9 \cdot 2,27}} \sqrt{\frac{8 \cdot 10 \cdot 16}{8 + 10}} = 0,42.$$

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, то критическая область двусторонняя. По уровню значимости $a = 0,1$ и числу степеней свободы $k = 16$ находим из таблицы (8) критическую точку $t_{д.кр.}(0,1; 16) = 1,75$.

Поскольку $T_н < t_{д.кр.}$, то гипотеза о равенстве средних размеров изделий принимается.

3.3. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$ извлечена выборка объема $n = 10$ и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x} = 15,1$. **Проверить** нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0 = 13$ при конкурирующей гипотезе $H_0 : a \neq 13$, если уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, то критическая область двусторонняя. По формуле (3) находим наблюдаемое значение критерия

$$U_н = \frac{(15,1-13)\sqrt{10}}{3} = 2,21.$$

Поскольку критическая область двусторонняя, то критическую точку находим из выражения

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2}(1-\alpha) = \frac{1}{2}(1-0,05) = 0,475$$

по табл. (3) функции Лапласа $u_{кр} = 1,96$.

Таким образом, $U_н > u_{кр}$, следовательно, нулевую гипотезу отвергаем.

3.4. Измерения 16 случайно отобранных изделий приведены в таблице

размер x_i	2,9	3,0	3,1	3,3
частота n_i	3	4	5	4

При уровне значимости 0,05, **проверить** нулевую гипотезу, что проектный размер изделий $a_0 = 3$ выдерживается при изготовлении $H_0 : a = a_0 = 3,0$, при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq 3,0$.

Решение. По выборке определяем средний размер изделий

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{16}(2,9 \cdot 3 + 3,0 \cdot 4 + 3,1 \cdot 5 + 3,3 \cdot 4) = 3,09.$$

При вычислении исправленной дисперсии перейдем к условным вариантам $u_i = 10x_i - 3$, тогда

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_i u_i\right)^2}{n-1} = \frac{11476-11449}{15} = 1,8.$$

Таким образом, исправленная дисперсия первоначальных вариант равна $s^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = 0,018$, а исправленное среднее квадратическое отклонение будет $s = \sqrt{0,018} = 0,134$.

Наблюдаемое значение критерия находим по формуле (4)

$$T_н = \frac{(3,09-3,0)\sqrt{16}}{0,134} = 2,686.$$

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : a \neq a_0 = 3,0$, то критическая область двусторонняя.

По уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = n-1 = 16-1 = 15$ находим из таблицы (8) распределения Стьюдента критическую точку $t_{д.кр.}(0,05;15) = 2,13$.

Поскольку $T_н > t_{д.кр}$, то гипотезу о равенстве проектного размера и контрольного отвергаем.

3.5. Каждым из двух методов сделано 7 замеров и получены следующие результаты

x_i	2,1	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8	2.9
y_i	2.0	2.2	2.3	2.6	2.7	2.9	3.0

Проверить нулевую гипотезу о равенстве двух средних нормальных совокупностей $H_0 : M(X) = M(Y)$, если уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. Найдем разности одноименных замеров $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0$; $d_3 = 0,1$; $d_4 = -0,1$; $d_5 = -0,1$; $d_6 = -0,1$; $d_7 = -0,1$ и вычислим выборочную среднюю

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum d_i = -\frac{1}{7}0,2 = -0,028.$$

Тогда исправленное среднее квадратическое отклонение будет

$$s = \left(\frac{\sum d_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum d_i\right)^2}{n-1}\right)^{1/2} = \left(\frac{0,06 - \frac{1}{7}0,4}{6}\right)^{1/2} = 0,022.$$

Наблюдаемое значение критерия находим по формуле (5)

$$T_н = \frac{-0,028\sqrt{7}}{0,022} = -3,367.$$

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, то критическая область двусторонняя. По уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 6$ находим из таблицы (8) критическую точку $t_{д.кр}(0,05;6) = 2,45$. Поскольку $|T_н| > t_{д.кр}$, то гипотезу о равенстве двух средних отвергаем.

28.4. Сравнение предполагаемой вероятности с наблюдаемой относительной частотой появления события

Пусть при достаточно большом числе независимых испытаний n найдена относительная частота $\frac{m}{n}$ появления события. Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной вероятности p появления события гипотетической вероятности p_0, т. е. $H_1 : p = p_0$ при конкурирующей гипотезе: а) $H_1 : p \neq p_0$; б) $H_1 : p > p_0$; в) $H_1 : p < p_0$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$U_н = \frac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}.$$

а) По таблице (3) функции Лапласа из формулы $\Phi(u_{кр.}) = \frac{1}{2}(1-\alpha)$ находится критическая точка $u_{кр}$. Если $|U_н| < u_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $|U_н| > u_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

б) В случае правосторонней критической области критическая точка определяется из равенства $\Phi(u_{кр.}) = \frac{1}{2} - \alpha$ по таблице (3). Если $U_н < u_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается. Если $U_н > u_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается.

в) В случае левосторонней критической области находят сначала правостороннюю критическую точку по правилу б). Если $U_н > -u_{кр}$ — нулевую гипотезу принимают, если $U_н < -u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

4.1. Партия деталей принимается, если вероятность того, что деталь окажется бракованной, не превышает 0,015. Из 300 случайно отобранных деталей 6 оказались с браком. **Можно ли** принять партию?

Решение. По условию нулевая гипотеза имеет вид $H_0 : p = p_0 = 0{,}015$. Тогда конкурирующая гипотеза будет $H_1 : p > 0{,}015$, т. е. критическая область правосторонняя.

Найдем относительную частоту брака $\frac{m}{n} = \frac{6}{300} = 0{,}02$.

Вычислим наблюдаемое значение критерия, учитывая, что $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$

$$U_н = \frac{(0{,}02 - 0{,}015)\sqrt{300}}{\sqrt{0{,}985 \cdot 0{,}015}} = 0{,}72.$$

При уровне значимости 0,05 найдем критическую точку $u_{кр}$ правосторонней критической области

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,45.$$

По таблице (3) функции Лапласа $u_{кр} = 1,645$. Поскольку $U_н < u_{кр}$, нулевая гипотеза принимается, т. е. вероятность брака в партии не превышает 0,015. Следовательно, партию можно принять.

28.5. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей

1°. *Критерий Кочрена.* Пусть из m, нормально распределенных, генеральных совокупностей $X_1, X_2, ..., X_m$ извлечены m независимых выборок одинакового объема n. По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, ..., s_m^2$ с одинаковым числом степеней свободы $k = n - 1$.

Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве между собой генеральных дисперсий $H_0 : D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_m)$.

За наблюдаемое значение критерия примем критерий Кочрена, равный отклонению наибольшей исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий

$$G_н = \frac{s_{max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_m^2} \qquad (1)$$

По таблице критических точек распределения Кочрена (9) находим критическую точку $G_{кр}(\alpha, k, m)$. Если $G_н < G_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $G_н > G_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

2°. *Критерий Бартлетта.* Пусть из m, нормально распределенных, генеральных совокупностей $X_1, X_2, ..., X_m$ извлечены m независимых выборок различных объемов n_i $(n_i \geq 4)$ и по выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии

$s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$. Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве между собой генеральных дисперсий $H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_m)$.

За наблюдаемое значение критерия примем критерий Бартлетта, равный отношению

$$B_у = \frac{V}{C}, \tag{2}$$

где $V = 2{,}303(k\lg\overline{s}^2 - \sum_{i=1}^{m} k_i \lg s_i^2)$; $C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right)$; $k_i = n_i - 1$ — число степеней свободы дисперсии; $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$ — сумма чисел степеней свободы; $\overline{s^2} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} k_i s_i^2$ — средняя арифметическая исправленных дисперсий, взвешенная по числам степеней свободы.

По таблице (7) критических точек распределения χ^2 и числу степеней свободы $l = m - 1$ находим критическую точку $B_{кр}(\alpha, l)$. Если $B_н < B_{кр}$ — нулевая гипотеза принимается, если $B_н > B_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Следует заметить, что если $V < B_{кр}$, то $B_н$ тем более меньше $B_{кр}$, т.к. $C > 1$, и нулевую гипотезу можно принять, не вычисляя C.

5.1. По пяти независимым выборкам одинакового объема $n = 11$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии 1,2; 1,6; 2,1; 2,5; 2,7. При уровне значимости 0,01, **требуется:** а) проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий; б) оценить генеральную дисперсию.

Решение. а) Воспользуемся критерием Кочрена (1). Найдем наблюдаемое значение критерия

$$G_н = \frac{2{,}7}{1{,}2 + 1{,}6 + 2{,}1 + 2{,}5 + 2{,}7} = 0{,}267.$$

Из таблицы (9) критических точек распределения Кочрена по числу степеней свободы $k = n-1=11-1=10$ и числу выборок $l=5$ находим критическую точку $G_{кр}(0{,}01;10;5) = 0{,}4697$.

Поскольку $G_н < G_{кр}$, нулевую гипотезу об однородности дисперсий принимаем.

б) Так как равенство дисперсий установлено, то в качестве оценки генеральной дисперсии возьмем среднюю арифметическую исправленных дисперсий

$$D_г = \frac{1{,}2+1{,}6+2{,}1+2{,}5+2{,}7}{5} = 2{,}02.$$

5.2. По трем независимым выборкам объемов $n_1= 8$, $n_2=12$, $n_3=13$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно, 2,2; 2,6; 4,1. **Требуется**, при уровне значимости 0,01: а) проверить гипотезу об однородности дисперсий; б) оценить генеральную дисперсию.

Решение. а) Расчеты удобнее выполнять в табличном виде. Заполним расчетную таблицу

1	2	3	4	5	6	7	8
номер выборки	объем выборки	число степеней свободы	исправленные дисперсии				
i	n_i	k_i	s_i^2	$k_1 s_i^2$	$lg\, s_i^2$	$k_i\, lg\, s_i^2$	$\frac{1}{k_i}$
1	8	7	2,2	15,4	0,334	2,338	0,143
2	12	11	2,6	28,6	0,404	4,444	0,091
3	13	12	4,1	49,2	0,613	7,356	0,083
$\sum$		k=30		93,2		14,138	0,317

Из таблицы находим $\overline{s^2} = \frac{1}{k}\sum k_i s_i^2 = 3{,}11;$ $lg\,\overline{s^2} = 0{,}486;$

$$V = 2,303(k\,lg\,\overline{s^2} - \sum k_i\, lg\, s_i^2) = 2,303(30\cdot 0,468 - 14,138) = 1,018.$$

Из таблицы (7) по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $l-1=3-1=2$ находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0,01;2)=9,2$.

Поскольку $V < \chi^2_{кр}$, то при $C>1$ наблюдаемое значение критерия (2) $B_н$ тем более меньше $\chi^2_{кр}$ и нулевая гипотеза об однородности дисперсий принимается.

б) Так как однородность дисперсий установлена, то генеральную дисперсию будем оценивать по формуле средней арифметической исправленной дисперсии

$$D_г = \overline{s^2} = \frac{1}{k}\sum k_i s_i^2 = 3,11.$$

28.6. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

1°. Пусть эмпирическое распределение задано последовательностью равностоящих вариант и соответствующих им частот

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

За наблюдаемое значение критерия примем критерий Пирсона

$$\chi^2_н = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \tag{1}$$

где $n_i' = \dfrac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i)$ — теоретические частоты; n — объем выборки; h — разность между двумя соседними вариантами, $\varphi(u_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u_i^2/2}$ — функция Лапласа табл. (1); $u_i=\frac{x_i-\overline{x}_в}{\sigma_в}$; $\overline{x}_в$ — выборочная средняя; $\sigma_в$ — выборочное среднее квадратическое отклонение.

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по числу степеней свободы $k=m-3$, где m — число групп выборки, находится критическая точка $\chi^2_{кр}(\alpha,k)$.

Если $\chi^2_н<\chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза о нормальном распределении принимается.

Если $\chi^2_н>\chi^2_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

2°. Пусть эмпирическое распределение задано последовательностью интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот

$$\begin{array}{cccc} (x_1,x_2) & (x_2,x_3) & \ldots & (x_m,x_{m+1}) \\ n_1 & n_2 & & n_m \end{array}$$

Требуется при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

За наблюдаемое значение критерия принимают критерий Пирсона (1). Для этого сначала методом произведений вычисляют выборочную среднюю $\overline{x}^*$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, принимая в качестве вариант x_i^* среднее арифметическое концов интервала $x_i^*=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Пронормировав совокупность X, переходят к совокупности Z, вычисляя по формулам $z_i=\frac{x_i-\overline{x}^*}{\sigma_в^*}$, $z_{i+1}=\frac{x_{i+1}-\overline{x}^*}{\sigma_в}$ концы интервалов и полагая, что наименьшему значению z_1 соответствует $-\infty$, а наибольшему z_m соответствует ∞.

Вычисляя по формуле $p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$ вероятности попадания X в интервалы (x_i,x_{i+1}), где $\Phi(z)$ — функция Лапласа, находят теоретические частоты $n_i' = n \cdot p_i$, здесь n — объем выборки, т. е. сумма всех частот.

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по числу степеней свободы $k = m - 3$, где m — число интервалов выборки, находится критическая точка $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$. Если $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза о нормальном распределении принимается. Если $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

6.1. Задано эмпирическое распределение выборки объема $n = 100$:

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
n_i	3	4	13	13	15	13	11	12	10	4	2

Проверить при уровне значимости 0,05, справедлива ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности.

Решение. Методом произведений находим выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$. Для этого составим таблицу

1	2	3	4	5
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u^2_i$
4	3	–5	–15	75
6	4	–4	–16	64
8	13	–3	–39	117
10	13	–2	–26	52
12	15	–1	–15	15
14	13	0	0	0
16	11	1	11	11
18	12	2	24	48
20	10	3	30	90
22	4	4	16	64
24	2	5	10	50
	n=100		$\sum n_i u_i = -20$	$\sum n_i u_i^2 = 586$

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = -\frac{20}{100} = -0,2; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{586}{100} = 5,86.$$

Поскольку шаг равен $h = 6 - 4 = 2$ и ложный нуль $C = 14$, то

$$\overline{x}_в = M_1^* h + C = -0,2 \cdot 2 + 14 = 15,6.$$

$$\sigma_в = \sqrt{\left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2} = \sqrt{\left(5,86 - 0,2^2\right) \cdot 4} = 4,82.$$

Теоретические частоты находим, пользуясь табл.1, по формуле $n_i' = \dfrac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i)$ в табличном виде

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = \dfrac{100 \cdot 2}{4,82}\varphi(u_i)$
1	4	–2,41	0,0219	0,91
2	6	–1,99	0,0551	2,29
3	8	–1,58	0,1145	4,75
4	10	–1,16	0,2036	8,45
5	12	–0,75	0,3011	12,49
6	14	–0,33	0,3778	15,67
7	16	0,08	0,3977	16,50
8	18	0,50	0,3521	14,61
9	20	0,91	0,2637	10,94
10	22	1,33	0,1647	6,83
11	24	1,74	0,0878	3,64

Критерий Пирсона (1) ищем в табличном виде

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	3	0,91	2,09	4,37	4,80
2	4	2,29	1,71	2,92	1,28
3	13	4,75	8,25	68,06	14,33
4	13	8,45	4,55	20,70	2,45
5	15	12,49	2,51	6,30	0,50
6	13	15,67	−2,67	7,13	0,45
7	11	16,50	−5,50	30,25	1,83
8	12	14,61	−2,61	6,81	0,47
9	10	10,94	−0,94	0,88	0,08
10	4	6,83	−2,83	8,01	1,17
11	2	3,64	−1,64	2,69	0,74
$\sum$					$\chi^2_н = 28{,}10$

Таким образом, $\chi^2_н = 28{,}10$. Из таблицы критических точек распределения χ^2 (табл. 7) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и чисел степеней свободы $k = m - 3 = 11 - 3 = 8$ находим $\chi^2_{кр}(0{,}05; 8) = 15{,}5$.

Поскольку $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем.

8.2. Задано эмпирическое распределение выборки объема $n = 100$:

x_i, x_{i+1}	2–7	7–12	12–17	17–22	22–27	27–32
n_i	4	16	50	15	10	5

Проверить при уровне значимости 0,025, справедлива ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности.

Решение. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины. При вычислении выборочной средней и выборочного среднего квадратического отклонения методом произведений перейдем от данного интервального распределения по формуле $x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ к распределению равностоящих вариант

x_i^*	4,5	9,5	14,5	19,5	24,5	29,5
n_i	4	16	50	15	10	5

Находим выборочную среднюю $\overline{x}_в^*$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$. Составим таблицу

x_i^*	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
4,5	4	–2	–8	16
9,5	16	–1	–16	16
14,5	50	0	0	0
19,5	15	1	15	15
24,5	10	2	20	40
29,5	5	3	15	45
$\sum$	$n=100$		$\sum n_i u_i = 26$	$\sum n_i u_i^2 = 132$

Условные моменты первого и второго порядков

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{26}{100} = 0,26; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{132}{100} = 1,32.$$

Так как шаг равен $h = 9,5 - 4,5 = 5$ и ложный нуль $C = 14,5$, то $\overline{x}_в^* = M_1^* h + C = 0,26 \cdot 5 + 14,5 = 15,8$.

$$\sigma_в = \sqrt{\left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2} = \sqrt{\left(1,32 - 0,26^2\right) \cdot 25} = 5,123.$$

По формулам $z_i = \frac{x_i - \overline{x}_в^*}{\sigma_в}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}_в^*}{\sigma_в}$ найдем интервалы (z_i, z_{i+1}), полагая, что наименьшему значению первого интервала соответствует $-\infty$, а наибольшему значению последнего интервала $+\infty$.

Вычислим теоретические вероятности p_i и теоретические частоты n'_i. Для этого составим таблицу.

i	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100p_i$
1	2	7	$-\infty$	–1,72	–0,5000	–0,4573	0,0427	4,27
2	7	12	–1,72	–0,74	–0,4573	–0,2703	0,187	18,7
3	12	17	–0,74	0,23	–0,2703	0,091	0,3613	36,13
4	17	22	0,23	1,21	0,091	0,3869	0,2959	29,59
5	22	27	1,21	2,19	0,3869	0,4853	0,0984	9,84
6	27	32	2,19	∞	0,4853	0,5000	0,0147	1,47

Наблюдаемое значение критерия Пирсона находим в табличном виде

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	4	4,27	–0,27	0,07	0,016
2	16	18,7	–2,7	7,29	0,39
3	50	36,13	13,87	188,22	5,209
4	15	29,59	–14,59	212,87	7,194
5	10	9,84	0,16	0,03	0,003
6	5	1,47	3,53	12,46	8,476
$\sum$	100	100			$\chi^2_н = 21,29$

Таким образом, $\chi^2_н = 21,29$. Из таблицы критических точек распределения χ^2 (табл. 7) при уровне значимости $\alpha = 0,025$ и числе степеней свободы $k = m - 3 = 6 - 3 = 3$ находим $\chi^2_{кр}(0,025; 3) = 9,4$.

Поскольку $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза о нормальном распределении отвергается.

28.7. Проверка гипотез о других законах распределения генеральной совокупности

1°. Проверка гипотезы о распределении дискретной случайной величины X по биномиальному закону. Пусть вероятность появления события A в каждом из n опытов одна и та же. Тогда таблица распределения дискретной случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	...	m
n_i	n_0	n_1	n_2	...	n_m

где n_i — число опытов, в которых зарегистрировано x_i появлений события A.

Найдем по формуле Бернулли вероятности $P_i = C^i_m p^i q^{m-i}$ появления события A ровно i раз в m испытаниях и вычислим теоретические частоты $n'_i = nP_i$, где $n = \sum n_i$ число опытов.

Используя критерий Пирсона, находим как правило в табличном виде, наблюдаемые значения критерия

$$\chi^2_н = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \tag{1}$$

Число степеней свободы принимаем равным $k = l$, где l — максимальное число появлений события A в одном опыте, если вероятность p задана. Если p оценивается по выборке, то $k = l - 1$, где l — число групп выборки.

Критические точки распределения χ^2, при уровне значимости α, находим из табл. (7) $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Если $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$ — нулевая гипотеза о биномиальном распределении генеральной совокупности принимается. Если $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$ — отвергается.

2°. Проверка гипотезы о распределении дискретной случайной величины по закону Пуассона. По заданному распределению находим выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и параметр λ распределения Пуассона принимаем равным $\lambda = \overline{x}_в$.

По формуле Пуассона $P_i = \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ находим вероятности появления событий равно i раз при n испытаниях. По формуле $n'_i = nP_i$, где $n = \sum n_i$ — объем выборки, находим теоретические частоты и по формуле Пирсона (1) наблюдаемые значения критерия $\chi^2_н$.

Приняв число степеней свободы $k = l - 2$, где l — число различных групп выборки, при уровне значимости α, из табл.(7) находим критические точки распределения $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$. Если $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о распределении случайной величины по закону Пуассона принимается. Если $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$ — отвергается.

3°. Проверка гипотезы о показательном распределении. Пусть эмпирическое распределение непрерывной случайной величины задано последовательностью интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i.

Находим сначала выборочную среднюю $\overline{x}_в$, принимая в качестве вариант среднее арифметическое концов интервала $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Принимая параметр λ показательного распределения равным $\lambda = \dfrac{1}{\overline{x}_b}$, находим вероятности попадания X в частные интервалы $P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$ и вычисляем теоретические частоты $n'_i = nP_i$, где $n = \sum n_i$ — объем выборки.

Наблюдаемое значение критерия $\chi^2_н$ находим по формуле Пирсона (1).

Приняв число степеней свободы $k = l - 2$, где l — число интервалов выборки, при уровне значимости α, из табл.(7) находим критические точки распределения $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Если $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о показательном распределении принимается; если $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$ — отвергается.

4°. Проверка гипотезы о равномерном распределении, т. е. по закону

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

По заданному в виде m интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i распределению находим выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$. По формулам $a^* = \bar{x}_в - \sqrt{3}\sigma_в$, $b^* = \bar{x}_в + \sqrt{3}\sigma_в$ оцениваем параметры a и b.

Вычисляя по формулам $n'_1 = n\dfrac{1}{b^* - a^*}(x_i - a^*)$, $n'_2 = n'_3 = \ldots = n'_{m-1} = n\dfrac{1}{b^* - a^*}(x_i - x_{i-1})$, $n'_m = n\dfrac{1}{b^* - a^*}(b^* - x_{m-1})$, $n = \sum n_i$ теоретические частоты, находим из формулы Пирсона (1) наблюдаемое значение критерия $\chi^2_н$.

Приняв число степеней свободы $k = m - 3$, при уровне значимости α, из табл. (7) находим критические точки $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$. Если $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о равномерном распределении принимается; если $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$ — отвергается.

7.1. В результате испытаний 100 элементов **получено** эмпирическое распределение интервалов времени безотказной работы в часах; n_i — количество элементов, отказавших в i-м интервале

$x_i - x_{i+1}$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
n_i	37	24	15	10	7	5	2

Проверить гипотезу о показательном распределении времени безотказной работы элементов, принимая уровень значимости равным $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Принимая в качестве вариант среднее арифметическое концов интервалов $x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, находим выборочную среднюю

$$\overline{x}_в = \frac{(37\cdot 5+24\cdot 15+15\cdot 25+10\cdot 35+7\cdot 45+5\cdot 55+2\cdot 65)}{100} = 19{,}9.$$

Принимая параметр показательного распределения $\lambda = \frac{1}{\overline{x}_в} = \frac{1}{91{,}9} = 0{,}05$, находим по формуле $P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$ вероятности попадания X в частичные интервалы. Так, вероятность попадания X в первый интервал равна

$$P_1 = P(0 < X < 10) = e^{-0{,}05\cdot 0} - e^{-0{,}05\cdot 10} = 1 - e^{-0{,}5} = 0{,}39.$$

Аналогично

$$P_2 = 0{,}24;\ P_3 = 0{,}15;\ P_4 = 0{,}08;\ P_5 = 0{,}06;\ P_6 = 0{,}03;\ P_7 = 0{,}02.$$

По формуле $n_i' = nP_i$ вычисляем теоретические частоты: $n_1' = nP_1 = 100\cdot 0{,}39 = 39;\ n_2' = 24;\ n_3' = 15;\ n_4' = 8;\ n_5' = 6;\ n_6' = 3;\ n_7' = 2.$

По формуле Пирсона находим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_н$

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2/n_i'$
1	37	39	2	4	0,10
2	24	24	0	0	0,00
3	15	15	0	0	0,00
4	10	8	2	4	0,50
5	7	6	1	1	0,17
6	5	3	2	4	1,33
7	2	2	0	0	0,00
$\sum$	100				$\chi^2_н = 2{,}10$

Из табл. (7) критических точек распределения $\chi^2_н$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = l - 2 = 7 - 2 = 5$ находим критические точки распределения $\chi^2_{кр}(0{,}05;5) = 9{,}5$.

Поскольку $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о показательном распределении принимается.

7.2. На основании эксперимента, состоящего из n=100 испытаний, в каждом из которых фиксировалось число x_i появлений некоторого события A, получено эмпирическое распределение

x_i	0	1	2	3	4
n_i	53	34	10	2	1

Здесь n_i — число испытаний (частота) в которых наблюдалось x_i появлений события A.

Проверить гипотезу о распределении дискретной случайной величины по закону Пуассона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. По формуле $\overline{x}_в = \sum n_i x_i / n$ вычислим выборочную среднюю

$$\overline{x}_в = \frac{(53\cdot 0 + 34\cdot 1 + 10\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4)}{100} = 0{,}64.$$

Принимая параметр распределения Пуассона равным $\lambda = \overline{x}_в = 0{,}64$, по формуле Пуассона $P_i = \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ находим вероятности P_i появления i раз события A при 100 испытаниях

$$P_0 = \frac{0{,}64^0 e^{-0{,}64}}{0!} = 0{,}53; \quad P_1 = \frac{0{,}64 e^{-0{,}64}}{1!} = 0{,}34;$$

$$P_2 = \frac{0{,}64^2 e^{-0{,}64}}{2!} = 0{,}11; \quad P_3 = \frac{0{,}64^3 e^{-0{,}64}}{3!} = 0{,}0233;$$

$$P_4 = \frac{0{,}64^4 e^{-0{,}64}}{4!} = 0{,}0037.$$

По формуле $n_i' = nP_i$ находим теоретические частоты: $n_0' = 100 \cdot 0{,}53 = 53;$ $n_1' = 34;$ $n_2' = 11;$ $n_3' = 2{,}33;$ $n_4' = 0{,}37.$

Наблюдаемое значение критерия $\chi_н^2$ находим по формуле Пирсона

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2/n_i'$
0	53	53	0	0	0
1	34	34	0	0	0
2	10	11	-1	1	0,091
3	2	2,33	0,67	0,45	0,193
4	1	0,37	0,63	0,40	1,08
$\sum$	100				$\chi_н^2 = 1{,}365$

Из табл. (7) критических точек распределения χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = l — 2 = 5 - 2 = 3$ находим критические точки распределения $\chi_{кр}^2(0{,}05;3) = 7{,}8.$

Поскольку $\chi_н^2 < \chi_{кр}^2$, то гипотеза о распределении случайной величины по закону Пуассона принимается.

28.8. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. По выборке объема n из этой совокупности найден выборочный коэффициент корреляции $r_в \neq 0$. Требуется, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $H_0 : r_г = 0$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_г \neq 0$.

Наблюдаемое значение критерия находим по формуле

$$T_н = \frac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}}. \quad (1)$$

По числу степеней свободы $k = n - 2$ из табл. (8) критических точек распределения Стьюдента находим критическую точку $t_{кр}(\alpha, k)$ двусторонней критической области. Если $|T_н| < t_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, т. е. X и Y — некоррелированы. Если $|T_н| > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, т. е. X и Y — коррелированы (связаны линейной зависимостью).

8.1. По выборке объема $n = 100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y) составлена корреляционная таблица.

Y \ X	14	24	34	44	54	64	74	n_y
40	4	1	–	–	–	–	–	5
45	2	6	10	–	–	–	–	18
50	–	2	7	4	2	–	–	15
55	–	–	1	25	–	–	–	26
60	–	1	5	8	2	–	–	16
65	–	–	–	4	6	1	–	11
70	–	–	–	–	2	6	1	9
n_x	6	10	23	41	12	7	1	$n = 100$

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Решение. Найдем сначала выборочный коэффициент корреляции. С целью упрощения вычислений перейдем к условным вариантам

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2},$$

где $h_1 = u_{i+1} - u_i$; $h_2 = v_{i+1} - v_i$ — разность (шаг) между двумя соседними вариантами; C_1, C_2 — ложные нули.

За ложный нуль принимаем варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда, т. е. $C_1 = 44$, $C_2 = 55$. Поскольку $h_1 = 10$; $h_2 = 5$, то, переписывая частоты из исходной таблицы (среднее положение числа в клеточке), получим корреляционную таблицу в условных вариантах. В правом верхнем углу клетки записываем произведение частоты n_{uv} на варианту u, в левом нижнем — произведение частоты n_{uv} на варианту v. (см. табл.).

Выборочный коэффициент корреляции находится по формуле

$$r_в = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{uv}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

где

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{6(-3)+10(-2)+23(-1)+41\cdot 0+12\cdot 1+7\cdot 2+1\cdot 3}{100} = -0,32,$$

$$\overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{5(-3)+18(-2)+15(-1)+26\cdot 0+16\cdot 1+11\cdot 2+9\cdot 3}{100} = -0,01,$$

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u u^2}{n} = \frac{6\cdot 9+10\cdot 4+23+12+7\cdot 4+1\cdot 9}{100} = 1,66,$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v v^2}{n} = \frac{5\cdot 9+18\cdot 4+15\cdot 1+16\cdot 1+11\cdot 4+9\cdot 9}{100} = -2,73,$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1,66-(-0,32)^2} = 1,25,$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2} = \sqrt{2,73-(-0,01)^2} = 1,65.$$

Складывая все числа, помещенные в правых верхних углах одной строки, записываем их в столбце U. Умножая их

Таблица

$v \backslash u$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$U=\sum n_{uv}u$	vU
-3	−12 4 −12	−2 1 −3	–	–	–	–	–	-14	42
-2	−6 2 −4	−12 6 −12	−10 10 −20	–	–	–	–	-28	56
-1	–	−4 2 −2	−7 7 −3	0 4 −4	2 2 −2	–	–	-9	9
0	–	–	−1 1 0	0 25 0	–	–	–	-1	0
1	–	−2 1 1	−5 5 5	0 8 8	2 2 2	–	–	-5	-5
2	–	–	–	0 4 8	6 6 12	2 1 2	–	8	16
3	–	–	–	–	2 2 6	12 6 18	3 1 3	17	51
$V=\sum n_{uv}v$	-16	-16	-22	12	18	20	3		$\sum vU=169$
uV	48	32	22	0	18	40	9		$\sum uV=169$

затем на варианты v и складывая, будем иметь $\sum_v vU = \sum n_{uv} - uv = 169$. С целью проверки, складываем все числа, помещенные в левом нижнем углу одного столбца, и записываем их в строке V. Умножая их затем на варианты u и складывая, будем иметь тот же результат $\sum_u uV = 169$.

Таким образом, искомый коэффициент корреляции равен

$$r_в = \frac{169 - 100 \cdot 0,32 \cdot 0,01}{100 \cdot 1,25 \cdot 1,65} = 0,82.$$

Найдем теперь по формуле (1) наблюдаемое значение критерия

$$T_н = \frac{0,82\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-(0,82)^2}} = 14,19.$$

По табл. (8) распределения Стьюдента для двусторонней критической области при числе степеней свободы $k = 100 - 2 = 98$ и уровню значимости $\alpha = 0,05$ находим критическую точку $t_{кр}(0,05;98) = 1,665$ двусторонней критической области. Поскольку $T_н > t_{кр}$, то нулевая гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $r_г = 0$ отвергается, т. е. X и Y коррелированы.

28.9. Однофакторный дисперсионный анализ

1°. Одинаковое число испытаний на всех уровнях. Считаем, что генеральные совокупности $X_1, X_2, .., X_n$ нормально распределены и групповые генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но одинаковы. Требуется установить, какое влияние оказывает некоторый качественный фактор F, имеющий n уровней $F_1, F_2, ..., F_n$ на количественный признак X, т. е. проверить нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий

$H_0 : M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n)$, если уровень значимости равен α и на каждом уровне произведено по одинаковому числу испытаний m. Результаты испытаний значения x_{ij} приведены в таблице, где i — номер испытания (i =1,2,..., m), j — номер уровня фактора (j =1,2,..., n)

Номер испытания	Уровни фактора			
i	F_1	F_2	$\cdots$	F_n
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}
$\overline{x}_{гр.j}$	$\overline{x}_{гр.1}$	$\overline{x}_{гр.2}$	$\cdots$	$\overline{x}_{гр.n}$

Для решения поставленной задачи сначала вычисляют общую сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x})^2, \qquad (1)$$

факторную сумму квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая обусловлена воздействием фактора и характеризует рассеяние «между группами»

$$S_{факт} = m\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{гр\,j} - \overline{x})^2 \qquad (2)$$

и остаточную сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая обусловлена случайными причинами и характеризует рассеяние «внутри группы»

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}(x_{i1} - \overline{x}_{гр1})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m}(x_{i2} - \overline{x}_{гр2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m}(x_{in} - \overline{x}_{гр.n})^2.$$

Для практических вычислений общей и факторной сумм удобнее пользоваться следующими формулами

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m} P_j - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right)^2,$$
$$S_{факт} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} R_j^2 - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right)^2, \qquad (3)$$

где $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2$ — сумма квадратов наблюдаемых значений признака на уровне F_j; $R_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ — сумма наблюдаемых значений признака на уровне F_j.

Если наблюдаемые значения x_{ij} — десятичные дроби с l знаками после запятой, то по формуле $y_{ij} = 10^l x_{ij} - c$ удобнее перейти к целым числам, где c — примерно среднее значение чисел $10^l x_{ij}$. В этом случае факторная и остаточная дисперсии увеличатся в 10^l раз, однако их отклонение не изменится.

Если наблюдаемые значения x_{ij} сравнительно большие числа, то для упрощения вычислений пользуются формулой $y_{ij} = x_{ij} - c$, где c — примерно среднее значение x_{ij}. В этом случае формулы (3) будут

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m} Q_j - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)^2,$$
$$S_{факт} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} T_j^2 - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)^2, \qquad (4)$$

где

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2, \quad T_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}.$$

Факторная и остаточная дисперсии находятся по формулам

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{n-1}, \quad s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{n(m-1)}, \tag{5}$$

где $n-1$ и $n(m-1)$ — соответствующее число степеней свободы.

Используя критерий Фишера-Снедекора (28.2), находим наблюдаемое значение критерия

$$F_н = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}}$$

и сравниваем его с $F_{кр}$ табл. 6. Если $F_н < F_{кр}$ — групповые средние различаются незначительно и нулевую гипотезу принимаем, если $F_н > F_{кр}$ — отвергаем.

2°. Число испытаний на различных уровнях неодинаково. Пусть число испытаний на уровне F_1 равно m_1, на уровне F_2 — m_2,..., на уровне F_n — m_n. Общая сумма квадратов отклонений находится как и в случае одинакового числа испытаний на всех уровнях. Факторная сумма квадратов отклонений находится по формуле

$$S_{факт} = \frac{T_1^2}{m_1} + \frac{T_2^2}{m_2} + \ldots + \frac{T_n^2}{m_n} - \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)^2, \tag{6}$$

где $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ — общее число испытаний.

Остаточная сумма квадратов отклонений равна $S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}$, дисперсии, соответственно

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{n-1}, \quad s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{k-n}, \tag{7}$$

Дальнейшие вычисления такие же, что и для одинакового числа испытаний.

9.1. На каждом из трех уровней фактора F произведено по 5 испытаний (табл.). Предполагая, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, **проверить** нулевую гипотезу о равенстве групповых средних $\overline{x}_{гр.j}$, если уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Номер испытания	Уровни фактора		
i	F_1	F_2	F_3
1	38	51	55
2	56	58	59
3	64	60	64
4	65	55	65
5	70	77	67
$\overline{x}_{гр.j}$	48,6	60,2	62

Решение. С целью упрощения расчета перейдем к уменьшенным величинам $y_{ij} = x_{ij} - c = x_{ij} - 56$, где $c = 56$ — общая средняя. Расчетная таблица примет вид

i	F_1		F_2		F_3		Итоговый столбец
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	−18	324	−5	25	−1	1	
2	0	0	2	4	3	9	
3	8	64	4	16	8	64	
4	9	81	−1	1	9	81	
5	14	196	21	441	11	121	
$T_j = \sum y_{ij}$	13		21		30		$\sum T_j = 64$
$Q_j = \sum y_{ij}^2$		665		487		276	$\sum Q_j = 1428$
T_j^2	196		441		900		$\sum T_j^2 = 1537$

Используя итоговый столбец (табл.) и учитывая, что число уровней фактора $n = 3$, а число испытаний на каждом уровне $m = 5$, по формулам (4) находим

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m} Q_j - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)^2 = 1428 - \frac{1}{15}64^2 = 1154,93;$$

$$S_{факт} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} T_j^2 - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)^2 = \frac{1}{5}1537 - \frac{1}{15}64^2 = 34,33.$$

Отсюда, остаточная сумма квадратов отклонений

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} = 1120,6.$$

Учитывая, что число степеней свободы равно $n-1=$ $=3-1=2$; $n(m-1) = 3(5-1) = 12$, находим по формулам (5) факторную и остаточную дисперсии

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{n-1} = \frac{34,33}{2} = 17,16;$$

$$s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{n(m-1)} = \frac{1154,93}{12} = 96,24.$$

Таким образом, наблюдаемое значение критерия

$$F_н = \frac{s^2_{ост}}{s^2_{факт}} = 5,61.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k_1=2$, $k_2=12$ из табл. (6) находим критическую точку $F_{кр}(0,05;2;12) = 3,88$. Поскольку $F_н > F_{кр}$, то нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем.

9.2. Произведено 12 испытаний, из них 5 на первом уровне фактора, 4 — на втором и 3 на третьем (табл.). Предполагая, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, **проверить** нулевую гипотезу о равенстве групповых средних $\overline{x}_{гр.\,j}$, если уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Номер испытания	Уровни фактора		
i	F_1	F_2	F_3
1	0,21	0,37	0,32
2	0,23	0,39	0,35
3	0,31	0,41	0,37
4	0,38	0,45	–
5	0,41	–	–
$\overline{x}_{гр.j}$	0,308	0,405	0,347

Решение. Пользуясь формулой $y_{ij} = 10^2 x_{ij} - c$, где $c = 35$, перейдем к целым числам и составим таблицу

i	F_1		F_2		F_3		Итоговый столбец
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	–14	196	2	4	–3	9	
2	–12	144	4	16	0	0	
3	–4	16	6	36	2	4	
4	3	9	10	100	–	–	
5	6	36	–	–	–	–	
$T_j = \sum y_{ij}$	–21		22		–1		$\sum T_j = 0$
$Q_j = \sum y_{ij}^2$		401		156		13	$\sum Q_j = 570$
T_j^2	441		484		1		

Используя итоговый столбец таблицы и учитывая, что $k = 12$ и формулу (6), находим общую и факторную суммы квадратов отклонений

$$S_{общ} = \sum Q_j - \frac{1}{k}\left(\sum T_j\right)^2 = 570 - 0 = 570.$$

$$S_{факт} = \frac{T_1^2}{m_1} + \frac{T_2^2}{m_2} + \frac{T_3^2}{m_3} - \frac{1}{k}\left(T_j\right)^2 = \frac{441}{5} + \frac{484}{4} + \frac{1}{3} - 0 = 209,53.$$

Отсюда, остаточная сумма квадратов отклонений $S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}$ =570 – 209,53 =360,47. Учитывая, что число степеней свободы равно: $k_1 = n - 1 = 5 - 1 = 4$; $k_2 = k - n = 12 - 5 = 7$, по формулам (7) находим факторную и остаточную дисперсии

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{n-1} = \frac{209,53}{4} = 52,38;$$

$$s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{k-n} = \frac{360,47}{7} = 51,5.$$

Таким образом, наблюдаемое значение критерия

$$F_н = \frac{s^2_{ост}}{s^2_{факт}} = \frac{52,38}{51,5} = 1,02.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k_1 = 4$; $k_2 = 7$ из табл. (6) находим критическую точку $F_{кр}(0,05;4;7) = 4,12$. Поскольку $F_н < F_{кр}$, то нулевую гипотезу о равенстве групповых средних принимаем.

28.10. Разыгрывание дискретной случайной величины. Метод Монте-Карло (статистических испытаний)

1°. *Метод Монте-Карло* состоит в отыскании значений a некоторой случайной величины X, иногда его называют методом статистических испытаний или методом разыгрывания случайной величины. Суть метода заключается в моделировании (розыгрыше) случайной величины посредством определенной процедуры, которая дает случайный результат. Поскольку «розыгрыш» проводится большое число раз, то набирается статистический материал, который позволяет с определенной точностью моделировать случайное явление.

Метод статистических испытаний позволяет установить связь между вероятностными характеристиками различных случайных явлений, например, между математическими ожиданиями и величинами, являющимися результатами аналитических решений, т. е. значениями интегралов, решениями краевых задач дифференциальных уравнений и т. д.

2°. Под *розыгрышем* случайной величины X будем понимать получение последовательности ее возможных значений x_i. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Пусть непрерывная случайная величина R равномерно распределена в интервале (0,1). Обозначим за r_j $(j=1,2,...)$ ее возможные значения (случайные числа). Разобьем интервал (0,1) оси $0r$ точками $p_1, p_1+p_2, p_1+p_2+p_3, \ldots$ на n частичных интервалов. Если выбранное случайное число r_i попадает в i-тый частичный интервал, то разыгрываемая дискретная случайная величина принимает значение x_i.

Если требуется разыграть испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а непоявления $\overline{A}$ равна $1-p$, то для случайных чисел $r_j < p$ событие наступило, а для $r_j \geq p$ не наступило.

10.1. Разыграть 7 значений дискретной случайной величины X, заданной распределением

x	3	6	14
p	0,21	0,17	0,62

для случайных чисел r_i: 0,65; 0,48; 0,11; 0,76; 0,74; 0,17; 0,36.

Решение. Разобьем интервал (0,1) точками 0,21; 0,38 на 3 частичных интервала (0 – 0,21), (0,21 – 0,38), (0,38 – 1).

Случайное число $r_1 = 0,65$ принадлежит третьему частичному интервалу, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина принимает значение $x_1 = 14$. Число $r_2 = 0,48$ попадает также в третий интервал, следовательно, $x_2 = 14$. Аналогично: $x_3 = 3;\quad x_4 = 14;\quad x_5 = 14;\quad x_6 = 3;\quad x_7 = 6$.

10.2. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,63, если случайные числа r_i: 0,61; 0,19; 0,69; 0,4; 0,06.

Решение. Считаем, что при $r_j < 0,63$ событие A имеет место, а при $r_j \geq 0,63$ наступает противоположное событие $\bar{A}$. Искомая последовательность событий в данном случае имеет вид $A,\ A,\ \bar{A},\ A,\ A$.

10.3. Заданы вероятности трех событий, образующих полную группу:

$$p_1 = P(A_1) = 0,24;\quad p_2 = P(A_2) = 0,15;\quad p_3 = P(A_3) = 0,61.$$

Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех заданных событий при условии, что случайные числа равны r_i: 0,68; 0,93; 0,59; 0,14; 0,16.

Решение. Разобьем интервал (0,1) на три частичных интервала (0 – 0,24), (0,24 – 0,39), (0,39 – 1). Поскольку случайное число $r_2 = 0,68$ принадлежит третьему интервалу, то появляется событие A_3. Аналогично находятся остальные события. Таким образом, искомая последовательность событий имеет вид: A_3, A_3, A_3, A_1, A_1.

10.4. События A и B независимы и совместны. **Требуется** разыграть 5 испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4, а события B равна 0,7, если случайные числа r_i: 0,02; 0,29; 0,53; 0,68; 0,70.

Решение. Составим полную группу событий. Возможны 4 исхода испытания: $A_1 = AB;\ A_2 = A\bar{B};\ A_3 = \bar{A}B;\ A_4 = \bar{A}\bar{B}$.

Поскольку события независимы, то вероятности появления этих событий, соответственно:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0,4\cdot 0,7 = 0,28;$$

$$P(A\bar{B}) = P(A)\cdot P(\bar{B}) = 0,4\cdot 0,3 = 0,12;$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})\cdot P(B) = 0,6\cdot 0,7 = 0,42;$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = 0,6\cdot 0,3 = 0,18.$$

Разобьем интервал $(0,1)$ на четыре частичные интервала (0 – 0,28), (0,28 – 0,40), (0,40 – 0,82), (0,82 – 1). Так как случайное число $r_1 = 0,02$ принадлежит первому интервалу, то наступило событие A_1. Аналогично находятся исходы и для остальных случайных чисел. Окончательно, искомая последовательность исходов разыгранных испытаний примет вид: A_1, A_2, A_3, A_3, A_3.

28.11. Разыгрывание непрерывной случайной величины

1°. Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Для нахождения возможных значений x_i непрерывной случайной величины необходимо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения $F(x_i) = r_i$ и решить это уравнение относительно x_i.

2°. Если непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$, то для нахождения ее возможного значения x_i необходимо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение

$$\int_a^{x_i} f(x)dx = r_i, \qquad (1)$$

где a — наименьшее возможное значение случайной величины X.

3°. Пусть функция распределения случайной величины X задана в виде линейной комбинации двух функций

$$F(x) = C_1F_1(x) + C_2F_2(x),$$

где $C_1 > 0,\ C_2 > 0,\ C_1 + C_2 = 1.$

Чтобы разыграть возможные значения, необходимо выбрать два случайных числа r_1 и r_2 и по случайному числу r_1 разыграть вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
p	C_1	C_2

Если Z=1, то относительно x решают уравнение $F_1(x) = r_2$, если Z=2, то решают уравнение $F_2(x) = r_2$.

Метод суперпозиции обобщается на n слагаемых функций распределения.

11.1. Разыграть 4 возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (3, 11), если выбранные случайные числа r_i равны: 0,73; 0,05; 0,38; 0,52.

Решение. Функция распределения равномерно распределенной случайной величины имеет вид $F(x) = (x-a)/(b-a)$. Так как a = 3, b =11, то $F(x) = (x-3)/8$. Отсюда, возможные значения непрерывной случайной величины находят из уравнения $(x_i - 3)/8 = r_i$ или $x_i = 8r_i + 3$. Подставляя r_i, окончательно получим $x_1 = 8 \cdot 0,05 + 3 = 3,4;\ x_2 = 6,06;\ x_3 = 7,16.$

11.2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону и задана функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ \ (x > 0)$. **Требуется** разыграть 3 возможных значения, если $\lambda = 5$, а выбранные случайные числа r_i равны: 0,28; 0,35; 0,54.

Решение. Согласно правилу 1°, запишем разрешающее уравнение в общем виде $1-e^{-\lambda x_i}=r_i$. Решим это уравнение относительно x_i: $e^{-\lambda x_i}=1-r_i$ или $x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i)$. Подставляя r_i, будем иметь: $x_1=-\frac{1}{5}\ln 0,72=-0,0656$; $x_2=-\frac{1}{5}\ln 0,65=$ $=-0,086$; $x_3=-\frac{1}{5}\ln 0,46=-0,155$.

11.3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=1/(1-ax)^2$ в интервале $0\le x\le 1/(1-a)$; вне этого интервала $f(x)=0$. **Найти** явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. В соответствии с формулой (1) уравнение относительно x_i имеет вид

$$\int_0^{x_i}\frac{dx}{(1-ax)^2}=r_i.$$

Интегрируя, получим

$$-\frac{1}{a}\int_0^{x_i}(1-ax)^{-2}d(1-ax)=\frac{1}{a}\frac{1}{(1-ax)}\Bigg|_0^{x_i}=$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-ax_i}-1\right)=r_i,\quad \text{откуда } x_i=\frac{r_i}{1+ar_i}.$$

11.4. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=1-\frac{1}{3}(e^{-2x}+2e^{-x}),\quad 0<x<\infty.$

Решение. Применяя метод суперпозиции, представим заданную функцию в виде $F(x)=\frac{1}{3}(1-e^{-2x})+\frac{2}{3}(1-e^{-x})$.

Таким образом, $F_1(x)=1-e^{-2x}$, $F_2(x)=1-e^{-x}$; $C_1=\frac{1}{3}$; $C_2=\frac{2}{3}$.

Рассмотрим вспомогательную дискретную случайную величину Z, заданную законом распределения

Z	1	2
p	1/3	2/3

Выберем случайные числа r_1 и r_2 и разыграем Z по случайному числу r_1. Разобьем интервал $(0,1)$ на два частичных интервала $(0, \frac{1}{3})$ и $(\frac{1}{3}, 1)$. Если $r_1 < \frac{1}{3}$, то $Z = 1$, если $r_1 \geq \frac{1}{3}$, то $Z = 2$.

Таким образом, возможные значения X находятся из решения относительно x уравнений

$$\begin{cases} 1 - e^{-2x} = r_2, & \text{если } r_1 < \frac{1}{3}; \\ 1 - e^{-x} = r_2, & \text{если } r_1 \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\ln(1 - r_2), & \text{если } r_1 < \frac{1}{3}, \\ x = -\ln(1 - r_2), & \text{если } r_1 \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

28.12. Оценка погрешности метода Монте-Карло

1°. Величина допускаемой ошибки δ с заданной вероятностью γ: $P\left(\left|\overline{X} - a\right| \leq \delta\right) = \gamma$, если случайная величина распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ известно, определяется по формуле

$$\delta = t\sigma / \sqrt{n}, \tag{1}$$

где n — число испытаний, t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)=\gamma/2$.

2°. Если случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то верхняя граница ошибки с вероятностью γ определяется по формуле

$$\delta = t_\gamma s/\sqrt{n}, \tag{2}$$

где s — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, t_γ — берется из табл. 4.

3°. Если произведено n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то вероятность того, что частота ω события A отличается от вероятности события p не больше, чем на заданную величину $\delta > 0$ определяется по формуле

$$P(|\omega - p| < \delta) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{3}$$

Задаваясь достаточно близким к единице значением вероятности γ — «уровнем доверия» и разрешая равенство $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\gamma$ относительно n, находим расчетную формулу для необходимого числа опытов n

$$n = \frac{pq}{\varepsilon^2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2. \tag{4}$$

Значение функции $\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2$ для некоторых, наиболее реальных значений уровня доверия приведены в табл. 11 приложения.

4°. Если производится n независимых опытов и известно среднее квадратическое отклонение σ, то вероятность того, что среднее арифметическое $\bar{x}$ отклоняется от математического ожидания a меньше чем на δ определяется по формуле

$$P(|\bar{x}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{5}$$

где σ, поскольку оно, как правило, неизвестно, определяется выражением

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X^2}}.$$

Число опытов n, в которых среднее арифметическое $\bar{X}$ наблюдаемых значений случайной величины отклоняется от ее математического ожидания не больше чем на δ при уровне доверия γ, определяется по формуле

$$n=\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2. \tag{6}$$

12.1. С вероятностью $\gamma=0,97$ **найти** верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания нормальной величины X с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=0,4$ было разыграно 49 возможных значений X.

Решение. Воспользуемся формулой (1). По условию: n = 49; $\sigma=0,4$; $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0,97}{2}=0,485.$ Из таблицы функций Лапласа (табл. 3) находим t = 2,18. Таким образом, искомая верхняя граница ошибки $\delta=2,18\cdot 0,4/\sqrt{49}=0,1246.$

12.2. С вероятностью $\gamma=0,99$ **найти** верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания нормальной величины X было разыграно 64 ее возможных значения и по ним найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}3$.

Решение. Воспользуемся формулой (2). По условию: $n = 64$; $s = 0{,}3$. Из таблицы(4) по $\gamma = 0{,}99$ при $n = 64$ находим $t_\gamma = 1{,}9985$. Таким образом, искомая верхняя граница ошибки

$$\delta = 1{,}9985 \cdot 0{,}3 / \sqrt{64} = 0{,}075.$$

12.3. Произведено $n = 100$ независимых опытов, в каждом из которых событие A появилось с вероятностью $p = 0{,}6$. **Найти** вероятность того, что частота появления события А отличается от вероятности меньше чем на $\delta = 0{,}02$.

Решение. Учитывая, что $q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, по формуле (3) имеем

$$P(|\omega - 0{,}6| < 0{,}02 = 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{100}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 2\Phi(0{,}41) = 0{,}3182.$$

12.4. Вероятность появления события A в каждом из независимых опытов равна $p = 0{,}3$. Сколько опытов необходимо провести для того, чтобы частота ω события A с вероятностью (уровнем доверия) $\gamma = 0{,}95$ отличалась от p не больше, чем на $\delta = 0{,}01$?

Решение. Число опытов n вычисляем по формуле (4). Из табл. (11) для $\gamma = 0{,}95$ имеем $\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2 = 3{,}84$. Поскольку $q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, то

$$n = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{(0{,}01)^2} \cdot 3{,}84 = 8064.$$

12.5. Производится $n = 400$ независимых опытов. **Найти** вероятность того, что среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины X будет отличаться от ее математического ожидания меньше чем на $\delta = 0{,}01$, если $\sigma = 1{,}5$.

Решение. По формуле (5), пользуясь табл. (3), имеем

$$P(|\bar{X} - a| < 0{,}01) = 2\Phi\left(\frac{0{,}01 \cdot 20}{1{,}5}\right) = 2\Phi(0{,}13) = 0{,}1034.$$

Отсюда следует, что значения случайной величины X заключены в интервале от $a - 0{,}01$ до $a + 0{,}01$ с вероятностью $p \simeq 0{,}1$.

12.6. Какое число опытов требуется провести с целью приближенного определения математического ожидания случайной величины, чтобы с уровнем доверия $\gamma = 0{,}99$ среднее арифметическое $\bar{X}$ наблюдаемых значений случайной величины X отличалось от ее математического ожидания не больше, чем на $\delta = 0{,}01$, если σ, найденное приближенно из первой серии опытов, равно $\sigma = 0{,}5$.

Решение. Из таблицы (11) для уровня доверия $\gamma = 0{,}99$ имеем, что $\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2 = 6{,}61$. Пользуясь формулой (6), получим

$$n = \left(\frac{0{,}5}{0{,}01}\right)^2 \cdot 6{,}61 = 16525.$$

28.13. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло

Вычисление определенных интегралов методом статистических испытаний целесообразно в тех случаях, когда не требуется высокая точность или численные методы вычисления многократных интегралов требуют большого объема вычислений. Суть метода рассмотрим на простейшем одномерном интеграле.

Пусть требуется найти значение определенного интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$. Если X — случайная величина, распределенная равномерно с плотностью $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ в интервале интегрирования [a, b], то математическое ожидание

$$M[\varphi(x)]=\int_a^b \varphi(x)f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx,$$

откуда интеграл

$$J_0=\int_a^b \varphi(x)dx=(b-a)M[\varphi(x)].$$

Заменяя математическое ожидание выборочной средней, будем иметь

$$J_0=(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i), \tag{1}$$

где x_i — возможное значение случайной величины X.

Поскольку случайная величина X распределена равномерно, то x_i разыгрываем по формуле

$$\int_a^{x_i} f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^{x_i} dx=r_i,$$

откуда

$$x_i=a+(b-a)r_i. \tag{2}$$

13.1. Вычислить интеграл $\int_1^3 (x^2+1)dx$, найти абсолютную погрешность и минимальное число испытаний, которое с надежностью $\gamma=0{,}95$ обеспечит верхнюю границу ошибки $\delta=0{,}1$.

Решение. По условию $a=1;\ b=3;\ \varphi(x)=x^2+1$. Величина интеграла определяется по формуле

$$J_0=(3-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+1).$$

С целью упрощения вычислений примем число испытаний равным $n=10$. Используя зависимость (2), находим, что $x_i=1+2r_i$. Выбирая 10 случайных чисел (табл. 10), составим таблицу

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,66	0,65	0,47	0,73	0,07	0,76	0,50	0,16	0,97	0,61
$2r_i$	1,32	1,30	0,94	1,46	0,14	1,52	1,00	0,32	1,94	1,22
$x_i=1+$ $+2r_i$	2,32	2,30	1,94	2,46	1,14	2,52	2,00	1,32	2,94	2,22
x_i^2	5,38	5,29	3,76	6,05	1,30	6,35	4,00	1,74	8,64	4,93
x_i^2+1	6,38	6,29	4,76	7,05	2,30	7,35	5,00	2,74	9,64	5,93

Складывая числа последней строки, получим $\sum\varphi(x_i)=57{,}44$, откуда $J_0=\frac{2}{10}\cdot 57{,}44=11{,}49$.

Поскольку $J=\int_1^3(x^2+1)dx=10{,}67$, то абсолютная погрешность равна $|J-J_0|=|10{,}67-11{,}49|=0{,}82$.

Случайная величина X в интервале интегрирования распределена равномерно. Дисперсия ее в этом случае равна

$$D(X)=(b-a)^2/12=(3-1)^2/12=1/3.$$

Минимальное число испытаний, которое с надежностью 0,95 обеспечивает верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$ находим из равенства (2) (параграф (28.12)) $n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$, где $\sigma^2 = D(X)$, $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$. Таким образом, $\Phi(t) = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$; из табл. (3) $t = 1{,}96$; $n = \dfrac{1{,}96^2}{0{,}1^2 \cdot 3} = 128$.

Глава 29
СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

29.1. Случайные функции и их характеристики

1°. *Случайной функцией* называется функция неслучайного аргумента t, которая при любом фиксированном значении аргумента представляет случайную величину. Случайная функция как совокупность случайных величин, зависящих от аргумента t, обозначается $X(t)$. Каждому фиксированному значению аргумента t соответствует случайная величина, которая называется *сечением случайной функции.*

Математическим ожиданием случайной функции называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при любом фиксированном значении аргумента t равна математическому ожиданию сечения $m_x(t) = M(X(t))$. С геометрической точки зрения математическое ожидание случайной функции есть средняя кривая, около которой группируются другие кривые.

Дисперсией случайной функции называется неслучайная функция $D_x(t)$, которая при любом фиксированном значении аргумента t равна дисперсии сечения $D_x(t) = D(X(t))$. Дисперсия характеризует рассеяние возможных кривых около математического ожидания случайной функции.

Среднее квадратическое отклонение случайной функции определяется по формуле: $\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}$.

Свойства математического ожидания и дисперсии случайной функции аналогичны свойствам математического ожидания и дисперсии случайной величины.

2°. Разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием называется *центрированной случайной функцией* $\overset{o}{X}(t)=X(t)-m_x(t)$.

Корреляционной функцией $K_x=(t_1,t_2)$ случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция, равная корреляционному моменту сечений для каждой пары фиксированных значений аргументов t_1,t_2 т. е. $K(t_1,t_2)=M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2))$.

Нормированной корреляционной функцией $\rho_x(t_1,t_2)$ случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция, равная коэффициенту корреляции сечений для каждой пары фиксированных значений аргументов t_1,t_2

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\sqrt{K_x(t_2,t_2)}} \tag{1}$$

3°. Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций $Z(t)=X(t)+Y(t)$ равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимных корреляционных функций с разным порядком следования аргументов, т. е.

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{xy}(t_2,t_1).$$

Если случайные функции некоррелированы, то корреляционная функция суммы равна сумме корреляционных функций.

1.1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных функций: а) $X(t)=U\sin 3t+e^{-t}$; б) $X(t)=U\cos t-Vt^2$, где U и V — случайные величины $M(U)=2;$ $M(V)=3;$ $D(U)=5;$ $D(V)=0,7.$

Решение. а) Поскольку математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функции равно сумме математического ожидания случайной функции и неслучайной функции и неслучайный множитель выносится за знак математического ожидания, то будем иметь

$$M(X(t))=M(U\sin 3t)+e^{-t}=\sin 3t\cdot M(U)+e^{-t}=2\sin 3t+e^{-t}.$$

Так как дисперсия суммы случайной функции и неслучайной функции равна дисперсии случайной функции и дисперсия произведения случайной функции на неслучайную равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции, то получим

$$D(X(t))=D(U\sin 3t+e^{-t})=D(U\sin 3t)=$$
$$=\sin^2 3t\cdot D(U)=5\sin^2 3t.$$

б) Аналогично

$$M(X(t))=M(U\cos t-Vt^2)=$$
$$=\cos t\,M(U)-t^2M(V)=2\cos t-3t^2.$$
$$D(X(t))=D(U\cos t-Vt^2)=$$
$$=\cos^2 t\,D(U)+t^4D(V)=5\cos^2 t+0{,}7t^4.$$

Здесь использовано свойство дисперсии, что дисперсия разности равна сумме дисперсий.

1.2. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию; в) нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)=U\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=2$, $D(U)=5$.

Решение. а) Сначала найдем математическое ожидание

$$m_x(t)=M(X(t))=M(U\cos 2t)=\cos 2t\,M(U)=2\cos 2t$$

и центрированную функцию

$$\overset{o}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=U\cos 2t-2\cos 2t=(U-2)\cos 2t.$$

Отсюда

$$\overset{o}{X}(t_1)=(U-2)\cos 2t_1;\ \ \overset{o}{X}(t_2)=(U-2)\cos 2t_2.$$

Таким образом, корреляционная функция будет равна

$$K_x(t_1,t_2)=M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2))=M((U-2)\cos 2t_1\cdot(U-2)\cos 2t_2)=$$
$$=\cos 2t_1\cos 2t_2 M((U-2)^2)=\cos 2t_1\cos 2t_2 D(U)=$$
$$=5\cos 2t_1\cos 2t_2.$$

б) Поскольку дисперсия случайной функции равна корреляционной функции этой функции при равных между собой значениях аргументов $t_1=t_2=t$, т. е. $D_x(t)=K(t_1,t_2)$, то

$$D_x(t)=5\cos 2t\cdot\cos 2t=5\cos^2 2t.$$

в) Нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ определяем, пользуясь формулой (1), по найденной в а) корреляционной функции

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{5\cos 2t_1\cos 2t_2}{\sqrt{5\cos 2t_1\cos 2t_1}\sqrt{5\cos 2t_2\cos 2t_2}}=1.$$

Так как нормированная корреляционная функция равна единице, то между сечениями линейная функциональная зависимость.

1.3. Даны случайные функции $X(t)=(t+1)U$ и $Y(t)=t^2V$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=2$; $M(V)=4$; $D(U)=3$; $D(V)=5$. **Найти:** а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы $Z(t)=X(t)+Y(t)$.

Решение. а) Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t)=M((t+1)U)+M(t^2V)=$$
$$=(t+1)M(U)+t^2M(V)=2(t+1)+4t^2.$$

б) Поскольку случайные величины U и V не коррелированы, то их корреляционный момент равен нулю $M((U-2)(V-4))=0$. Следовательно, взаимная корреляционная функция $R_{x,y}(t_1,t_2)=(t_1-1)t_2^2M((U-2)(V-4))=0$, т. е. функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы. Таким образом, корреляционная функция равна

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)=$$

$$=M(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2))+M(\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)).$$

Находя центрированные функции

$$\overset{\circ}{X}(t_1)=(t_1+1)U-2(t_1+1)=(t_1+1)(U-2);$$

$$\overset{\circ}{X}(t_2)=(t_2+1)(U-2);$$

$$\overset{\circ}{Y}(t_1)=t_1^2V-4t_1^2=t_1^2(V-4);\quad \overset{\circ}{Y}(t_2)=t_2^2(V-4)$$

и подставляя их в предыдущее выражение, получим

$$K_z(t_1,t_2)=(t_1+1)(t_2+1)M(U-2)^2+t_1^2t_2^2M(V-4)^2=$$

$$=(t_1+1)(t_2+1)D(U)+t_1^2t_2^2D(V)=3(t_1+1)(t_2+1)+5t_1^2t_2^2.$$

в) Искомая дисперсия равна

$$D_z(t)=K_z(t,t)=3(t+1)^2+5t^4.$$

29.2. Производная и интеграл случайной функции

1°. *Производной случайной функции* $X(t)$ называется среднеквадратичный предел отклонения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta t\to 0$:

$$X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} \qquad (1)$$

Математическое ожидание производной от случайной функции $X(t)$ равно производной от ее математического ожидания

$$m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t). \tag{2}$$

Корреляционная функция производной от случайной функции $X(t)$ равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{3}$$

Взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной $X'(t) = \dot{x}$ равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу :

$$R_{\dot{x}x}(t_1,t_2) = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}; \quad R_{x\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}. \tag{4}$$

2°. *Интегралом от случайной функции* $X(t)$ на отрезке называется предел в среднеквадратическом интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной длины частичного интервала $\underset{max}{\Delta} s_i$ и обозначается

$$Y(t) = \lim_{\underset{max}{\Delta} s_i \to 0} \sum X(s_i) \Delta s_i = \int_0^t X(s)ds. \tag{5}$$

Математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ от случайной функции $X(t)$ равно интегралу от ее математического ожидания

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s)ds \tag{6}$$

Здесь переменная интегрирования обозначена через s, чтобы не спутать ее с пределом интегрирования t.

Корреляционная функция интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ от случайной функции $X(t)$ равна двойному интегралу от ее корреляционной функции

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_x(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2 \tag{7}$$

Взаимная корреляционная функция интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ и случайной функции $X(t)$ равна интегралу от корреляционной функции случайной функции $X(t)$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}K_x(t_1,s)ds; \qquad R_{yx}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}K_x(s,t_2)ds. \tag{8}$$

2.1. Дано математическое ожидание $m_x(t)=t^3-1$ случайной функции $X(t)$. **Найти** математическое ожидание: а) ее производной; б) случайной функции $Y(t)=t^2X'(t)+t^4$.

Решение. а) Математическое ожидание производной равно $m_{\dot{x}}(t)=m_x'(t)=(t^3-1)'=3t^2$.

б) Математическое ожидание случайной функции равно $m_y(t)=M(Y(t))=t^2M(X'(t))+M(t^4)$. Поскольку $M(X'(t))=m_x'(t)=3t^2$, то $m_y(t)=3t^4+t^4=4t^4$.

2.2. Задана корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)=$ $=\cos 2t_1\cos 3t_2$ случайной функции $X(t)$. **Найти:** а) взаимные корреляционные функции $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$ и $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$; б) корреляционную функцию ее производной.

Решение. а) Воспользуемся формулами (4). Дифференцируя корреляционную функцию по t_1 и t_2, получим

$$R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)=(\cos 2t_1)'_{t_1}\cos 3t_2=-2\sin 2t_1\cos 3t_2;$$

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\cos 2t_1(\cos 3t_2)'_{t_2}=-3\cos 2t_1\sin 3t_2.$$

б) Корреляционную функцию производной находим по формуле (3)

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t_1}(\cos 2t_1\cos 3t_2)'_{t_2}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t_1}(-3\cos 2t_1\sin 3t_2)=6\sin 2t_1\sin 3t_2.$$

2.3. Зная математическое ожидание $m_x(t)=t^2+t$ случайной функции $X(t)$, **найти** математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$.

Решение. Математическое ожидание искомого интеграла находим по формуле (6)

$$m_y(t)=\int\limits_0^t m_x(s)ds=\int\limits_0^t (s^2+s)ds=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}.$$

2.4. Задана случайная функция $X(t)=U\sin^2 t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=3$. **Найти** математическое ожидание случайной функции $Y(t)=(t-1)\int\limits_0^t X(s)ds$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной функции $X(t)$

$$m_x(t)=M(X(t))=M(U\sin^2 t)=\sin^2 t\cdot M(U)=3\sin^2 t.$$

Математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ определяем по формуле (6)

$$m_y(t)=(t-1)\int\limits_0^t 3\sin^2 s\,ds=\frac{3}{2}(t-1)\int\limits_0^t (1-\cos 2s)ds=$$
$$=\frac{3}{2}(t-1)(t-\frac{1}{2}\sin 2t).$$

2.5. Задана корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)=$ $=t_1^3\cos 2t_2$ случайной функции $X(t)$. **Найти:** а) корреляционную функцию и дисперсию интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$; б) взаимные корреляционные функции $R_{xy}(t_1,t_2)$ и $R_{yx}(t_1,t_2)$ случайных функций $X(t)$ и $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Решение. а) Используя формулу (7), находим корреляционную функцию интеграла $Y(t)$

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} s_1^3\cos 2s_2 ds_1 ds_2=\frac{1}{2}\sin 2t_2\int_0^{t_1} s_1^3 ds_1=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2t_2\frac{t_1^4}{4}=\frac{1}{8}t_1^4\sin 2t_2.$$

Поскольку дисперсия равна $D_y(t)=K_y(t,t)$, то

$$D_y(t)=\frac{1}{8}t^4\sin 2t.$$

б) Взаимные корреляционные функции находим по формулам (8)

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} K_x(t_1,s)ds=t_1^3\int_0^{t_2}\cos 2s ds=\frac{1}{2}t_1^3\sin 2t_2;$$

$$R_{yx}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} K_x(s,t_2)ds=\cos 2t_2\int_0^{t_1} s^3 ds=\frac{1}{4}t_1^4\cos 2t_2.$$

2.6. Задана случайная функция $X(t)=U\sin 3t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=3$; $D(U)=1$. **Найти** корреляционную функцию и дисперсию интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Решение. Найдем сначала математическое ожидание случайной функции $X(t)$

$$m_x(t)=M(U\sin 3t)=\sin 3t\, M(U)=3\sin 3t.$$

Отсюда, центрированные функции будут

$$\overset{o}{X}(t_1)=X(t_1)-m_x(t_1)=U\sin 3t_1-3\sin 3t_1=(U-3)\sin 3t_1;$$

$$\overset{o}{X}(t_2)=X(t_2)-m_x(t_2)=U\sin 3t_2-3\sin 3t_2=(U-3)\sin 3t_2.$$

Находим корреляционную функцию

$$K_x(t_1,t_2)=M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2))=M((U-3)\sin 3t_1(U-3)\sin 3t_2)=$$
$$=\sin 3t_1\sin 3t_2 M((U-3)^2)=\sin 3t_1\sin 3t_2 D(U)=\sin 3t_1\sin 3t_2.$$

Корреляционную функцию интеграла $Y(t)$ находим по формуле (7)

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_x(s_1,s_2)ds_1ds_2=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sin 3s_1\sin 3s_2 ds_1ds_2=$$
$$=-\frac{1}{3}(\cos 3t_2-1)\int_0^{t_1}\sin 3s_1 ds_1=\frac{1}{9}(\cos 3t_1-1)(\cos 3t_2-1).$$

Поскольку дисперсия равна $D_y(t)=K_y(t,t)$, то

$$D_y(t)=\frac{1}{9}(\cos 3t-1)^2.$$

29.3. Стационарные случайные функции и их характеристики

1°. *Стационарной случайной функцией* $X(t)$ называется функция, математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента t, и корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau=t_2-t_1$, т. е.

$$K_x(t_1,t_2)=k_x(t_2-t_1)=k_x(\tau). \qquad (1)$$

Дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна при всех значениях аргумента t и равна $D_x(t)=K_x(t,t)=k_x(t-t)=k_x(0)$, т. е. равна значению ее корреляционной функции в начале координат ($t=0$).

2°. *Нормированной корреляционной функцией* стационарной случайной функции называется неслучайная функция аргумента τ

$$\rho_x(\tau)=k_x(\tau)/k_x(0). \qquad (2)$$

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = r_{xy}(\tau) \tag{3}$$

3.1. Доказать, что $X(t) = \sin(t+\varphi)$ — стационарная случайная функция, если φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. Найдем сначала математическое ожидание

$$m_x(t) = M(\sin(t+\varphi)) = M(\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\ \cos t) =$$

$$= \sin t\, M(\cos\varphi) - \cos t\, M(\sin\varphi).$$

Поскольку распределение равномерное, то

$$M(\cos\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0 \text{ и}$$

$$M(\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

Таким образом, $m_x(t) = 0$.

Учитывая, что центрированная функция равна $\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = \sin(t+\varphi)$, найдем корреляционную функцию

$$K_x(t_1,t_2) = M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)) = M(\sin(t_1+\varphi)\sin(t_2+\varphi)) =$$

$$= M\left(\frac{1}{2}(\cos(t_2-t_1) - \cos(t_1+t_2+2\varphi))\right) = \frac{1}{2}(\cos(t_2-t_1) -$$

$$-\frac{1}{2}M\cos(t_1+t_2+2\varphi)) = \frac{1}{2}\cos(t_2-t_1) - \frac{1}{2}\cos(t_2+t_1)M(\cos 2\varphi) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin(t_2-t_1)M(\sin 2\varphi) = \frac{1}{2}\cos(t_2-t_1),$$

здесь $M(\cos 2\varphi) = M(\sin 2\varphi) = 0$.

Полагая $t_1 = t_2 = t$, находим, что дисперсия $D_x(t) = K_x(t,t) = \frac{1}{2}\cos(t-t) = \frac{1}{2}$.

Так как математическое ожидание случайной функции постоянно и ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов, а дисперсия сохраняет постоянное значение при любых значениях аргумента, то функция $X(t)$ — является стационарной случайной функцией.

3.2. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=3e^{-\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. **Найти** нормированную корреляционную функцию.

Решение. При определении нормированной корреляционной функции воспользуемся формулой (2)

$$\rho_x(\tau)=\frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}=\frac{3e^{-\tau^2}}{3e^0}=e^{-\tau^2}.$$

3.3. Доказать, что две стационарные случайные функции $X(t)=\cos(2t+\varphi)$ и $Y(t)=\sin(2t+\varphi)$ стационарно связаны, если φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. Найдем математические ожидания

$$m_x(t)=M(\cos(2t+\varphi))=M(\cos 2t\,cos\,\varphi-\sin 2t\sin\varphi)=$$

$$=\cos 2t\,M(\cos\varphi)-\sin 2t\,M(\sin\varphi)=0;$$

$$m_y(t)=M(\sin(2t+\varphi))=\sin 2t\,M(\cos\varphi)-\cos 2t\,M(\sin\varphi)=0.$$

Центрированные функции примут вид

$$\overset{o}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=\cos(2t+\varphi);\quad \overset{o}{X}(t)=\sin(2t+\varphi).$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция равна

$$R_y(t_1,t_2)=M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2))=M(\cos(2t_1+\varphi)\sin(2t_2+\varphi))=$$

$$=\frac{1}{2}M(\sin 2(t_2-t_1)+\sin 2(t_1+t_2+\varphi))=\frac{1}{2}\sin 2(t_2-t_1).$$

Нетрудно доказать, что здесь математическое ожидание второго слагаемого равно нулю.

Поскольку взаимная корреляционная функция заданных стационарных случайных функций зависит только от разности аргументов, то эти функции стационарно связаны.

29.4. Корреляционная функция производной и интеграла стационарной случайной функции

1°. Корреляционная функция производной $X'(t)$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус:

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k_x''(\tau). \tag{1}$$

Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной $X'(t) = \dot{x}$ равна первой производной от корреляционной функции $k_x(\tau)$ со знаком в зависимости от порядка индекса $\dot{x}$

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = k_x'(\tau) \text{ и } r_{\dot{x}x}(\tau) = -k_x'(\tau). \tag{2}$$

2°. Корреляционная функция интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$ от стационарной случайной функции $X(t)$ определяется по формуле

$$K_y(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)k_x(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^{t_1-t_2}(t_2-t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau + \int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Дисперсия интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$ от стационарной случайной функции $X(t)$ определяется по формуле

$$D_y(t) = 2\int_0^t (t-\tau)k_x(\tau)d\tau. \tag{4}$$

4.1. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 0,5e^{-2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. **Найти:** а) корреляционную функцию и дисперсию производной $\dot{x}$; б) взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее производной.

Решение. а) Искомую корреляционную функцию находим по формуле (1)

$$k_{\dot{x}}(\tau) = (2\tau e^{-2\tau^2})' = 2e^{-2\tau^2}(-4\tau^2 + 1).$$

Полагая $\tau = 0$, находим дисперсию

$$D_{\dot{x}} = k_{\dot{x}}(0) = +2.$$

б) Взаимные корреляционные функции находим по формуле (2)

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = k_x'(\tau) = -2\tau e^{-2\tau^2};$$

$$r_{\dot{x}x}(\tau) = -k_x'(\tau) = +2\tau e^{-2\tau^2}.$$

4.2. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{\tau^2+1}}$ стационарной случайной функции $X(t)$. **Найти** дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Решение. Дисперсию интеграла находим по формуле (4)

$$D_y(t) = 2\int_0^t (t-\tau)k_x(\tau)d\tau = 2\int_0^t \frac{t-\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau =$$

$$= 2t\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} - \int_0^t (\tau^2+1)^{-1/2}d(\tau^2+1) =$$

$$= 2(t\,ln\left|\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right| - \sqrt{\tau^2+1})\Big|_0^t = 2(t\,ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| - \sqrt{t^2+1} + 1).$$

Поскольку дисперсия не постоянна и зависит от аргумента t, то функция $Y(t)$ не стационарна.

Глава 30
ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

30.1. Основные понятия системы массового обслуживания (СМО)

Установление зависимости между случайными потоками заявок, числом каналов, где эти заявки обслуживаются, производительностью каналов, условиями работы СМО и эффективностью обслуживания представляет суть теории массового обслуживания.

Примерами таких систем могут служить сбербанки, почтовые отделения, телефонные станции, бензоколонки, билетные кассы и т. д.

Обычно СМО состоит их некоторого числа каналов обслуживания, например, линии связи, рабочие точки обслуживания и т. д. СМО могут быть *одноканальные* или *многоканальные* .

Каждая СМО обладает определенной *пропускной способностью,* позволяющей справляться с потоками заявок. Задача теории массового обслуживания — установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, их производительностью и пропускной способностью. СМО бывают двух типов:

1. Системы с *отказами*, когда все каналы заняты, то заявка не обслуживается и покидает систему.

2. Система с *ожиданием* (с очередью). Заявка становится в очередь, которая бывает упорядоченная, случайная, с приоритетом.

Системы с очередью делятся на системы с *неограниченным ожиданием*, когда заявка «терпеливо ждет», когда ее обслужат и системы с *ограниченным ожиданием*, когда заявка после какого-то срока пребывания в очереди уходит.

Эффективность СМО определяется *абсолютной пропускной способностью*, т. е. средним числом заявок, которые могут быть обслужены в единицу времени, и *относительной пропускной способностью*, т. е. отношением обслуженных заявок ко всем заявкам, поступившим в СМО.

1. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания события на интервал τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси Ot находится этот участок.

2. Поток событий называется *потоком без последствий*, если для любых участков число событий, попавших на один участок, не зависит от того, сколько событий попало на другой участок. Например, появление одного клиента у бензоколонки не зависит от появления другого.

3. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный участок двух событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Так, поток посылок, поступающих на предприятие, можно рассматривать как ординарный, но поток посылок, поступающих в контейнерах, не ординарен.

Поток, обладающий этими свойствами, называется *простейшим*, $\lambda = \text{const}$ — интенсивность потока событий.

Если поток нестационарен, но не имеет последствия и ординарен, то называется *нестационарным пуассоновским* потоком $\lambda = \lambda(t)$, то есть потоком, связанным с распределением Пуассона.

Математический анализ СМО значительно облегчается, если случайный процесс марковский. Тогда работа СМО сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а в пределе к системе линейных алгебраических уравнений.

Для того, чтобы процесс был марковским, необходимо, чтобы поток заявок описывался пуассоновским потоком, потоком без последствий. Если поток не является пуассоновским, то задача значительно усложняется.

30.2. Определение цепи Маркова. Матрица перехода

1°. *Цепью Маркова* называется последовательность изменения состояний, когда вероятностные свойства системы в последующий промежуток времени $t > t_0$ определяются их значениями в данный момент $t = t_0$ и не зависят от значений в предыдущие моменты.

Если система из одного состояния в другое переходит скачком (мгновенно), то случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*. Для процессов с непрерывными состояниями характерен постепенный, плавный переход из одного состояния в другое.

Геометрически процесс с дискретными состояниями изображается графом состояний (рис. 30.1), который стрелками показывает возможные переходы из состояния S_i в состояние S_j.

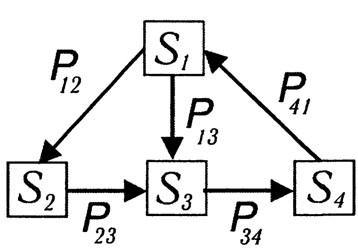


Рис. 30.1

2°. *Переходной вероятностью* P_{ij} называется условная вероятность перехода системы из состояния i в состояние j.

Матрицей перехода системы называется матрица, элементами которой являются переходные вероятности этой системы

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix},$$

где сумма вероятностей каждой строки равна единице

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если переход из состояния i в состояние j невозможен, то вероятность перехода $P_{ij}=0$.

На графе состояний переходные вероятности проставляются у соответствующих стрелок (рис. 30.1).

Матрица перехода из одного состояния в другое за два шага выражается через матрицу перехода за один шаг по формуле

$$P_2 = P_1 \cdot P_1 = P_1^2, \tag{1}$$

за три шага

$$P_3 = P_1 \cdot P_2 = P_1 \cdot P_1^2 = P_1^3. \tag{2}$$

В общем случае $P_n = P_1^n$, т. е. задача сводится к перемножению матриц.

Марковская цепь называется *однородной*, если вероятности перехода не зависят от номера шага; если зависят, то *неоднородной*.

Зная матрицу переходных вероятностей или размеченный граф состояний S_i, вероятности состояний после k- того шага определяются по формуле

$$P_i(k)=\sum_{j=1}^{n}P_j(k-1)P_{ji} \quad (i=1,2,...,n) \tag{3}$$

причем $\sum_{j=1}^{n}P_j(k)=1$, т.к. вероятности состояний несовместных событий образуют полную систему.

2.1. Задана матрица перехода $P_1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$. **Найти** матрицу перехода P_2 и P_3.

Решение. Воспользуемся формулой (1), тогда получим

$$P_2=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8\cdot 0,8+0,6\cdot 0,2 & 0,2\cdot 0,8+0,4\cdot 0,2\\ 0,8\cdot 0,6+0,6\cdot 0,4 & 0,2\cdot 0,6+0,4\cdot 0,4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,76 & 0,24\\ 0,72 & 0,28\end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2), будем иметь

$$P_3=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,76 & 0,24\\ 0,72 & 0,28\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,608+0,144 & 0,192+0,056\\ 0,456+0,288 & 0,144+0,112\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,752 & 0,248\\ 0,744 & 0,256\end{pmatrix}.$$

2.2. По некоторой цели ведется стрельба. Граф состояний с переходными вероятностями показан на рис. 30.2.

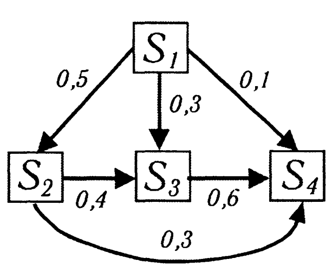


Рис. 30.2

Возможные состояния цели: S_1 — цель не повреждена; S_2 — незначительные повреждения; S_3 — значительные повреждения и S_4 — цель полностью уничтожена. **Найти** вероятности состояний цели после четырех выстрелов.

Решение. Найдем матрицу переходных вероятностей. Из графа состояний системы имеем $P_{12} = 0,5;\ P_{13} = 0,3;\ P_{14} = 0,1$. Поскольку сумма переходных вероятностей образует полную группу событий, то $P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14}) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Аналогично:

$$P_{21} = 0;\ P_{23} = 0,4;\ P_{24} = 0,3;\ P_{22} = 0,3;$$

$$P_{31} = 0;\ P_{32} = 0;\ P_{34} = 0,6;\ P_{33} = 0,4;$$

$$P_{41} = 0;\ P_{42} = 0;\ P_{43} = 0;\ P_{44} = 1.$$

Таким образом, матрица переходных вероятностей будет

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в начальный момент цель находится в состоянии S_1, то $P_1(0) = 1$. Вероятности состояний после первого выстрела (шага) определяются первой строкой матрицы $P_1(1) = 0,1;$ $P_2(1) = 0,5;$ $P_3(1) = 0,3;$ $P_4(1) = 0,1$. По формуле (3) находим вероятности состояний после второго выстрела

$$P_1(2) = P_1(1)P_{11} = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01;$$

$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} = 0,1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,20;$$

$$P_3(2) = P_1(1)P_{13} + P_2(1)P_{23} + P_3(1)P_{33} =$$

$$= 0,1 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,35;$$

$$P_4(2)=P_1(1)P_{14}+P_2(1)P_{24}+P_3(1)P_{34}+P_4(1)P_{44}=$$

$$=0,1\cdot 0,1+0,5\cdot 0,3+0,3\cdot 0,6+0,1\cdot 1=0,44.$$

Проверка: $P_1(2)+P_2(2)+P_3(2)+P_4(2)=1.$

Вероятности состояний после третьего выстрела

$$P_1(3)=P_1(2)P_{11}=0,01\cdot 0,1=0,001;$$

$$P_2(3)=P_1(2)P_{12}+P_2(2)P_{22}=0,01\cdot 0,5+0,2\cdot 0,3=0,065;$$

$$P_3(3)=P_1(2)P_{13}+P_2(2)P_{23}+P_3(2)P_{33}=$$

$$=0,01\cdot 0,3+0,2\cdot 0,4+0,35\cdot 0,4=0,223;$$

$$P_4(3)=P_1(2)P_{14}+P_2(2)P_{24}+P_3(2)P_{34}+P_4(2)P_{44}=$$

$$=0,01\cdot 0,1+0,2\cdot 0,3+0,35\cdot 0,6+0,44\cdot 1=0,711.$$

Вероятности состояний после четвертого выстрела

$$P_1(4)=P_1(3)P_{11}=0,001\cdot 0,1=0,0001;$$

$$P_2(4)=P_1(3)P_{12}+P_2(3)P_{22}=0,001\cdot 0,5+0,065\cdot 0,3=0,02;$$

$$P_3(4)=P_1(3)P_{13}+P_2(3)P_{23}+P_3(3)P_{33}=$$

$$=0,001\cdot 0,3+0,065\cdot 0,4+0,223\cdot 0,4=0,1155;$$

$$P_4(4)=P_1(3)P_{14}+P_2(3)P_{24}+P_3(3)P_{34}+P_4(3)P_{44}=$$

$$=0,001\cdot 0,1+0,065\cdot 0,3+0,223\cdot 0,6+0,711\cdot 1=0,8644.$$

Таким образом, вероятность первого состояния при четырех выстрелах $P_1(4)=0,0001;$ второго — $P_2(4)=0,02;$ третьего — $P_3(4)=0,1155$ и четвертого — $P_4(4)=0,711.$

2.3. Цель может быть в тех же четырех состояниях, что и в предыдущем примере. Вероятности перехода при трех выстрелах различны и заданы тремя матрицами

$$\left(P_{ij}^{(1)}\right)=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(P_{ij}^{(2)}\right)=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(P_{ij}^{(2)}\right)=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти вероятности состояний после трех выстрелов, если в начальный момент цель находится в состоянии S_1.

Решение. Поскольку вероятности перехода меняются шаг от шага, то марковская цепь неоднородная. Вероятности состояний при первом выстреле берем из первой матрицы $P_1(1)=0,1;$ $P_2(1)=0,4;$ $P_3(1)=0,3;$ $P_4(1)=0,2$.

Вероятности состояний после второго выстрела

$$P_1(2)=P_1(1)P_{11}^{(2)}=0,1\cdot 0,2=0,02;$$

$$P_2(2)=P_1(1)P_{12}^{(2)}+P_2(1)P_{22}^{(2)}=0,1\cdot 0,3+0,4\cdot 0,4=0,19;$$

$$P_3(2)=P_1(1)P_{13}^{(2)}+P_2(1)P_{23}^{(2)}+P_3(1)P_{33}^{(2)}=$$
$$=0,1\cdot 0,3+0,4\cdot 0,4+0,3\cdot 0,3=0,28;$$

$$P_4(2)=P_1(1)P_{14}^{(2)}+P_2(1)P_{24}^{(2)}+P_3(1)P_{34}^{(2)}+P_4(1)P_{44}^{(2)}=$$
$$=0,1\cdot 0,2+0,4\cdot 0,2+0,3\cdot 0,7+0,2\cdot 1=0,51.$$

Вероятности состояний после третьего выстрела

$$P_1(3) = P_1(2)P_{11}^{(3)} = 0,02 \cdot 0,3 = 0,006;$$

$$P_2(3) = P_1(2)P_{12}^{(3)} + P_2(2)P_{22}^{(3)} = 0,02 \cdot 0,4 + 0,19 \cdot 0,5 = 0,103;$$

$$P_3(3) = P_1(2)P_{13}^{(3)} + P_2(2)P_{23}^{(3)} + P_3(2)P_{33}^{(3)} =$$

$$= 0,02 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,3 + 0,28 \cdot 0,2 = 0,117;$$

$$P_4(3) = P_1(2)P_{14}^{(3)} + P_2(2)P_{24}^{(3)} + P_3(2)P_{34}^{(3)} + P_4(2)P_{44}^{(3)} =$$

$$= 0,02 \cdot 0,1 + 0,19 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,8 + 0,51 \cdot 1 = 0,774.$$

Следовательно, вероятности состояний после трех выстрелов будут:

$$P_1(3) = 0,006; \; P_2(3) = 0,103; \; P_3(3) = 0,117; \; P_4(3) = 0,774.$$

30.3. Непрерывные марковские цепи. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояния

1°. Пусть переход системы из состояния S_i в состояние S_j происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени t. Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *непрерывной цепью Маркова*. Вместо вероятностей перехода P_{ij} системы введем плотности вероятностей перехода λ_{ij}, которые в непрерывной цепи Маркова представляют интенсивность потока событий, переводящую систему из одного состояния в другое. Поток событий рассматривается как простейший (пуассоновский).

2°. Имея размеченный граф (рис. 30.3) и зная начальное состояние системы, можно для любого t определить вероятности состояний $P_i(t)$. Для этого используют дифференциальные уравнения Колмогорова, которые формально составляются по следующей схеме.

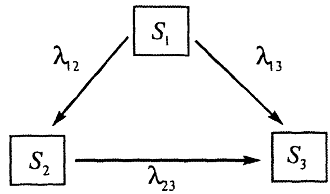


Рис. 30.3

Каждому состоянию соответствует линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Левая часть содержит производную вероятности состояния, а правая — столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода λ_{ij} на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка и имеет знак «плюс», если стрелка направлена в рассматриваемое состояние, и знак «минус», если стрелка направлена из искомого состояния. Так для графа (рис. 30.3) система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{dP_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}P_1 - \lambda_{23}P_2;$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \lambda_{23}P_2 + \lambda_{13}P_1.$$

Следует заметить, что, пользуясь условием $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, число уравнений можно было бы уменьшить на одно. Кроме того, система уравнений Колмогорова справедлива не только для постоянных интенсивностей потоков, но и для переменных: $\lambda_{12} = \lambda_{12}(t)$, $\lambda_{13} = \lambda_{13}(t)$, $\lambda_{23} = \lambda_{23}(t)$.

Если в начальный момент времени при $t = 0$ система находится в состоянии S_1, то, принимая начальные условия $P_1 = 1$; $P_2 = P_3 = 0$, решение системы особого труда не составит.

3°. Если число состояний S системы конечно и из каждого состояния можно перейти в любое другое, то существуют предельные вероятности состояний, которые не зависят от начального состояния системы и при $t \to 0$ в системе устанавливается предельный стационарный режим. В этом случае в системе уравнений Колмогорова можно все левые части приравнять нулю. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающая вероятности состояний, превращается в систему линейных алгебраических уравнений. Присоединяя сюда условие $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, эти уравнения дают возможность определить все неизвестные предельные вероятности.

Практически, алгебраические уравнения для предельных вероятностей можно записать сразу, минуя составление дифференциальных уравнений.

3.1. Система состоит из двух независимых узлов и может принимать следующие состояния: S_{11} — оба узла исправны; S_{12} — первый узел исправен, второй ремонтируется; S_{21} — второй узел исправен, первый ремонтируется; S_{22} — оба узла ремонтируются (рис. 30.4). **Записать** уравнения Колмогорова, если поток восстановлений с интенсивностью λ, поток отказов первого узла с интенсивностью λ_1 и второго узла — λ_2, причем все потоки пуассоновские и каждый узел после отказа начинает сразу же ремонтироваться.

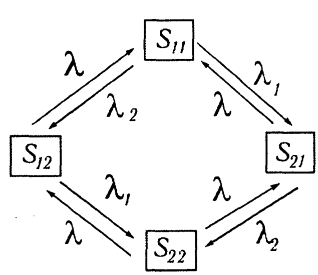


Рис. 30.4

Решение. Обозначим вероятности состояний, соответственно: P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}. Тогда система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний будет

$$\frac{dP_{11}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{11} + \lambda(P_{12} + P_{21});$$

$$\frac{dP_{12}}{dt} = -(\lambda + \lambda_1)P_{12} + \lambda_2 P_{11} + \lambda P_{22};$$

$$\frac{dP_{21}}{dt} = -(\lambda + \lambda_2)P_{21} + \lambda_1 P_{11} + \lambda P_{22};$$

$$\frac{dP_{22}}{dt} = -2\lambda P_{22} + \lambda_1 P_{12} + \lambda_2 P_{21}.$$

Если в начальный момент при $t = 0$ система исправна, то начальные условия будут: $P_{11} = 1;$ $P_{12} = P_{21} = P_{22} = 0$.

3.2. Группа бомбардировщиков в составе девяти самолетов движется над территорией противника. Поток атак средствами ПВО с интенсивностью λ/k распределяется равномерно между самолетами, где k — число сохранившихся самолетов. **Записать** уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, если в результате атаки самолет поражается с вероятностью P.

Решение. Составим граф состояний (рис. 30.5). Обозначим за S_0 — состояние системы, что все самолеты целы; S_1 — сбит один; S_2 — сбито два, ..., S_9 — сбито девять самолетов. Вероятности состояний обозначим, соответственно: $P_0, P_1, \ldots, P_9$. Интенсивность потока поражающих атак с учетом сбитых самолетов равна λp. Проставим эту интенсивность у стрелок.

$$\boxed{S_0} \xrightarrow{\lambda p} \boxed{S_1} \xrightarrow{\lambda p} \boxed{S_2} \xrightarrow{\lambda p} \boxed{S_3} \xrightarrow{\lambda p} \cdots \xrightarrow{\lambda p} \boxed{S_8} \xrightarrow{\lambda p} \boxed{S_9}$$

Рис. 30.5

Уравнения Колмогорова примут вид

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda p P_0;$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda p P_1 + \lambda p P_0;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\lambda p P_2 + \lambda p P_1;$$

....

$$\frac{dP_8}{dt} = -\lambda p P_8 + \lambda p P_7;$$

$$\frac{dP_9}{dt} = \lambda p P_8.$$

Поскольку в начальный момент все самолеты целы, то начальные условия будут: $P_0 = 1;\ P_1 = P_2 = \ldots = P_9 = 0$ при $t = 0$.

3.3. В условиях задачи (3.1.) по графу состояний системы (рис. 30.4) **записать** алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Решение. Минуя этап дифференциальных уравнений, запишем систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний в виде

$$-(\lambda_1 + \lambda_2)P_{11} + \lambda P_{12} + \lambda P_{21} = 0;$$

$$\lambda_2 P_{11} - (\lambda + \lambda_1)P_{12} + \lambda P_{22} = 0;$$

$$\lambda_1 P_{11} - (\lambda + \lambda_2)P_{21} + \lambda P_{22} = 0;$$

$$\lambda_1 P_{12} + \lambda_2 P_{21} - 2\lambda P_{22} = 0.$$

Поскольку алгебраическая система однородная и определяет искомые вероятности $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ только с точностью до постоянного множителя, то следует к ней добавить нормировочное условие

$$P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22} = 1,$$

которое позволяет совместно с системой найти все искомые вероятности.

30.4. Универсальные марковские цепи

1°. Процесс «гибели и размножения». Марковская непрерывная цепь называется «*процессом гибели и размножения*», если все состояния можно вытянуть в одну цепочку вида (рис. 30.6).

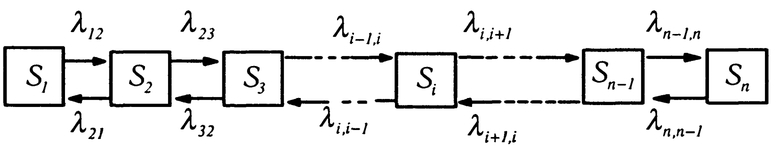


Рис. 30.6

Процесс «гибели и размножения» встречается в различных приложениях и, в общем случае, предельные вероятности состояний находят по формулам

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1;$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} P_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_i = \frac{\lambda_{i-1,i} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{i-1,i} \dots \lambda_{21}} P_1; \qquad (1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}} P_1;$$

$$P_1 = 1 \Big/ \left(1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{i-1,i} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{i,i-1} \dots \lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}} \right).$$

2°. Циклический процесс. Марковский непрерывный процесс называется *циклическим*, если случайные состояния объединены в кольцо (рис. 30.7) с односторонними переходами.

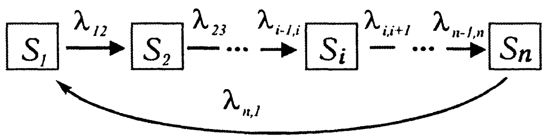


Рис. 30.7

Предельные вероятности состояний для циклических процессов имеют вид

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} P_1;$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} P_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_i = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{i,i+1}} P_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n1}} P_1;$$

$$P_1 = 1 \Big/ \left(1 + \lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n1}}\right)\right).$$

Если от интенсивностей λ_{ij} перейти к средним временам $\bar{t}_i$ пребывания системы в состоянии S_i $(i = 1, \ldots, n)$, то предельные вероятности состояний (2) в циклической схеме находятся по формуле

$$P_i = \frac{\bar{t}_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

4.1. Система характеризуется графом состояний (рис. 30.8). **Найти** предельные вероятности состояний.

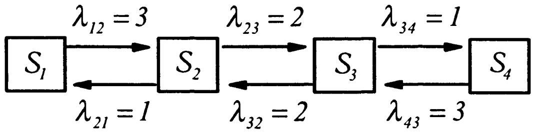


Рис. 30.8

Решение. Из графа состояний видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс «гибели и размножения». Воспользуемся формулой (1), учитывая, что по условию имеет место четыре состояния.

$$P_1 = 1\Big/\left(1+\frac{3}{1}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 1}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\right)=\frac{1}{8};$$

$$P_2=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\;\; P_3=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\;\; P_4=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

4.2. В течение суток ЭВМ может находиться в одном из следующих состояний:

S_1 — исправна, $\overline{t}_1 = 19ч$;

S_2 — неисправна, ведется поиск неисправности, $\overline{t}_2 = 1ч$;

S_3 — ремонтируется, $\overline{t}_2 = 3ч$;

S_4 — подготовка к пуску, $\overline{t}_4 = 1ч$.

Найти предельные вероятности состояний, если потоки событий простейшие.

Решение. Составим граф состояний ЭВМ (рис. 30.9).

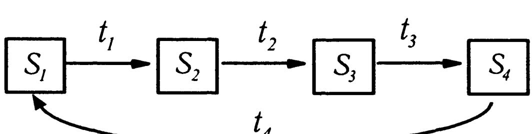


Рис. 30.9

Поскольку граф состояний имеет циклический вид и известно среднее время пребывания ЭВМ в каждом из состояний, то при определении предельных вероятностей состояний воспользуемся формулой (3)

$$P_1 = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \bar{t}_3 + \bar{t}_4} = \frac{19}{19+1+3+1} = \frac{19}{24};$$

$$P_2 = \frac{1}{24};\ P_3 = \frac{3}{24};\ P_4 = \frac{1}{24}.$$

28.5. Одноканальная и многоканальная СМО с отказами

1°. Пусть СМО состоит из одного канала и поток заявок пуассоновский с интенсивностью $\lambda = \lambda(t)$.

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему. Система имеет граф состояний (рис. 30.10). Обозначим: S_0 — канал свободен; S_1 — канал занят; $P_0(t)$ и $P_1(t)$ — вероятности состояний; λ — поток заявок, который переводит систему из состояния S_0 в S_1; μ — интенсивность потока обслуживания.

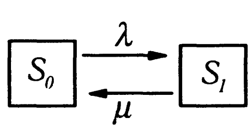


Рис. 30.10

Очевидно для любого момента времени

$$P_0(t) + P_1(t) = 1 \tag{1}$$

Составим уравнения Колмогорова

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1 \tag{2}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\mu P_1 + \lambda P_0$$

Из решения уравнений вероятностей состояния (2) находим, что

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \tag{3}$$

Для одноканальной СМО P_0 есть не что иное, как относительная пропускная способность q и при $t \to \infty$, т. е. когда процесс обслуживания уже установился

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \tag{4}$$

Отсюда абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda} \tag{5}$$

Относительная пропускная способность характеризуется тем, что заявка, пришедшая в момент t, будет обслужена. Таким образом, вероятность отказа будет

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \tag{6}$$

2°. Рассмотрим n-канальную СМО с отказами. Будем нумеровать состояния по числу занятых каналов. S_0 — все каналы свободны; S_1 — один канал занят, ... , S_k — заняты k каналов, ... , S_n — заняты все n каналов. Граф состояний показан на рис. 30.11.

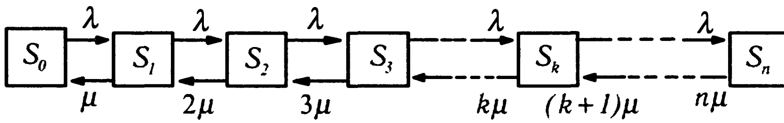


Рис. 30.11

Обозначим $\lambda/\mu = \rho$ — приведенная интенсивность потока, иначе среднее число заявок за среднее время обслуживания. Составляя для графа 30.11. уравнения Колмогорова и решая их, находим предельные вероятности состояний (формулы Эрланга)

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}P_0;\ (k = 1, 2, ..., n)$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}} = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Зная предельные вероятности $P_0, P_1, ..., P_n$ найдем характеристики СМО, вероятность отказа, относительную пропускную способность, абсолютную пропускную способность.

Если все каналы заняты, заявка получает отказ и покидает систему. Таким образом, вероятность отказа

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0. \quad (8)$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена, т. е. противоположное событие, равна

$$q = 1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!}P_0, \quad (9)$$

здесь q — относительная пропускная способность.

Абсолютная пропускная способность будет

$$A = \lambda q = \lambda(1 - P_n). \quad (10)$$

Найдем теперь среднее число занятых каналов $\bar{k}$. Воспользуемся средним значением или MO дискретной случайной величины

$$\bar{k} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + ... + n \cdot P_n.$$

Поскольку A есть среднее число заявок, обслуженное в единицу времени, то

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_n)}{\mu} = \rho(1 - P_n). \quad (11)$$

5.1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0{,}8$ (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора $\overline{t}_{об} = 1{,}5$ мин. Все потоки событий — простейшие. **Определить** предельные (при $t \to \infty$) значения: а) относительной и абсолютной пропускной способности; б) вероятности отказа.

Решение. Определяем параметр μ потока обслуживания $\mu = 1/\overline{t}_{об} = 1/1{,}5 = 0{,}667.$

По формуле (4) находим относительную пропускную способность

$$q = \frac{0{,}667}{0{,}8 + 0{,}667} = 0{,}455.$$

По формуле (5) определяем абсолютную пропускную способность

$$A = \lambda q = 0{,}8 \cdot 0{,}455 = 0{,}366.$$

Вероятность отказа будет

$$P_{отк} = 1 - q = 0{,}545,$$

т. е. около 55% вызовов будут получать отказ.

5.2. Рассмотрим 3-х канальную СМО. Пусть $\lambda = 0{,}8$ — поток заявок, $\mu = 0{,}667$ — интенсивность потока обслуживания. **Найти** вероятности состояний, относительную и абсолютную пропускную способность, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

Решение. Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8/0{,}667 = 1{,}2.$

По формулам Эрланга

$$P_1 = \rho P_0; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0; \quad P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0;$$

$$P_1 = 1{,}2 P_0; \quad P_2 = 0{,}72 P_0; \quad P_3 = 0{,}288 P_0;$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}} = \frac{1}{1+1,2+0,288} = 0,312.$$

Вероятность отказа по формуле (8) будет $P_{отк} = 0,09$. Вероятность состояний $P_1 = 1,2 \cdot 0,312 = 0,374$; $P_2 = 0,72 \cdot$ $\cdot 0,312 = 0,22$; $P_3 = 0,288 \cdot 0,312 = 0,09$. Относительная пропускная способность $q = 1 - P_3 = 0,91$. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q = 0,8 \cdot 0,91 = 0,728$. Среднее число занятых каналов $\bar{k} = \rho(1 - P_3) = 1,2 \cdot 0,9 = 1,09$.

28.6. Одноканальная СМО с ожиданием

1°. Рассмотрим простейшую систему, т. е. одноканальную СМО с ожиданием. Если канал занят, то заявки становятся в очередь и ожидают обслуживания.

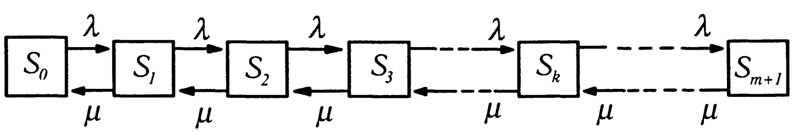


Рис. 30.12

Поток заявок с интенсивностью λ; поток восстановлений — μ. Пусть число мест в очереди ограничено числом m, т. е. если заявок больше m, то заявки, поступившие позже, покидают систему.

S_0 — канал свободен; S_1 — канал занят, очереди нет; S_2 — канал занят, в очереди одна заявка; ... S_k — канал занят, в очереди $k-1$ заявок; S_{m+1} — канал занят, в очереди m заявок. Составим граф состояний (рис. 30.12). Пользуясь общим решением для схемы гибели и размножения, запишем выражения предельных вероятностей состояний

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (\lambda/\mu)P_0, \\
P_2 &= (\lambda/\mu)^2 P_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_k &= (\lambda/\mu)^k P_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{m+1} &= (\lambda/\mu)^{m+1} P_0,
\end{aligned} \qquad (1)
$$

$$
P_0 = \frac{1}{1+(\lambda/\mu)+(\lambda/\mu)^2+\ldots+(\lambda/\mu)^{k+1}}.
$$

Если ввести обозначение $\lambda/\mu = \rho$, то

$$
P_1 = \rho P_0,\ P_2 = \rho^2 P_0, \ldots,\ P_k = \rho^k P_0, \ldots, P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0; \qquad (2)
$$

$$
P_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}}
$$

или через геометрическую прогрессию со знаменателем ρ

$$
P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (3)
$$

2°. Определим характеристики СМО с очередью. Вероятность отказа будет, т. е. когда все m каналов заняты

$$
P_{отк} = P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0 = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (4)
$$

Относительная пропускная способность

$$
q = 1 - P_{m+1} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (5)
$$

Абсолютная пропускная способность

$$
A = \lambda q. \qquad (6)
$$

Среднее число заявок в очереди, ожидающих обслуживания

$$\bar{r} = \frac{\rho^2\left[1-\rho^m\left(m+1-m\rho\right)\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)\left(1-\rho\right)}. \tag{7}$$

Среднее число заявок в системе $\bar{k}$ равно сумме среднего числа заявок в очереди и среднего числа заявок под обслуживанием $\bar{\omega}$

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} = \bar{r} + \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}. \tag{8}$$

Среднее время ожидания равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность потока заявок

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\rho\left[1-\rho^m\left(m+1-m\rho\right)\right]}{\mu\left(1-\rho^{m+2}\right)\left(1-\rho\right)}. \tag{9}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно сумме среднего времени ожидания и среднего времени обслуживания

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{ож} + q/\mu. \tag{10}$$

3°. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. Пусть число мест в очереди m стремится к бесконечности. Найти вероятности состояний СМО при $m \to \infty$.

При $\rho = \lambda/\mu \geq 1$ очередь растет неограниченно. При $\rho < 1$ существует установившийся режим работы. Формулы предельных состояний при неограниченной очереди будут

$$P_0 = 1-\rho;\ P_1 = \rho P_0;\ P_2 = \rho^2(1-\rho),\ldots,\ P_k = \rho^k(1-\rho),\ldots \tag{11}$$

При отсутствии ограничений по длине очереди каждая заявка будет выполнена, т. е. q — относительная пропускная способность $q = 1$. Абсолютная пропускная способность будет

$$A = \lambda q = \lambda. \tag{12}$$

Среднее число заявок в очереди находим из (7) при $m \to \infty$

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{13}$$

Среднее число заявок в системе

$$\overline{k}=\overline{r}+\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}+\rho=\frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (14)$$

Среднее время ожидания

$$\overline{t}_{ож}=\frac{\overline{r}}{\lambda}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}. \qquad (15)$$

Среднее время пребывания в СМО равно сумме времени ожидания в очереди и времени обслуживания

$$\overline{t}_c=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}. \qquad (16)$$

6.1. Рассмотрим АЗС как одноканальную СМО. Пусть станция позволяет поставить в очередь только 3 машины, следующая машина остается необслуженной. Поток машин $\lambda=1$ (одна машина в мин.). Заправка 1,25 мин. **Определить:** вероятность отказа; относительную и абсолютную пропускную способность; среднее число машин в очереди; среднее время в очереди; среднее число машин, находящихся на АЗС; среднее время нахождения машины на АЗС.

Решение. Время заправки 1,25, откуда $\mu=\frac{1}{1,25}=0,8$ и $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{0,8}=1,25.$

По формулам (2), (3) $P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}=\frac{1-1,25}{1-(1,25)^5}=0,122;$

$$P_1=\rho P_0=1,25\cdot 0,122=0,152; \qquad P_2=\rho^2 P_0=0,191;$$
$$P_3=\rho^3 P_0=0,238; \qquad P_4=\rho^4 P_0=0,297.$$

Вероятность отказа по формуле (4) равна $P_{отк}=0,297.$ Относительная пропускная способность $q=1-P_{отк}=0,703.$ Абсолютная пропускная способность $A=q\lambda=0,703.$

Среднее число машин в очереди находим по формуле (7)

$$\bar{r} = \frac{1,25^2\left[1-1,25^2(3+1-3,75)\right]}{\left(1-1,25^2\right)(1-1,25)} \approx 1,56.$$

Подставляя к $\bar{r}$ среднее число машин, находящееся под обслуживанием

$$\bar{\omega} = \frac{1,25-1,25^2}{1-1,25^2} = 0,88,$$

получим по формуле (8) среднее число машин в системе

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} = 2,44.$$

Среднее время ожидания машины в очереди находим по формуле (9)

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1,56\ (\text{мин}).$$

Среднее время пребывания машины на АЗС будет

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{ож} + q/\mu = 1,56 + 0,88 = 2,44\,(\text{мин}).$$

6.2. На сортировочную станцию прибывают машины с интенсивностью $\lambda = 2$ (две в час). Среднее время, в течение которого сортировочная станция обрабатывает машину, равно 0,4 часа. Если станция занята, машины ожидают на стоянке в порядке очереди. На стоянку помещается три машины. Машина, прибывшая когда стоянка занята, становится в очередь на улице. **Найти:** среднее число машин, ожидающих в очереди (как на стоянке, так и вне ее); среднее время ожидания на стоянке и вне ее; среднее время нахождения на станции; вероятность того, что машина займет место на внешних путях.

Решение. Интенсивность потока $\lambda = 2$; время обслуживания $\mu = \dfrac{1}{0,4} = 2,5$. Отсюда $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2}{2,5} = 0,8 < 1$.

Среднее число машин в очереди (на стоянке и вне)

$$\overline{r}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0,8^2}{1-0,8}=\frac{0,64}{0,2}=3,2.$$

Среднее число машин вне стоянки подсчитываем так: P_5 — вероятность того, что вне стоянки 1 машина; P_6 — две машины т. д.; с вероятностью P_k ($k>5$) — ($k-4$) машины. Среднее число машин, ожидающих вне парка , как МО дискретной величины будет

$$\overline{r}'=1\cdot P_5+2\cdot P_6+\ldots+(k-4)P_k+\ldots=$$

$$=1(1-\rho)\rho^5+2(1-\rho)\rho^6+\ldots+(k-4)(1-\rho)\rho^k+\ldots=$$

$$=\rho^5(1-\rho)(1+2\rho+3\rho^2+\ldots+(k-4)\rho^{k-5}+\ldots)=$$

$$=\rho^5(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho^5}{1-\rho},$$

т.к. $1+2\rho+3\rho^2+\ldots=\dfrac{1-\rho^m(1+m-m\rho)}{(1-\rho)^2}=\dfrac{1}{(1-\rho)^2}$, при $m\to\infty$ $\rho<1$, то $\overline{r}'=1,64$.

Вероятность того, что машина займет место вне станции, равна вероятности того, что длина очереди будет не меньше трех, т. е.

$$P_4+P_5+P_6+\ldots=(1-\rho)\rho^4+(1-\rho)\rho^5+(1-\rho)\rho^6+\ldots=$$

$$=(1-\rho)\rho^4(1+\rho+\rho^2+\ldots)=(1-\rho)\rho^4\frac{1}{1-\rho}=\rho^4=0,41.$$

Среднее время ожидания вне стоянки

$$\frac{1}{\mu}P_4+\frac{2}{\mu}P_5+\frac{3}{\mu}P_6+\ldots=\frac{1}{\mu}\Big[(1-\rho)\rho^4+2(1-\rho)\rho^5+3(1-\rho)\rho^6+\ldots\Big]=$$

$$=\frac{\rho^4}{\mu}(1-\rho)(1+2\rho+3\rho^2+\ldots)=\frac{\rho^4(1-\rho)}{\mu}\frac{1-\rho^m(1+m-m\rho)}{(1-\rho)^2}=$$

$$=\frac{\rho^4}{\mu(1-\rho)}=\frac{0,41}{2,5\cdot 0,2}=0,82 \text{ (час).}$$

Среднее время ожидания на стоянке

$$\frac{1}{\mu}P_4+\frac{2}{\mu}P_5+\frac{3}{\mu}(P_3+P_4+P_5+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[(1-\rho)\rho+2(1-\rho)\rho^2+3\left((1-\rho)\rho^3+(1-\rho)\rho^4+(1-\rho)\rho^5+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[(1-\rho)\rho+2(1-\rho)\rho^2+3\rho^3\left(1-\rho+(1-\rho)\rho+(1-\rho)\rho^2+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[(1-\rho)\rho+2(1-\rho)\rho^2+3\rho^3\right]=\frac{1}{\mu}\left(\rho+\rho^2+\rho^3\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\frac{\rho-\rho^4}{1-\rho}=0,78 \text{ (час).}$$

Среднее время пребывания на сортировочной станции, считая ожидание и обслуживание, будет $\overline{t_c}=0,82+0,78+0,4=2\,(час)$.

30.7. Многоканальная СМО с ожиданием

1°. Рассмотрим n-канальную СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания одного канала μ; число мест в очереди m. Состояние системы:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — занят один канал, остальные свободны;

....

S_k — заняты k каналов, остальные свободны;

....

S_n — заняты все n каналов;

S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка в очереди;

....

S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок в очереди;

....

S_{n+m} — заняты все n каналов, m заявок в очереди .

Запишем предельные вероятности состояний, полагая $\lambda/\mu = \rho$;

$$P_1 = \frac{\rho}{1!}P_0; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0; \quad ...; \quad P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0;$$

$$P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!}P_0; \quad P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!}P_0; \quad ...; \quad P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0; \tag{1}$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho/n - (\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1}.$$

2°. Найдем некоторые характеристики эффективности обслуживания. Заявка получает отказ, если заняты все n каналов и все m мест в очереди

$$P_{n+m} = \frac{\rho^{\mathrm{n+m}}}{n^m n!}P_0. \tag{2}$$

Относительная пропускная способность равна

$$q = 1 - P_{n+m} = 1 - \frac{\rho^{\mathrm{n+m}}}{n^m n!}P_0. \tag{3}$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0\right). \tag{4}$$

Обозначим за $\bar{z}$ среднее число занятых каналов. Каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени. СМО обслуживает A заявок в среднем в единицу времени. Отсюда число занятых каналов

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0\right) = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P\right). \tag{5}$$

Среднее число заявок в очереди $\bar{r}$ вычисляем непосредственно как МО случайной величины, т.е.

$$\bar{r} = 1 \cdot P_{n+1} + 2 \cdot P_{n+2} + \ldots + m \cdot P_{n+m}.$$

Если ввести обозначение $\rho / n = æ$, то

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n n!} P_0 \frac{1 - æ^m (1 + m - m æ)}{(1 - æ)^2}. \qquad (6)$$

Среднее число заявок в очереди $\bar{r}$ и среднее число занятых каналов даст среднее число заявок в системе $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$.

Найдем теперь среднее время ожидания в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{n\mu} P_n + \frac{2}{n\mu} P_{n+1} + \ldots + \frac{m}{n\mu} P_{n+m-1}.$$

Отсюда

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\rho^n P_0}{n\mu n!} \frac{1 - æ^m (1 + m - m æ)}{(1 - æ)^2}. \qquad (7)$$

Среднее время пребывания заявки в очереди будет

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{ож} + q/\mu,$$

где q/μ — среднее время обслуживания.

3°. Рассмотрим многоканальную СМО, у которой очередь m может неограниченно возрастать.

Сумма соответствующей геометрической прогрессии сходится при $\rho/n < 1$ и расходится при $\rho/n \geq 1$, т.е. в последнем случае очередь будет неограниченно возрастать. Пусть $\rho/n < 1$ и $m \to \infty$, тогда выражения для предельных вероятностей состояний будут

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0; \quad \ldots; \quad P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0;$$

$$P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n n!} P_0; \quad P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} P_0; \quad \ldots; \quad P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} P_0; \ \ldots$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!}\frac{1}{n-\rho}\right]^{-1}. \qquad (8)$$

Так как каждая заявка рано или поздно будет обслужена, то характеристики пропускной способности СМО будут:

$$P_{отк} = 0; \quad q = 1; \quad A = \lambda q = \lambda. \qquad (9)$$

Среднее число заявок в очереди $m \to \infty$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n\,n!} P_0 \frac{1}{(1-æ)^2}. \qquad (10)$$

Среднее время ожидания

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\rho^2 P_0}{n\mu n!}\frac{1}{(1-æ)^2}. \qquad (11)$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \qquad (12)$$

а среднее число заявок под обслуживанием

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}. \qquad (13)$$

7.1. Почтовое отделение (ПО) с двумя почтовыми окнами $n = 2$ обслуживает клиентов с интенсивностью $\lambda = 0{,}8$ (клиентов в минуту). Среднее время обслуживания одного клиента $\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = 2$ мин. В районе другого ПО нет, так что очередь может расти неограниченно. **Найти** характеристики СМО.

Решение. Имеем $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}8}{0{,}5} = 1{,}6$; $n = 2$; $æ = \frac{\rho}{n} = 0{,}8$.

Поскольку $æ < 1$, то очередь не растет безгранично. Найдем предельные вероятности.

$$P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{2!(n-\rho)}\right]^{-1}=\left[1+1,6+1,28+\frac{1,6^3}{2\cdot 0,4}\right]^{-1}=0,111;$$

$$P_1=\frac{\rho}{1!}P_0=1,6\cdot 0,111=0,178;\qquad P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0=1,28\cdot 0,111=0,142;$$

$$P_3=\frac{\rho^3}{3!}P_0=0,114\ \text{ и т.д.}$$

Среднее число занятых каналов найдем, разделив абсолютную пропускную способность на интенсивность обслуживания $\mu=0,5;\ A=\lambda q=0,8;\ \bar{z}=\frac{A}{\mu}=\frac{0,8}{0,5}=1,6.$

Вероятность отсутствия очереди у ПО будет

$$P_0+P_1+P_2=0,111+0,178+0,142=0,431.$$

Среднее число клиентов в очереди

$$\bar{r}=\frac{1,6^3\cdot P_0}{n\,n!(1-æ)^2}=\frac{1,6^3\cdot 0,111}{2\cdot 2\cdot 0,2^2}=0,71.$$

Среднее число клиентов в ПО $\bar{k}=\bar{r}+\bar{z}=2,31.$

Среднее время ожидания в очереди

$$\bar{t}_{ож}=\frac{\bar{r}}{\lambda}=\frac{0,71}{0,8}=0,89\,(\text{мин}).$$

Среднее время пребывания клиента в ПО

$$\bar{t}_c=\bar{t}_{ож}+\bar{t}_{об}=0,89+2=2,89\,(\text{мин.}).$$

30.8. СМО с ограниченным временем ожидания

1°. До сих пор мы рассматривали СМО с ожиданием, ограниченным только длиной очереди, числом m. В такой очереди заявка, раз встав, «терпеливо» ждет обслуживания. Существуют СМО, в которых заявка, постояв, покидает ее — «нетерпеливые заявки».

Пусть имеется n канальная СМО с ожиданием, в которой число мест в очереди не ограничено, а время пребывания в очереди ограничено некоторым $\overline{t}_{оч}$, т. е. есть поток уходов $\nu = 1/\overline{t}_{оч}$.

Предельные вероятности состояний, где $\beta = \nu/\mu$, r — число заявок в очереди, $r\nu$ — суммарная интенсивность потока уходов, будут

$$P_1 = \frac{\rho}{1!}P_0;\ P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0;\ \ldots;\quad P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0;\ P_{n+1} = \frac{\rho}{n!}\frac{\lambda}{n\mu+\nu}P_0;$$

$$P_{n+2} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\lambda^2}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)}P_0;\ \ldots; \tag{1}$$

$$P_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\lambda^r}{(n\mu+\nu)\cdots(n\mu+r\nu)}P_0;\ \ldots;$$

$$P_0 = \left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n+\beta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}+\ldots+\frac{\rho^r}{(n+\beta)\cdots(n+r\beta)}\right)\right]^{-1}.$$

2°. В СМО с «нетерпеливыми» заявками при $t \to \infty$ установившийся режим устанавливается всегда, т.к. знаменатель P_0 всегда сходится, поскольку «нетерпеливые» заявки уходят и $P_{отк}$ просто нет. Подсчитаем, какое число заявок покидает очередь. Найдем число заявок в очереди

$$\overline{r} = 1\cdot P_{n+1} + 2\cdot P_{n+2} + \ldots + r\cdot P_{n+r} + \ldots = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\overline{z}}{\beta}. \tag{2}$$

Интенсивность потока ухода ν, умноженная на среднее число $\overline{r}$ уходов, будет $\nu\overline{r}$. Следовательно, в единицу времени будет обслужено

$$A = \lambda\cdot\nu\overline{r}. \tag{3}$$

Относительная пропускная способность системы.

$$q = \frac{A}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda}\bar{r}. \qquad (4)$$

Среднее число занятых каналов будем определять как МО случайной величины

$$\bar{z} = P_1 + 2P_2 + \ldots + n\left[1 - (P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1})\right]$$

или по формуле

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\mu} = \rho - \beta\bar{r}.$$

8.1. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками. Интенсивность потока заявок $\lambda = 3$ заявки/час; среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu = 1ч.$; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать предельные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. **Найти** характеристики эффективности СМО: $q, A, \bar{z}, \bar{r}, \bar{t}_{ож}, \bar{t}_c$.

Решение. По условию задачи имеем: $n = 2;\ \lambda = 3;\ \mu = 1;$ $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{оч}} = 2;\ \bar{t}_{оч} = 0{,}5ч;\ \beta = \frac{\nu}{\mu} = 2;\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3.$

Предельные вероятности состояний находим по формулам (1), ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001.

$$P_0 = \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left(\frac{3}{2+2} + \frac{9}{4(2+2\cdot 2)} + \frac{27}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{81}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{243}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{729}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \frac{2178}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}\right)\right]^{-1} = 0{,}0692;$$

$$P_1 = \rho P_0 = 0{,}208;\ P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0 = 0{,}311;\ P_3 = \frac{\rho^3}{3!}P_0 = 0{,}234;$$

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!}P_0 = 0,117;\ P_5 = \frac{\rho^5}{5!}P_0 = 0,044;\ P_6 = \frac{\rho^6}{6!}P_0 = 0,013;$$

$$P_7 = \frac{\rho^7}{7!}P_0 = 0,003;\ P_8 = \frac{\rho^8}{8!}P_0 = 0,001.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{z} = P_1 + 2(1 - P_0 - P_1) = 1,654$; число заявок в очереди $\bar{r} = \frac{\rho - \bar{z}}{\beta} = \frac{3 - 1,654}{2} = 0,673$; абсолютную и относительную пропускную способность находим по формулам (3), (4) $A = 3 - 2 \cdot 0,673 = 1,654$; $q = \frac{1,654}{3} = 0,551$; $\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 0,224$; среднее число заявок в СМО $\bar{k} = \bar{z} + \bar{r} = 2,327$; $\bar{t}_c = \frac{\bar{k}}{\lambda} = 0,776$ ч.

30.9. Замкнутые системы СМО

1°. Системы, в которых интенсивность потока зависит от состояния системы, называют *замкнутыми*. Рассмотрим такую систему. Пусть рабочий-наладчик обслуживает n машин, причем любая машина может выйти из строя. Интенсивность потока неисправностей λ.

Если рабочий свободен, то время на наладку машины $\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}$, где μ — интенсивность потока обслуживаний.

Если рабочий занят, машина становится в очередь и ждет, пока рабочий не освободится, т. е. источником заявок являются машины. Для замкнутой СМО характерным является ограниченное число источников заявок.

2°. Предельные вероятности состояний в данном случае имеют вид

$$P_1 = n\rho P_0;\ P_2 = n(n-1)\rho^2 P_0;\ \ldots;\ P_2 = n(n-1)\ldots 1\rho^n P_0;$$

$$P_0 = \left[1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \ldots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\rho^n\right]^{-1}. \qquad (1)$$

Под абсолютной пропускной способностью надо понимать среднее количество неисправностей, устраняемых рабочим в единицу времени. Вероятность, что рабочий занят $P_{зан} = 1 - P_0$, Если рабочий обслуживает μ машин в единицу времени, то абсолютная пропускная способность

$$A = (1 - P_0)\mu, \qquad (2)$$

Поскольку любая заявка будет удовлетворена, то относительная пропускная способность q = I. Вероятность того, что рабочий не будет занят

$$P_{св} = 1 - P_{зан} = 1 - 1 + P_0 = P_0. \qquad (3)$$

Среднее число неисправных машин как МО случайной величины

$$w = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + \ldots + nP_n = n - \frac{1-P_0}{\rho}.$$

Найдем теперь среднее число машин, ожидающих ремонта. Число машин, которые ремонтируются, равно $w = 1 - P_0$. Таким образом

$$\bar{r} = \bar{w} - \bar{\omega} = n - \frac{1-P_0}{\rho} - (1 - P_0) = n - (1 - P_0)(1 + \frac{1}{\rho}). \qquad (5)$$

Потеря производительности группы машин $L = \bar{w}l$, где l — производительность исправной машины.

3°. Рассмотрим более общую СМО. Бригада m рабочих обслуживает n станков ($m < n$).

Предельные вероятности будут

$$P_1 = \frac{n\lambda}{\mu}P_0;\ P_2 = \frac{n(n-1)\lambda^2}{1\cdot 2\cdot \mu^2}P_0;\ P_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0;\ldots$$

$$P_m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0;$$

$$P_{m+1} = \frac{n(n-1)...(n-m)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} P_0; \qquad (6)$$

$$P_{m+2} = \frac{n(n-1)...(n-m-1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m\cdot m^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} P_0;$$

....

$$P_n = \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots m\cdot m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} P_0;$$

Отсюда

$$P_0 = \left[1 + \frac{n\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} + ... + \frac{n(m-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m\cdot m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right]^{-1}. \qquad (7)$$

Среднее число занятых рабочих

$$\bar{z} = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + ... + m(1 - P_0 - P_1 - ... - P_{m-1}). \qquad (8)$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \bar{z}\mu \qquad (9)$$

Среднее число неисправных машин

$$\bar{w} = n - \frac{\bar{z}}{\rho}. \qquad (10)$$

9.1. Рабочий обслуживает три машины. Каждая машина останавливается в среднем 3 раза в час. Процесс наладки занимает у рабочего в среднем 20 мин. **Определить** характеристики замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность A; среднее количество неисправных машин; среднюю относительную потерю производительности машин за счет неисправностей.

Решение. По условию задачи имеем: $n=3$; $\lambda=3$; $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{об}}=\frac{1}{1/3}=3$; $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1$.

Предельная вероятность P_0 по формуле (1) равна

$$P_0=\frac{1}{1+3+3\cdot2\cdot1+3\cdot2\cdot1\cdot1}=0,0625.$$

Вероятность занятости рабочего

$$P_{зан}=1-P_0=0,9375.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (2) равна

$$A=0,9375\cdot3=2,81.$$

Среднее количество неисправных машин по формуле (4)

$$\bar{w}=3-\frac{0,9375}{1}=2,0625.$$

Средняя относительная потеря производительности машин за счет неисправностей $\bar{w}/n=0,6875$.

9.2. Двое рабочих обслуживают группу из четырех машин. Остановка работающей машины происходит в среднем через каждые полчаса. Процесс наладки занимает у рабочего в среднем 20 мин. **Определить** характеристики замкнутой СМО: среднее число занятых рабочих; абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных машин.

Решение. По условию задачи имеем: $n=4$; $m=2$; $\lambda=2$; $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{об}}=3$; $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{3}$.

Предельные вероятности по формулам (7), (6) будут

$$P_0=\left[1+4\cdot\frac{2}{3}+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot2}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot2^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-1}=0,115;$$

$$P_1 = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,115 = 0,306.$$

Среднее число занятых рабочих равно

$$\bar{z} = 1 \cdot P_1 + 2(1 - P_0 - P_1) = 0,306 + 2(1 - 0,421) = 1,464.$$

По формуле (9) находим абсолютную пропускную способность

$$A = 1,464 \cdot 3 = 4,392.$$

Среднее количество неисправных машин по формуле (10) будет

$$\bar{w} = 4 - \frac{1,464}{2/3} = 1,804.$$

30.10. СМО со "взаимопомощью" между каналами

1°. Рассмотрим СМО, где заявка может обслуживаться двумя и более каналами,т. е. со «взаимопомощью» между каналами. Для этого необходимо учитывать два фактора:

1. Насколько убыстряется обслуживание заявки, когда над ней работает сразу несколько каналов.

2. Какова «дисциплина взаимопомощи», т. е. когда и как каналы берут на себя обслуживание.

Самый простой случай «дисциплины» взаимопомощи «все как один», т. е. при появлении заявки ее начинают обслуживать все n каналов и остаются занятыми пока не закончится обслуживание. В этом случае СМО становится как одноканальная СМО, но с более высокой интенсивностью обслуживания.

2°. Рассмотрим влияние «взаимопомощи» на работу СМО с ожиданием, причем с неограниченной очередью.

Среднее число заявок в очереди без «взаимопомощи»:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{m+1} P_0}{n\, n!(1-æ)^2}. \tag{1}$$

Среднее время ожидания

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n P_0}{n \mu n!(1-æ)^2}. \tag{2}$$

Среднее время пребывания в системе

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{\mu}, \tag{3}$$

где $æ = \frac{\rho}{n}$; $P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$.

Если применяется «взаимопомощь» типа «все как один», то система будет работать как одноканальная. Ее характеристики будут

$$\rho^* = \frac{\lambda}{\mu^*} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} = æ; \quad \bar{r} = \frac{æ^2}{1-æ}; \tag{4}$$

$$\bar{t}_{ож} = \frac{æ}{n\mu(1-æ)}; \quad \bar{t}_c = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{n\mu}.$$

3°. Рассмотрим случай равномерной «взаимопомощи» между каналами. Если заявка приходит, когда все каналы свободны, то все n каналов принимаются за ее обслуживание; если в момент обслуживания заявки приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание и т.д., до тех пор, пока не окажутся занятыми все n каналов.

Для СМО с отказами характеристики системы будут

$$P_{отк} = \frac{æ^n(1-1-æ)}{1-æ^{n+1}}; \tag{5}$$

$$q = \frac{1-æ^n}{1-æ^{n+1}}; \tag{6}$$

$$A=\lambda q=\lambda\frac{1-æ^{n}}{1-æ^{n+1}},\quad æ=\lambda/(n\mu). \qquad (7)$$

4°. Рассмотрим СМО с очередью и максимальным числом заявок в очереди m. Предположим, что между каналами имеется равномерная «взаимопомощь» и $\mu(k)=k\mu$. Характеристики системы примут вид

$$P_{отк}=\frac{æ^{n+m}(1-æ)}{1-æ^{n+m+1}}; \qquad (8)$$

$$q=\frac{1-æ^{n+m}}{1-æ^{n+m+1}}; \qquad (9)$$

$$A=\lambda q=\lambda\frac{1-æ^{n+m}}{1-æ^{n+m+1}}. \qquad (10)$$

10.1. Имеется 3-х канальная СМО с отказами. Интенсивность потока заявок $\lambda=4$. Среднее время обслуживания одной заявки одним каналом $\overline{t_o}=0{,}5$; функция $\mu(k)=k\mu$. **Спрашивается**, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО вводить «взаимопомощь» между каналами по типу «все как один»? Выгодно ли это с точки зрения среднего времени пребывания в системе?

Решение. а) Без взаимопомощи; $n=3;$ $\lambda=4;$ $\mu=\frac{1}{0{,}5}=2;$ $\rho=2.$ По формулам параграфа 30.5.

$$P_0=\frac{1}{1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}}=0{,}158;\quad P_{отк}=P_3=\frac{2^3}{3!}P_0=\frac{2^3}{3!}0{,}158=0{,}21.$$

Относительная пропускная способность

$$q=1-P_{отк}=0{,}79.$$

Абсолютная пропускная способность $A=q\lambda=0{,}79\cdot4=3{,}16.$

Среднее время пребывания в системе

$$\bar{t}_c = q \cdot \bar{t}_{об} = 0,79 \cdot 0,5 = 0,395.$$

б) Со взаимопомощью: $n^* = 1$; $\lambda = 4$; $\mu^* = 3\mu = 6$;

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu^*} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\rho}{1!}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}; \quad P_1 = \frac{2}{3} P_0 = \frac{2}{3}\frac{3}{5} = 0,4;$$

$$P_{отк} = P_1 = 0,4; \quad q = 1 - P_{отк} = 0,6; \quad A = q\lambda = 0,6 \cdot 4 = 2,4;$$

$$\bar{t}_c = P_1 \frac{1}{3\mu} = 0,4 \cdot \frac{1}{6} = 0,0667.$$

Таким образом, пропускная способность со «взаимопомощью» меньше, т.к. заявка, пришедшая, когда система занята, получает отказ и уходит. Что касается среднего времени пребывания, то оно уменьшилось, т.к. заявку обслуживает сразу три канала.

10.2. Имеется 3-х канальная СМО с неограниченной очередью; интенсивность заявок $\lambda = 4$. Среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} = 0,5$. Функция $\mu(k) = k\mu$. **Выгодно ли** вводить взаимопомощь «все как один», имея в виду: среднюю длину очереди; среднее время ожидания обслуживания; среднее время пребывания заявки в СМО.

Решение. Найдем характеристики системы без «взаимопомощи», используя формулы (1), (2), (3).

$$n = 3; \quad \lambda = 4; \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = 2; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2; \quad æ = \frac{\rho}{n} = \frac{2}{3};$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\right]^{-1} = \frac{1}{9};$$

$$\overline{r} = \frac{2^4 \cdot \frac{1}{9}}{3 \cdot 3!\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 0{,}889; \quad \overline{t}_{ож} = 0{,}222; \quad \overline{t}_c = \overline{t}_{ож} + \overline{t}_{об} = 0{,}722.$$

Найдем теперь по формулам (4) характеристики системы со «взаимопомощью»

$$n^* = 1; \ \lambda = 4; \ \mu^* = 3\mu = 6; \ \rho^* = \frac{\lambda}{\mu^*} = æ = \frac{2}{3};$$

$$\overline{r} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = 1{,}333; \quad \overline{t}_{ож} = \frac{\frac{2}{3}}{6\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 0{,}333; \quad \overline{t}_c = 0{,}333 + \frac{1}{6} = 0{,}5.$$

Таким образом, средняя длина очереди и среднее время ожидания в случае с «взаимопомощью» больше, а среднее время пребывания в СМО меньше.

Глава 31
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

31.1. Оптимизация планирования комплекса работ

1°. Основным материалом для сетевого планирования является список или перечень работ, который называется структурной таблицей комплекса работ. В структурной таблице для нахождения работы a_i должно быть указано, выполнение каких работ она требует или на какие работы опирается.

Работа a_i	Опирается на работу	Ранг	Обозначение в новой нумерации
a_1	–	1	b_1
a_2	a_1, a_3	2	b_3
a_3	–	1	b_2
a_4	a_1, a_2, a_3	3	b_4
a_5	a_1, a_2, a_4	4	b_6
a_6	a_2, a_3	3	b_5

Первая операция называется *упорядочением*. Для упорядочения все работы разделяются на ранги. Работа называется работой 1-го ранга, если для ее начала не требуется выполнение никаких других работ. Работа называется работой второго ранга, если она опирается на одну или несколько работ первого ранга и т. д.

Если задано t_i — время выполнения работы a_i, то минимально возможный срок окончания работы находится по формуле

$$T_i = \tau_i + t_i, \tag{1}$$

где $\tau_i = \max\{T_j, T_l, T_k\}$ — минимально возможный срок начала работы a_i, которая опирается на работы a_j, a_l, a_k и не может начаться прежде, чем не будет завершена работа, которая заканчивается позже всех.

Работы a_i, из длительностей которых составлено минимальное время завершения комплекса работ T, называются *критическими работами*. Чтобы найти критические работы, а следовательно, и критический путь, надо найти работу a_i, для которой время окончания T_i максимально; эта работа и будет критической. Далее следует найти работу, для которой T_i будет моментом начала работы a_i. Величина τ_i представлена в виде максимума T_j, T_l, T_k. Необходимо найти max. Это будет вторая критическая работа от конца и т. д.

2°. Пусть общее время выполнения работ $T = \sum\limits_{(кр)} t_i$ нас не устраивает и требуется его сократить до времени T_0. Очевидно, что надо форсировать критические работы. Вложение дополнительных средств x_i в работу a_i сокращает время ее выполнения с t_i до $t_i' = f_i(x_i)$. Время выполнения комплекса работ будет $T' = \sum\limits_{(кр)} f_i(x_i) \le T_0$. Нахождение минимума вложенных средств $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \min$ разберем на примере 1.2.

3°. Рассмотрим задачу перераспределения уже имеющихся средств между отдельными работами. Известно, что количество средств $x > 0$, снятое с работы a_i, увеличивает время ее выполнения с t_i до $t_i' = f_i(x)$, а количество средств x, вложенное дополнительно в работу a_i, уменьшает время ее выполнения до $t_i'' = \varphi_j(x)$. Сумма средств, снимаемых с каких-то работ, должна быть равна сумме средств, добавляемых к другим работам, так что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0. \tag{2}$$

Для решения задачи необходимо, чтобы общий срок выполненного комплекса работ был минимален

$$T' = \sum_{кр} f_i(x) + \sum_{кр} \varphi_j(x) = \min. \tag{3}$$

4°. Сетевое планирование при случайных временах выполнения работ. При сложении достаточно большого числа независимых случайных величин, распределенных по любым законам, закон распределения суммы близок к нормальному, поэтому МО времени равно сумме

$$m_t = \sum_{кр} m_{t_i},$$

где] m_{t_i} — МО времени выполнения i-й работы.

Среднеквадратическое отклонение, соответственно, будет

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{кр} \sigma_{t_i}^2}, \tag{5}$$

где σ_{t_i} — среднеквадратическое отклонение времени выполнения i-й работы.

Если величины (4), (5) известны, то вероятность выполнения комплекса в срок T_0 находится по формуле

$$P(T < T_0) = \Phi\left(\frac{T_0 - m_t}{\sigma_t}\right) + 0{,}5, \tag{6}$$

где Φ — функция Лапласа находится из таблицы.

1.1. Пусть дана упорядоченная структурная таблица

Работа a_i	Опирается на работу	Время t_i	Работа a_i	Опирается на работу	Время t_i
a_1	–	10	a_6	a_4	18
a_2	–	5	a_7	a_5, a_6	8
a_3	–	15	a_8	a_3, a_5, a_6	25
a_4	a_1, a_2	18	a_9	a_7	30
a_5	a_2, a_3	19	a_{10}	a_5, a_8	8

Построить временной график и найти критические работы.

Решение. Для работы первого ранга имеем:

$\tau_1 = 0;\ \tau_2 = 0;\ \tau_3 = 0;\ T_1 = t_1 = 10;\ T_2 = t_2 = 5;\ T_3 = t_3 = 15.$

Работа a_4 опирается на работы a_1, a_2, т. е. она может начаться тогда, когда закончится наиболее большая работа $\tau_4 = \max\{T_1, T_2\} = \max\{10, 5\} = 10.$

Момент окончания работы a_4 будет $T_4 = \tau_4 + t_4 = 10 + 18 = 28.$

Для работы a_5:

$\tau_5 = \max\{T_2, T_3\} = \max\{5, 15\} = 15;\quad T_5 = \tau_5 + t_5 = 15 + 19 = 34.$

a_6: $\tau_6 = \max\{T_4\} = 28;\quad T_6 = \tau_6 + t_6 = 28 + 18 = 46.$

a_7: $\tau_7 = \max\{T_5, T_6\} = \max\{34, 46\} = 46;\quad T_7 = \tau_7 + t_7 = 46 + 8 = 54.$

a_8: $\tau_8 = \max\{T_3, T_5, T_6\} = \max\{15, 34, 46\} = 46;$

$T_8 = \tau_8 + t_8 = 46 + 25 = 71.$

a_9: $\tau_9 = \max\{T_7\} = 54;\quad T_9 = \tau_9 + t_9 = 54 + 30 = 84.$

a_{10}: $\tau_{10} = \max\{T_5, T_8\} = \max\{34, 71\} = 71;$

$T_{10} = \tau_{10} + t_{10} = 71 + 8 = 79.$

Время окончания работы равно максимальному времени окончания $T = 84$ и a_9 последняя критическая работа. Поскольку a_9 опирается на a_7, то следующая критическая работа a_7. Так как большая работа, на которую опирается a_7, будет a_6, то

a_6 следующая критическая работа, a_6 — опирается на a_4, а a_4 — на a_1. Таким образом, a_1, a_4, a_6, a_7, a_9 — критические работы. Сетевой график показан на рис. 31.1.

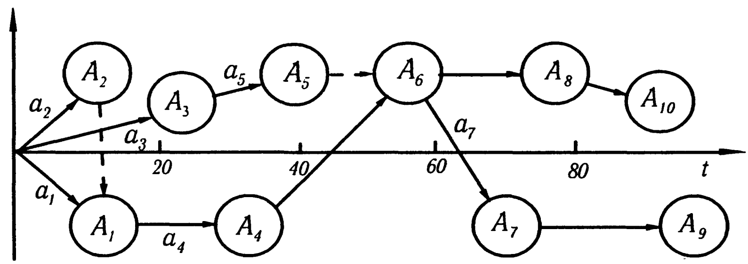


Рис. 31.1

1.2. Комплекс работ **задан** структурно-временной таблицей

Работа a_i	Опирается на работу	Время t_i	Работа a_i	Опирается на работу	Время t_i
a_1	–	20	a_5	a_1, a_2, a_3	10
a_2	–	10	a_6	a_1, a_2, a_3	5
a_3	–	8	a_7	a_6	5
a_4	a_1, a_2	20	a_8	a_4, a_5, a_7	10

Находим время выполнения работ: $T_1 = 20;\ T_2 = 10;\ T_3 = 8;$ $T_4 = T_1 + t_4 = 40;\ T_5 = T_1 + t_5 = 30;\ T_6 = T_1 + t_6 = 25;\ T_7 = T_6 + t_7 = 30;$ $T_8 = T_4 + t_8 = 50.$

Критические работы будут: a_1, a_4, a_8. Время окончания комплекса работ равно $T = T_1 + T_4 + T_8 = 50$.

Уменьшим это время до $T_0 = 40$. Известно, что в работу a_i можно вложить средства x_i в размере не более чем c_i, т.е.

$$x_i \le c_i, \tag{1}$$

при этом

$$t_i' = t_i(1 - b_i x_i). \qquad (2)$$

Пусть для критических работ параметры будут

$$b_1 = 0{,}2; \quad b_4 = 0{,}3; \quad b_8 = 0{,}1;$$

$$c_1 = 2; \quad c_4 = 2; \quad c_8 = 5.$$

Условия (1) примут вид

$$x_1 - 2 \le 0; \quad x_4 - 2 \le 0; \quad x_5 - 5 \le 0. \qquad (3)$$

Новый срок выполнения работ находим по формуле (2)

$$T' = t_1' + t_4' + t_8' = t_1(1 - 0{,}2x_1) + t_4(1 - 0{,}3x_4) + t_8(1 - 0{,}1x_8) =$$

$$= 50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8.$$

Поскольку $T_0 = 40$, то $50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8 \le 40$, откуда

$$4x_1 + 6x_4 + x_8 \ge 10. \qquad (4)$$

Требуется найти минимум функции $L = x_1 + x_4 + x_8$ при неравенствах ограничений (3), (4), т. е. налицо задача линейного программирования.

Решая задачу симплекс методом, находим, что $L_{min} = 5/3$ и оптимальным решением будет вложение $x_4 = 5/3$ в работу a_4.

31.2. Оптимизация размещения узлов почтовой связи

1°. При проектировании городской почтовой связи необходимо решить, где разместить узлы связи и как организовать их транспортные связи с опорными пунктами города (вокзалами, аэропортами, пристанями, типографиями и т. д.).

Пусть в городе имеется узел связи (*У*), два вокзала (B_1, B_2), типография (*Т*) и аэропорт (*А*) (рис. 31.2).

В качестве критерия оптимизации выберем минимум пробега транспорта между узлом и опорными пунктами. Обозначим за N_1 — число рейсов за сутки между каждым из вокзалов и узлом; N_2 — между аэропортом и узлом; N_3 — между узлом и типографией.

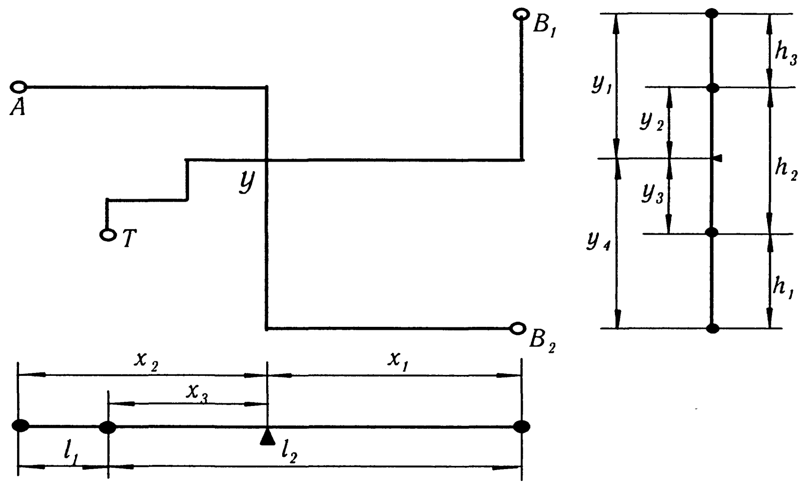


Рис. 31.2

2°. Пусть транспортные магистрали образуют прямоугольную сеть. Протяженность каждого маршрута представим как сумму расстояний по оси x и по оси y.

Обозначим через x_1 расстояние по горизонтали между каждым из вокзалов и узлом; x_2 — между аэропортом и узлом; x_3 — между типографией и узлом. Величины l_1 и l_2 заданы. Целевая функция, минимум которой требуется найти, будет иметь вид

$$L_1 = 2N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3.$$

Система ограничивающих условий будет

$$x_1 + x_2 \geq l_1 + l_2; \quad x_1 + x_3 \geq l_2; \quad x_2 + x_3 \geq l_1.$$

Полученная модель является моделью задачи линейного программирования.

Рассмотрим по оси y. Обозначим через y_1 — расстояние между вокзалом 1 и узлом; y_2 — между аэропортом и узлом; y_3 — между типографией и узлом; y_4 — между вокзалом 2 и узлом. Целевая функция, минимум которой необходимо найти, будет

$$L_2 = N_1(y_1 + y_4) + N_2y_2 + N_3y_3.$$

Система ограничивающих условий, при заданных величинах h_1, h_2, h_3, примет вид

$$y_1 + y_2 \geq h_2 + h_3; \quad y_2 + y_3 \geq h_2; \quad y_1 + y_4 \geq h_1 + h_2 + h_3;$$
$$y_2 + y_4 \geq h_1 + h_2.$$

Поставленная задача решается симплекс–методом. В результате решения двух задач определяется общая минимальная величина пробега $L = L_1 + L_2$, а соответствующие значения переменных x_i, y_i определят координаты узла.

2.1. ***Пример.*** **Пусть** $N_1 = 10;\ N_2 = 8;\ N_3 = 6;\ l_1 = 4\,км;$ $l_2 = 8\,км;\ h_1 = 5\,км;\ h_2 = 6\,км;\ h_3 = 4\,км.$ **Найти** L_{min}.

Решение. Математическая модель задачи относительно оси x примет вид

$$L_1 = 20x_1 + 8x_2 + 6x_3;$$
$$x_1 + x_2 \geq 12; \quad x_1 + x_3 \geq 8; \quad x_2 + x_3 \geq 4.$$

Введем базисные переменные x_4, x_5, x_6 и запишем решение в виде

$$L = 0 - (-20x_1 - 8x_2 - 6x)_3;$$
$$x_4 = -12 - (-x_1 - x)_2; \quad x_5 = -8 - (-x_1 - x_3); \quad x_6 = -4 - (-x_2 - x_3).$$

Запишем таблицу

Базисные переменные	b_i	x_1	x_2	x_3
L_1	0 96	–20 – 12	– 8 – 8	– 6 – 6
x_4	– 12 12	– 1 1	– 1 – 1	0 0
x_5	– 8 – 8	– 1 – 1	0 0	– 1 – 1
x_6	– 4 8	0 1	– 1 – 1	– 1 – 1

Находим разрешающий элемент -1 и меняем $x_2 \leftrightarrow x_4$. Заполним новую таблицу

	b_i	x_1	x_4	x_3
L_1	96 120	-12 -6	-8 -8	-6 -6
x_2	12 12	1 1	-1 -1	0 0
x_5	-8 8	-1 1	0 0	-1 -1
x_6	8 0	1 0	-1 -1	-1 1

Далее заменим $x_3 \leftrightarrow x_5$

	b_i	x_1	x_4	x_5
L_1	144	-6	-8	-6
x_2	12	1	-1	0
x_3	8	1	0	-1
x_6	0	0	-1	1

Так как в первой строке все свободные переменные отрицательны, то $L_{1\,min} = 144$ при $x_1 = 0;\ x_2 = 12;\ x_3 = 8$.

Математическая модель относительно оси y запишется в виде

$$L_2 = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 10y_4;$$

$$y_1 + y_4 \geq 15;\ \ y_1 + y_3 \geq 10;\ \ y_2 + y_3 \geq 6;\ \ y_2 + y_4 \geq 11.$$

Через базисные переменные

$$L_2 = 0 - (-10y_1 - 8y_2 - 6y_3 - 10y_4),$$

$$y_5 = -15 - (-y_1 - y_4); \quad y_6 = -10 - (-y_1 - y_3);$$
$$y_7 = -6 - (-y_2 - y_3); \quad y_8 = -11 - (-y_2 - y_4).$$

Составим таблицу

	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4
L_2	0 / 100	– 10 / – 10	– 8 / – 8	– 6 / 4	– 10 / – 10
y_5	– 15 / – 5	– 1 / – 1	0 / 0	0 / 1	– 1 / – 1
y_6	–10 / 10	–1 / – 1	0 / 0	– 1 / 1	0 / 0
y_7	– 6 / – 6	0 / 0	– 1 / – 1	– 1 / – 1	0 / 0
y_8	– 11 / – 11	0 / 0	– 1 / – 1	0 / 0	– 1 / – 1

Делаем замену $y_1 \leftrightarrow y_6$

	b_i	y_6	y_2	y_3	y_4
L_2	100 / 150	– 10 / 0	– 8 / – 8	4 / – 6	– 10 / – 10
y_5	– 5 / 5	– 1 / 1	0 / 0	1 / – 1	–1 / – 1
y_1	10 / 10	– 1 / – 1	0 / 0	1 / 1	0 / 0
y_7	– 6 / – 6	0 / 0	– 1 / – 1	– 1 / – 1	0 / 0
y_8	– 11 / – 6	0 / 1	– 1 / – 1	0 / – 1	– 1 / – 1

Еще раз заменяем $y_4 \leftrightarrow y_5$

	b_i	y_6	y_2	y_3	y_5
L_2	150 186	0 0	− 8 − 2	− 6 6	− 10 −10
y_4	5 11	1 1	0 1	− 1 − 1	− 1 − 1
y_1	10 4	− 1 − 1	0 − 1	1 1	0 0
y_7	− 6 6	0 0	− 1 1	− 1 − 1	0 0
y_8	− 6 0	1 1	− 1 0	− 1 − 1	− 1 − 1

Последняя замена $y_3 \leftrightarrow y_7$

	b_i	y_6	y_2	y_7	y_5
L_2	186	0	− 2	− 6	− 10
y_4	11	1	1	− 1	− 1
y_1	4	− 1	− 1	1	0
y_3	6	0	1	− 1	0
y_8	0	1	0	− 1	− 1

Отсюда имеем: $L = 186$ при $y_1 = 4;\ y_2 = 0;\ y_3 = 6;\ y_4 = 11$. Следовательно, минимум пробега транспорта в горизонтальном и вертикальном направлениях составляет $L = 144 + 186 = 330$ *км*.

31.3. Расчет оптимального числа работников на предприятии

1°. Характерной особенностью ряда предприятий является неравномерность поступления нагрузки по часам суток, дням недели и месяцам года. В условиях постоянного штата необходимо, с одной стороны, обеспечить выполнение всей работы, а с другой — обеспечить выполнение работы минимальным количеством работников.

Обозначим через x_j — число работников, работающих по j-му графику, b_i — нагрузку в i-й рабочий день, выраженную в числе требуемых работников; a_{ij} — коэффициент, равный единице, если по j-му графику предусматривается работа в i-й день, и нулю, если в этот день предусматривается выходной.

Задача может быть сформулирована так: требуется найти минимум целевой функции $L = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ при выполнении следующих ограничений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m.$$

2°. Для простоты вычислений рассмотрим пример четырехдневной рабочей недели с двумя выходными, исходные данные для которого приведены в таблице

Число работников	День недели			
	1	2	3	4
x_1	В	В		
x_2			В	В
x_3	В			В
x_4		В	В	
x_5	В		В	
x_6		В		В
b_i	100	80	40	60

Запишем задачу линейного программирования следующим образом

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

при следующих ограничениях

$$x_2 + x_4 + x_6 \geq 100; \quad x_2 + x_3 + x_5 \geq 80;$$

$$x_1 + x_3 + x_6 \geq 40; \quad x_1 + x_4 + x_5 \geq 60; \; x_j \geq 0.$$

Введем базисные переменные и перепишем ограничения в виде, удобном для использования симплекс–метода

$$y_1 = -100 - (-x_2 - x_4 - x_6); \quad y_2 = -80 - (-x_2 - x_3 - x_5);$$

$$y_5 = -40 - (-x_1 - x_3 - x_6); \quad y_4 = -60 - (-x_1 - x_4 - x_5);$$

$$L = 0 - (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6).$$

Запишем решение в виде таблицы

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
L	0 60	–1 0	–1 –1	–1 –1	–1 –1	–1 0	–1 –1
y_1	–100 –40	0 1	0 0	–1 –1	–1 –1	0 0	–1 –1
y_2	–80 –80	0 0	–1 –1	–1 –1	0 0	–1 –1	0 0
y_3	–40 –40	–1 –1	0 0	–1 –1	0 0	0 0	–1 –1
y_4	–60 60	–1 1	0 0	0 0	(–1)	–1 1	0 0

Выбираем разрешающий элемент, находим $\lambda = -1$ и переводим базисную переменную y_4 в разряд свободной x_4. Перепишем таблицу, заменяя $y_4 \leftrightarrow x_4$.

	b_i	x_1	x_2	x_3	y_4	x_5	x_6
L	60 120	0 1	– 1 – 1	– 1 – 1	– 1 0	0 1	– 1 0
y_1	– 40 – 40	1 1	– 1 – 1	0 0	– 1 – 1	0 1	– 1 – 1
y_2	– 80 – 40	0 1	– 1 – 1	– 1 – 1	0 0	– 1 – 1	0 0
y_3	– 40 40	– 1 1	0 0	(– 1)	0 0	0 0	– 1 1
x_4	60 60	1 1	0 0	0 0	– 1 – 1	1 1	0 0

Выберем разрешающий элемент и перепишем таблицу, заменяя $y_3 \leftrightarrow x_3$

	b_i	x_1	x_2	y_3	y_4	x_5	x_6
L	100 140	1	– 1 1	– 1	0	1	0
y_1	– 40 0	1	– 1 1	0	– 1	1	– 1
y_2	– 40 40	1 – 1	(– 1)	– 1 – 1	0 0	– 1 – 1	0 0
x_3	40 40	1	0 0	– 1	0	0	1
x_4	60 60	1	0 0	0	– 1	1	0

Выберем разрешающий элемент и перепишем таблицу, заменяя $y_2 \leftrightarrow x_2$

	b_i	x_1	y_2	y_3	y_4	x_5	x_6
L	140	2	1	0	0	2	0
y_1	0	2	1	1	– 1	1	– 1
x_2	40	– 1	– 1	– 1	0	– 1	0
x_3	40	1	0	– 1	0	1	1
x_4	60	1	0	0	– 1	1	0

Целевая функция $L_{min} = 140$ при $x_2 = 40$, $x_3 = 40$, $x_4 = 60$, $x_1 = x_5 = x_6 = 0$.

31.4. Задача нахождения кратчайшего пути

1°. *Граф* задается конечным множеством *вершин* или *узлов* ($a_1, a_2, ..., a_m$) и множеством *дуг* или *ребер* ($l_1, l_2, ..., l_m$), соединяющих некоторые или все вершины. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются *дугами,* а граф с такими ребрами называется *ориентированным графом*. Если ребра графа не имеют ориентации, то граф называют *неориентированным*. Каждая дуга может быть задана упорядоченной парой вершин ($a_i a_j$), где a_i называется начальной, а a_j — конечной вершиной дуги.

Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число. Эти числа могут выражать длину, пропускную способность, стоимость перевозки и т.п. Иногда сеть ассоциируется с транспортной сетью или сетью связи.

Путем в графе называют последовательность дуг или вершин, в которой каждая конечная вершина является начальной вершиной следующего ребра. *Простым путем* называется путь, в котором каждая вершина обходится не более одного раза. Если в простом пути ориентации дуг не совпадают, то такой путь называется *простой цепью*. Граф, в котором каждая пара вершин соединена некоторой цепью, называется *связным*. Задача нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами представляет одну из главных задач теории сетей.

2°. Пусть требуется найти кратчайшие пути от одной вершины ко всем остальным вершинам сети.

Алгоритм Флойда. 1) Введем матрицу C_{ij}, в которой записаны длины всех дуг сети

$$C_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если} \quad i=j\\ \text{длине дуги между вершинами } a_i \text{ и } a_j\\ \infty, & \text{если дуги между } a_i \text{ и } a_j \text{ нет.}\end{cases}$$

Положим $k=1$.

2) Для всех $i\neq k$ и $j\neq k$ осуществить операцию

$$C_{ij}:=\min\left\{C_{ij},\ C_{ik}+C_{kj}\right\}.$$

3) Если $k=m$, вычисления закончены, иначе перейти к п. 4.

4) $k:=k+1$ и перейти к шагу 2.

Алгоритм применим и для отрицательных длин ребер.

3°. *Алгоритм Дейкстры*. Алгоритм позволяет найти кратчайшие пути от заданной вершины до всех остальных. Обозначим: C_{ij} — расстояние от узла a_i до a_j; l_i' — временная пометка для вершины a_i, l_i — постоянная пометка для вершины a_i; m — число вершин в сети.

Полагаем:

1. $l_s=0,\ l_i=\infty$ для $i=1,\ldots,m;\, i\neq s;\ k=1;\ p=s.$

2. Для всех соседей вершины a_p с временными пометками изменить пометки по формуле

$$l_i' = \min(l_i', l_p + C_{pi}).$$

3. Для всех вершин, имеющих временные пометки, найти $l_r = \min l_i'$.

4. Положить $p = r$, $k := k+1$. Если $k = m$, вычисления закончены, иначе перейти к шагу 2.

4.1. Пусть дана сеть (рис. 31.3). **Найти** кратчайшие пути между всеми узлами.

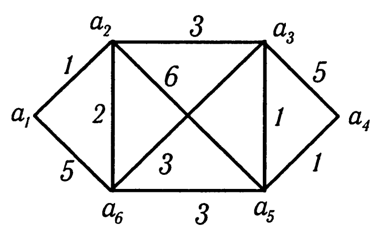


Рис. 31.3

Решение. Составим исходную матрицу

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	5
2	1	0	3	∞	6	2
3	∞	3	0	5	1	3
4	∞	∞	5	0	1	∞
5	∞	6	1	1	0	3
6	5	2	3	∞	3	0

При $k = 1$ матрица не меняется, поэтому рассмотрим случай, когда $k = 2$.

$$C_{13} = \min(C_{13}, C_{12} + C_{23}) = \min(\infty, 1+3) = 4;$$

$$C_{14} = \min(C_{14}, C_{12} + C_{24}) = \min(\infty, 1 + \infty) = \infty;$$

$$C_{15} = \min(C_{15}, C_{12} + C_{25}) = \min(\infty, 1 + 6) = 7;$$

$$C_{16} = \min(C_{16}, C_{12} + C_{26}) = \min(5, 1 + 2) = 3.$$

Найдем элементы матрицы во второй строке матрицы

$$C_{21} = \min(C_{21}, C_{22} + C_{21}) = \min(1, 1) = 1;$$

$$C_{22} = 0;$$

$$C_{23} = \min(C_{23}, C_{22} + C_{23}) = \min(3, 3) = 3;$$

$$C_{24} = \min(C_{24}, C_{22} + C_{24}) = \min(\infty, \infty) = \infty;$$

$$C_{25} = \min(C_{25}, C_{22} + C_{25}) = \min(6, 6) = 6;$$

$$C_{26} = \min(C_{26}, C_{22} + C_{26}) = \min(2, 2) = 2.$$

Для третьей строки найдем

$$C_{31} = \min(C_{31}, C_{32} + C_{21}) = \min(\infty, 3 + 1) = 4;$$

$$C_{32} = \min(C_{32}, C_{32} + C_{22}) = \min(3, 3) = 3;$$

$$C_{33} = 0;$$

$$C_{34} = \min(C_{34}, C_{32} + C_{24}) = \min(5, 3 + \infty) = 5;$$

$$C_{35} = \min(C_{35}, C_{32} + C_{25}) = \min(1, 3 + 6) = 1;$$

$$C_{36} = \min(C_{36}, C_{32} + C_{26}) = \min(3, 3 + 2) = 3.$$

Для четвертой строки

$$C_{41} = \min(C_{41}, C_{42} + C_{21}) = \min(\infty, \infty + 1) = \infty;$$

$$C_{42} = \min(C_{42}, C_{42} + C_{22}) = \infty;$$

$$C_{43} = \min(C_{43}, C_{42} + C_{23}) = \min(5, \infty + 3) = 5;$$

$$C_{44} = 0;$$

$$C_{45} = \min(C_{45}, C_{42} + C_{25}) = \min(1, \infty + 6) = 1;$$

$$C_{46} = \min(C_{46}, C_{42} + C_{26}) = \min(\infty, \infty + 2) = \infty.$$

Пятая строка примет вид

$C_{51} = \min(C_{51}, C_{52} + C_{21}) = \min(\infty, 6+1) = 7;$

$C_{52} = \min(C_{52}, C_{52} + C_{22}) = \min(6, 6) = 6;$

$C_{53} = \min(C_{53}, C_{52} + C_{23}) = \min(1, 6+3) = 1;$

$C_{54} = \min(C_{54}, C_{52} + C_{24}) = \min(1, 6+\infty) = 1;$

$C_{55} = 0;$

$C_{56} = \min(C_{56}, C_{52} + C_{26}) = \min(3, 6+2) = 3.$

Элементы шестой строки

$C_{61} = \min(C_{61}, C_{62} + C_{21}) = \min(5, 2+1) = 3;$

$C_{62} = \min(C_{62}, C_{62} + C_{22}) = \min(2, 2) = 2;$

$C_{63} = \min(C_{63}, C_{62} + C_{23}) = \min(3, 2+3) = 3;$

$C_{64} = \min(C_{64}, C_{62} + C_{24}) = \min(\infty, 2+\infty) = \infty;$

$C_{65} = \min(C_{65}, C_{62} + C_{25}) = \min(3, 2+6) = 3;$

$C_{66} = 0.$

Матрица, полученная после второй итерации, имеет вид

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	∞	7	3
2	1	0	3	∞	6	2
3	4	3	0	5	1	3
4	∞	∞	5	0	1	∞
5	7	6	1	1	0	3
6	3	2	3	∞	3	0

Рассмотрим случай, когда $k = 3$

$C_{12} = \min(C_{12}, C_{13} + C_{32}) = \min(1, 4+3) = 1;$

$$C_{13} = \min(C_{13}, C_{13} + C_{33}) = 4;$$

$$C_{14} = \min(C_{14}, C_{13} + C_{34}) = \min(\infty, 4+5) = 9;$$

$$C_{15} = \min(C_{15}, C_{13} + C_{35}) = \min(7, 4+1) = 5;$$

$$C_{16} = \min(C_{16}, C_{13} + C_{36}) = \min(3, 4+3) = 3.$$

Для второй строки получим

$$C_{23} = \min(C_{23}, C_{23} + C_{33}) = 3;$$

$$C_{24} = \min(C_{24}, C_{23} + C_{34}) = \min(\infty, 3+5) = 8;$$

$$C_{25} = \min(C_{25}, C_{23} + C_{35}) = \min(6, 3+1) = 4.$$

Приведем теперь расчет элементов, которые меняют свои значения

$$C_{34} = \min(C_{34}, C_{33} + C_{34}) = \min(5, 5) = 5;$$

$$C_{41} = \min(C_{41}, C_{13} + C_{31}) = \min(\infty, 5+4) = 9;$$

$$C_{42} = \min(C_{42}, C_{43} + C_{32}) = \min(\infty, 5+3) = 8;$$

$$C_{43} = \min(C_{43}, C_{43} + C_{33}) = 5;$$

$$C_{46} = \min(C_{46}, C_{43} + C_{36}) = \min(\infty, 5+3) = 8;$$

$$C_{51} = \min(C_{51}, C_{53} + C_{31}) = \min(7, 1+4) = 5;$$

$$C_{52} = \min(C_{52}, C_{53} + C_{32}) = \min(6, 1+3) = 4;$$

$$C_{64} = \min(C_{64}, C_{63} + C_{34}) = \min(\infty, 3+5) = 8.$$

Матрица, полученная после третьей итерации, будет

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	9	5	3
2	1	0	3	8	4	2
3	4	3	0	5	1	3
4	9	8	5	0	1	8
5	5	4	1	1	0	3
6	3	2	3	4	3	0

Приведем расчет для $k = 5$ только тех элементов, которые меняются

$$C_{14} = \min(C_{14}, C_{15} + C_{54}) = \min(9, 5+1) = 6;$$

$$C_{24} = \min(C_{24}, C_{25} + C_{54}) = \min(8, 4+1) = 5;$$

$$C_{34} = \min(C_{34}, C_{35} + C_{54}) = \min(5, 1+1) = 2;$$

$$C_{41} = \min(C_{41}, C_{45} + C_{51}) = \min(9, 1+5) = 6;$$

$$C_{42} = \min(C_{42}, C_{45} + C_{52}) = \min(8, 1+4) = 5;$$

$$C_{46} = \min(C_{46}, C_{45} + C_{56}) = \min(8, 1+3) = 4.$$

Таким образом, кратчайшие пути между всеми узлами

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	6	5	3
2	1	0	3	5	4	2
3	4	3	0	2	1	3
4	6	5	2	0	1	4
5	5	4	1	1	0	3
6	3	2	3	4	3	0

4.2. Для сети, представленной на рис. 31.3, **найти** кратчайшие пути от вершины a_1 до остальных.

Решение. Результаты расчетов приведены в таблице.

k	p	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
1	1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2	2	0	1	∞	∞	∞	5
3	6	0	1	4	∞	7	3
4	3	0	1	4	∞	6	3
5	4	0	1	4	9	5	3
6	5	0	1	4	6	5	3

В первом столбце дается номер итерации, во втором — номер вершины, получающей на данной итерации постоянную пометку, а в остальных — величины пометок для каждой вершины. Столбец выделяется жирными линиями, начиная с той итерации, на которой пометка соответствующей вершины стала постоянной. Рассмотрим порядок расчета.

1. На первой итерации пометка первой вершины постоянная и равна $l_1 = 0$, пометки остальных вершин временные и равны $l_i = \infty$.

2. Соседями вершины a_1 являются a_2 и a_6. Временные пометки этих вершин равны

$$l_2' = \min(\infty, 0+1) = 1; \quad l_6' = \min(\infty, 0+5) = 5.$$

Выбираем минимальную из них $l_2 = 1$, $p = 2$, $l_p = 1$.

3. На третьей итерации соседями вершины a_2 являются вершины a_3, a_5, a_6. Временные пометки этих вершин

$$l_2' = \min(\infty, 1+3) = 4; \quad l_5' = \min(\infty, 1+6) = 7;$$
$$l_6' = \min(5, 1+2) = 3.$$

Минимальная из них l_6' становится постоянной $l_6 = 3$ и $p = 6$.

4. Соседями вершины a_6 являются a_3, a_5. Временные пометки этих вершин $l_3' = \min(4, 3+3) = 4$; $l_5' = \min(7, 3+3) = 6$. Минимальная из них l_3' становится постоянной $l_3 = 4$ и $p = 3$.

5. На пятой итерации соседями вершины a_3 являются вершины a_4, a_5. Найдем временные пометки этих вершин

$$l_4' = \min(\infty, 4+5) = 9; \quad l_5' = \min(6, 4+1) = 5.$$

Минимальная из них $l_5' = 5$ становится постоянной $l_5 = 5$ и $p = 5$.

5. Вершина a_5 соседствует с вершиной a_4, временная пометка которой $l_4' = \min(9, 5+1) = 6$, $p_5 = 4$.

Таким образом, кратчайшие пути от первой вершины ко всем остальным приведены в вершинах выделенных столбцов и совпадают с первой строкой матрицы алгоритма Флойда предыдущей задачи.

31.5. Алгоритмы определения максимального потока

1°. Пусть в сети имеется единственный источник a_0 и единственный сток a_n. Обозначим положительным числом b_{ij} *пропускную способность* дуги от a_i к a_j, а за b_{ji} — пропускную способность дуги от a_j к a_i, причем выполнение равенства $b_{ij} = b_{ji}$ не обязательно. *Потоком в сети* из источника a_0 в сток a_n называется множество неотрицательных чисел x_{ij}, поставленных в соответствие дугам сети, таких, что

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0, n, \\ v, & j = n, \end{cases}$$

где $0 \le x_{ij} \le b_{ij}$; число $v \ge 0$ называется *величиной потока*.

2°. Пусть начальные пропускные способности дуг заданы. Выберем некоторый начальный поток, например, нулевой. Алгоритм работает следующим образом.

1. Выберем путь из a_0 в a_n положительной пропускной способности θ, где θ — минимальная величина из пропускных способностей дуг. Источник a_0 считается вначале помеченным, но не просмотренным, а все остальные узлы не помеченными.

2. Выбрать любой помеченный, но не просмотренный узел a_i.

3. Всем узлам a_j, для которых $b_{ij} > 0$, приписать пометки (i, j) и считать их помеченными. Считать узел a_0 просмотренным. Если при этом сток a_n оказался помеченным, то по пометкам легко восстановить искомый путь из a_0 в a_n. В противном случае следует перейти к шагу 2. Если это невозможно, то искомого пути не существует.

4. Пусть $(a_0, a_{i_1}), (a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{i_{m-1}}, a_{i_m})$— найденый путь. Тогда для каждой дуги $(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$, входящей в этот путь, следует выполнить операторы:

$$x_{i_k i_{k+1}} := x_{i_k i_{k+1}} + \theta; \; b_{i_k i_{k+1}} := b_{i_k i_{k+1}} - \theta;$$
$$b_{i_{k+1} i_k} := b_{i_{k+1} i_k} + \theta; \; v := v + \theta.$$

Далее переходим к шагу 1. Если пути положительной пропускной способности не существует, то полученный поток является максимальным.

5.1. В области **имеется** семь городов, соединенных дорогами. Граф задачи показан на рис. 31.4.

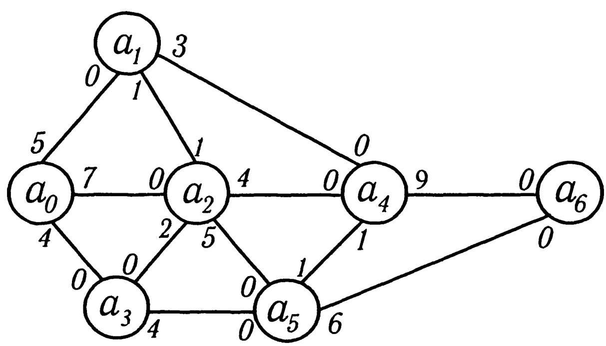
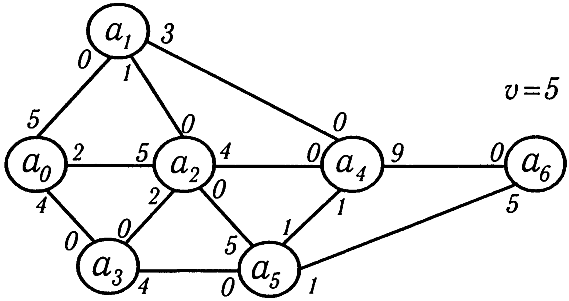


Рис. 31.4

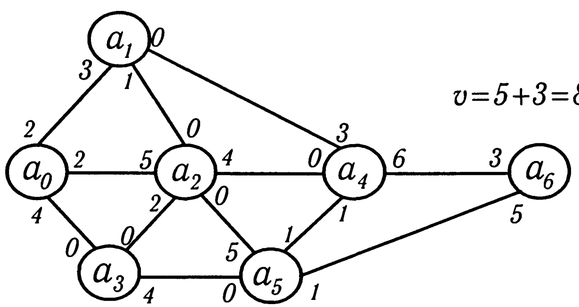
На каждой дуге (a_i, a_j) около узла a_i указано максимальное (за один день) число мешков с корреспонденцией, которые можно перевезти от a_i к a_j, а около узла a_j — максимальное число мешков, которые можно перевезти из a_j в a_i. **Найти** максимальное число мешков, которые можно перевезти из a_0 в a_n.

Решение. Пусть начальный поток задан числами $v = x_{02} = = x_{25} = x_{56} = 5$ (потоки по остальным дугам равны нулю). После изменения пропускных способностей дуг $b_{i_k i_{k+1}}$ получается сеть.



Далее выбираем путь $a_0 \to a_1 \to a_4 \to a_6$, где $\theta = 3$ — минимальная величина из пропускных способностей.

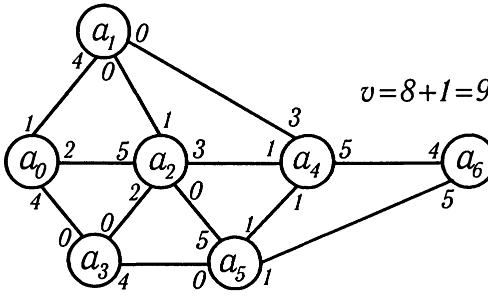
Изменяя пропускные способности дуг, получим



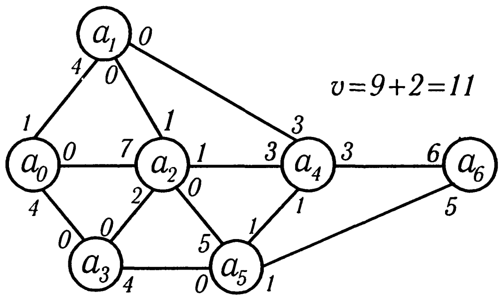
На следующем шаге выбираем путь

$$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_4 \to a_6, \ \theta = 1,$$

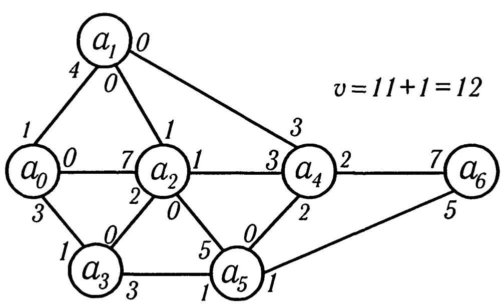
тогда граф примет вид



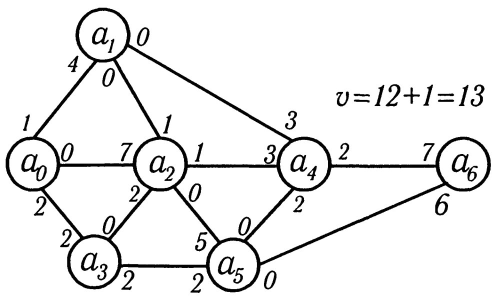
Далее $a_0 \to a_2 \to a_4 \to a_6$, $\theta = 2$ и граф будет



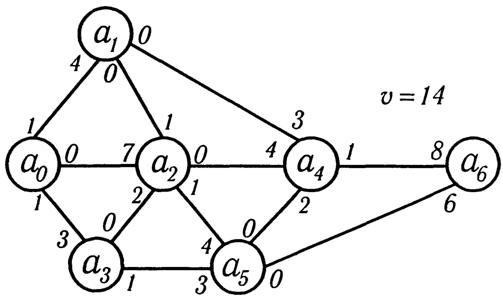
Следующий шаг $a_0 \to a_3 \to a_5 \to a_4 \to a_6$, $\theta = 1$



Далее $a_0 \to a_3 \to a_2 \to a_4 \to a_6$, $\theta = 1$



Наконец, $a_0 \to a_3 \to a_5 \to a_2 \to a_4 \to a_6$, $\theta = 1$



Поскольку положительной пропускной способности нет, то полученный поток является максимальным.

31.6. Задача замены оборудования

Покупная цена нового оборудования известна и равна S. Известны затраты на эксплуатацию (уход, ремонт и т. д.) в соответствующие периоды $(1, 2, \ldots, t, \ldots, n)$. Пусть периоды равны, а затраты в период t будут C_t. В результате старения балансовая цена оборудования непрерывно падает. Обозначим ее за S_t. Считаем, что C_t и S_t экспоненциально зависят от t

$$C_t = a_0(e^{\lambda t} - 1); \quad S_t = b_0 e^{-\mu t}.$$

Средние затраты равны

$$Y(t) = (S + \sum_{t=1}^{t} C_t - S_t)/t,$$

$$Y(t) = (S + a_0(e^{\lambda t} - 1) - b_0 e^{-\mu t})/t = (a_0(e^{\lambda t} - 1) + S(1 - e^{-\mu t}))/t.$$

Отсюда

$$\frac{dY}{dt} = \frac{(a_0 \lambda e^{\lambda t} + S\mu e^{-\mu t})t - a_0(e^{\lambda t} - 1) - S(1 - e^{-\mu t})}{t^2} = 0.$$

Преобразуя, будем иметь

$$a_0(\lambda t e^{\lambda t} - e^{\lambda t} + 1) = S(1 - e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t}).$$

Если обозначить $Y_1 = a_0(\lambda t e^{\lambda t} - e^{\lambda t} + 1)$ и $Y_2 = S(1 - e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t})$, то точка пересечения этих кривых и даст искомое время t, когда следует произвести замену оборудования.

31.7. Метод наименьших квадратов

1°. Метод наименьших квадратов заключается в том, что из данного множества функций $y = f(x)$ выбирается та, для которой сумма квадратов отклонений опытных значений от расчетных является наименьшей.

Подбор параметров функции $y = f(x)$ делается после определения вида функции. Вид функции выбирается из графического изображения опытных данных таким образом, чтобы график функции наиболее точно отражал расположение опытных данных на графике. Пусть дана таблица значений переменных x_i и соответствующих им значений y_i.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Рассмотрим некоторые простейшие виды функций.

2°. Линейная функция $y = ax + b$. Нормальная система для определения коэффициентов a и b имеет вид

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (1)$$

3°. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. Нормальная система для определения коэффициентов a, b и c имеет вид

$$a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i;$$

$$a\sum x_i^3+b\sum x_i^2+c\sum x_i=\sum x_i y_i;$$
$$a\sum x_i^2+b\sum x_i+cn=\sum y_i. \qquad (2)$$

4°. Гипербола вида $y=a+\frac{b}{x}$. Нормальная система для определения параметров a и b имеет вид

$$a\sum\frac{1}{x_i}+b\sum\frac{1}{x_i^2}=\sum\frac{y_i}{x_i};$$
$$na+b\sum\frac{1}{x_i}=\sum y_i. \qquad (3)$$

7.1. Результаты экспериментальных исследований представлены таблицей

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	13	8	4	1	–2	–9

Полагая, что зависимость линейная, **найти** значения параметров функции $y=ax+b$.

Решение. Воспользуемся методом наименьших квадратов. При составлении системы нормальных уравнений (1) суммирование удобнее выполнять в табличной форме

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1	13	1	13
2	2	8	4	16
3	3	4	9	12
4	4	1	16	4
5	5	−2	25	−10
6	6	−9	36	−54
$\sum$	21	15	91	−19

Система нормальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} 91a+21b=-19, \\ 21a+6b=15. \end{cases}$$

Из решения этой системы получим: $a=-\frac{143}{35}$; $b=\frac{84}{5}$. Зависимость между x и y представляется в виде $y=-\frac{143}{35}x+\frac{84}{5}$.

7.2. Результаты опыта представлены таблицей

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	4	7	11

Найти зависимость между переменными.

Решение. Прибрасывая опытные данные на графике, считаем, что зависимость между ними квадратичная.

Воспользуемся методом наименьших квадратов. При составлении системы нормальных уравнений (2) суммирование представим в табличной форме

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	1	1	2	2
3	2	4	4	8	16	8	16
4	3	7	9	27	81	21	63
5	4	11	16	64	256	44	176
$\sum$	10	25	30	100	354	75	257

Система нормальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} 354a+100b+30c=257, \\ 100a+30b+10c=75, \\ 30a+10b+5c=25. \end{cases}$$

Умножая третье уравнение на 2 и вычитая из второго, и умножая второе на 3 и вычитая из первого уравнения, получим

$$\begin{cases} 40a + 10b = 25, \\ 54a + 10b = 32, \end{cases}$$

откуда $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1.$

Таким образом,

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1.$$

7.3. По таблице опытных данных

x_i	0,5	1	2	4	6
y_i	5	2	0	–1	–1,5

найти зависимость между переменными.

Решение. Прибрасывая опытные данные на графике (рис. 31.5.), считаем, что зависимость между переменными гиперболическая. Пользуясь методом наименьших квадратов, суммирование, при составлении системы нормальных уравнений (3), приведем в табличном виде

i	x_i	y_i	$1/x_i$	$1/x_i^2$	y_i/x_i
1	0,5	5	2	4	10
2	1	2	1	1	2
3	2	0	1/2	1/4	0
4	4	–1	0,25	1/16	–1/4
5	6	–1,5	1/6	1/36	–1/4
$\sum$		4,5	3,916	5,34	11,5

Система нормальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} 3{,}916a + 5{,}34b = 11{,}5, \\ 5a + 3{,}916b = 4{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = -1{,}847;\ b = 3{,}5$. Таким образом, зависимость примет вид

$$y = -1{,}847 + \frac{3{,}5}{x}.$$

7.4. Найти нормальную систему для определения коэффициентов a, b показательной функции $y = ab^x$.

Решение. Прологарифмируем функцию $\ln y = \ln a + x \ln b$ и считаем $\ln y$ линейной функцией от x, а $\ln a$, $\ln b$ принимаем за параметры.

Будем подбирать параметры так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений $\ln a + x_i \ln b$ от наблюдаемых значений $\ln y_i$, т. е. величина

$$S = (\ln a + x_1 \ln b - \ln y_1)^2 + (\ln a + x_2 \ln b - \ln y_2)^2 +$$
$$+ \dots + (\ln a + x_n \ln b - \ln y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\ln a + x_i \ln b - \ln y_i)^2$$

принимала наименьшее значение.

Рассматриваем сумму S как функцию двух переменных $\ln a$ и $\ln b$. Функция S принимает минимальное значение при тех значениях $\ln a$ и $\ln b$, при которых обращаются в нуль частные производные по этим параметрам, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial \ln a} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial \ln b} = 0.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial \ln a} = 2\sum_{i=1}^{n} (\ln a + x_i \ln b - \ln y_i) =$$
$$= 2(n \ln a + \ln b \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln y_i).$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ln b} = 2\sum_{i=1}^{n}(\ln a + x_i \ln b - \ln y_i)x_i =$$

$$= 2\ln a\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i.$$

Приравнивая частные производные нулю, получим нормальную систему

$$n\ln a + \ln b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

$$\ln a\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i$$

Найденные из этой системы значения параметров $\ln a$ и $\ln b$ позволяют с помощью таблиц натуральных логарифмов определить значения a и b.

31.8. Методы расчета надежности

1°. Основные понятия надежности. *Надежностью* $p(t)$ элемента называется вероятность того, что этот элемент будет работать в течение времени t безотказно. *Отказ* — это событие, состоящее в нарушении работоспособности элемента. Отказы бывают внезапные и постепенные. Внезапный отказ происходит в случайный момент времени. Постепенный отказ характеризуется постепенным ухудшением характеристик машины (элемента).

Деление технических устройств на элементы носит условный характер. Так одно и то же устройство может рассматриваться как машина, состоящая из элементов, так и как элемент технологической линии машин. В дальнейшем под «элементом» мы будем понимать техническое устройство, не подлежащее дальнейшему расчленению.

При оценке надежности машины следует рассмотреть некоторые количественные характеристики. При $t = 0$ надежность $p(t) = 1$ и с увеличением времени убывает (рис. 31.6.). Ненадежность определяется по формуле $q(t) = 1 - p(t)$. Характер изменения кривой $q(t)$ показан на рис. 31.6. При возрастании t кривая $q(t)$ стремится к единице.

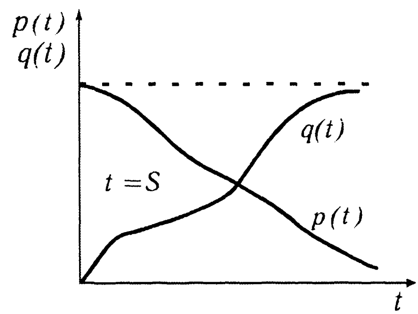


Рис. 31.6

Одной из количественных характеристик, определяющих безотказность работы «элемента» машины, является среднее время наработки на отказ. Если T — время безотказной работы, то функция распределения этой случайной величины определяется выражениями $F(t) = P(T < t)$ и представляет ненадежность работы элемента $F(t) = q(t)$. Таким образом, $F(t)$ — вероятность того, что за время t элемент откажет. Надежность элемента или машины дополняет $F(t)$ до единицы, то есть $p(t) = 1 - F(t)$.

Плотность распределения времени безотказной работы равна $f(t) = F'(t) = q'(t)$. График плотности показан на рис. 31.7. Элемент вероятности $f(t)dt$ есть вероятность того, что время T лежит в пределах от t до $t + dt$. Плотность вероятности определяется по формуле

$$f(t) \simeq \frac{m(\Delta t)}{N\Delta t}, \qquad (1)$$

где $m(\Delta t)$ — число элементов, отказавших за время Δt, т. е. от t до $t+dt$; N — общее число элементов.

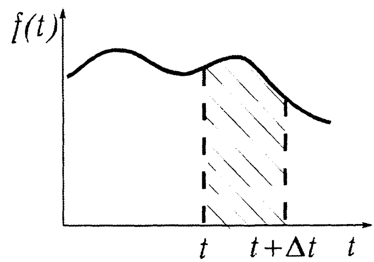


Рис. 31.7

Если T величина непрерывная, то среднее время безотказной работы равно

$$\bar{t} = M(T) = \int_0^\infty t f(t)dt = \int_0^\infty t q'(t)dt =$$

$$= -\int_0^\infty t p'(t)dt = \int_0^\infty p(t)dt. \qquad (2)$$

Среднее время безотказной работы $\bar{t}$ равно площади, ограниченной кривой надежности и осями координат (рис. 31.6). Основные показатели надежности машин, состоящих из k групп элементов, определяются на основании статистического материала. Если число элементов в группах равно $n_1, n_2, ..., n_k$, а $t_1, t_2, ..., t_k$, — время наработки элементов на отказ в каждой группе, то среднее время наработки на отказ будет

$$\bar{t} = 1 / \sum_{i=1}^{k} n_i / t_i. \qquad (3)$$

Среднее время восстановления работоспособности является одной из основных характеристик ремонтопригодности машин. Пусть $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ — среднее время восстановления элементов машины в каждой группе. В этом случае среднее время восстановления будет

$$\overline{t_B} = \overline{t}\sum_{i=1}^{k} n_i \tau_i / t_i. \tag{4}$$

которое определяет вероятность того, что восстанавливаемая машина в данный момент времени находится в рабочем состоянии.

Одним из комплексных показателей надежности является коэффициент готовности

$$k_Г = \overline{t} / (\overline{t} + \overline{t_B}). \tag{5}$$

Время наработки на отказ t_i неремонтируемых элементов машины, число отказов в случае ремонтируемых элементов и ряд других характеристик надежности подчиняются различным законам распределения. Наиболее распространенным в технических устройствах является экспоненциальное распределение. Экспоненциальный закон надежности имеет вид

$$p(t) = e^{-\lambda t}, \tag{6}$$

где λ — интенсивность потока событий (отказов) постоянная величина.

Функция распределения времени безотказной работы равна $F(t) = q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, а плотность — $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$.

Интенсивность отказов определяется по формуле

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{m(\Delta t)}{N \Delta t\, p(t)} \tag{7}$$

и характеризует среднее число отказов в единицу времени, приходящееся на один работающий элемент.

Надежность определяется через интенсивность отказов по формуле

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \tag{8}$$

Если $\lambda(t)=\lambda$ — const, то формула (8) выражает экспоненциальный закон надежности (6).

2°. *Надежность простой системы.* Под простой системой будем понимать такую систему элементов, отказ любого элемента которой равносилен отказу системы в целом. Простая система с точки зрения надежности представляет схему последовательного соединения элементов (рис. 31.8).

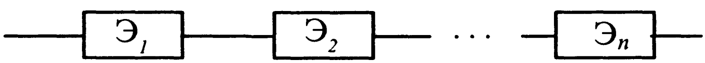


Рис. 31.8

Надежность простой системы P, составленной из n независимых по отказам элементов, равна произведению надежностей ее элементов

$$P=\prod_{i=1}^{n} p_i, \tag{9}$$

где p_i — надежность i–го элемента.

Если $p_1=p_2=\ldots=p_n$, то формула (9) примет вид

$$P=p^n. \tag{10}$$

При последовательном (в смысле надежности) соединении независимых по отказам элементов интенсивности отказов складываются и интенсивность отказов простой системы равна

$$\Lambda(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t). \tag{11}$$

Действительно, выразим интенсивности отказов простой системы $\Lambda(t)$ через интенсивности отказов отдельных ее элементов $\lambda_i(t)$. Согласно определению надежности через интенсивность (8), имеем

$$P(t)=e^{-\int_0^t \Lambda(t)dt};$$

$$p_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt} \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{12}$$

Подставляя выражения (12) в выражение (9), получим

$$e^{-\int_0^t \Lambda(t)dt} = e^{-\int_0^t \lambda_1(t)dt} e^{-\int_0^t \lambda_2(t)dt} ... e^{-\int_0^t \lambda_n(t)dt} =$$

$$= e^{-\int_0^t [\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+...+\lambda_n(t)]dt} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i dt},$$

откуда и следует соотношение (11).

3°. *Надежность резервированной системы.* Для повышения надежности в систему включают резервные элементы «параллельно» тем, надежность которых недостаточна (рис. 31.9).

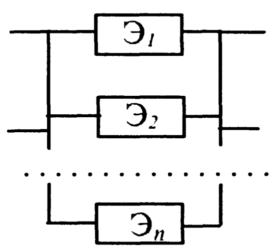


Рис. 31.9

Если основной элемент $Э_1$ отказал, то система переключается автоматически на резервный элемент $Э_2$ и т. д. Переключение безотказное, надежность переключения $p_{np} = 1$. Вероятности безотказной работы элементов обозначим за $p_1, p_2, ..., p_n$, а ненадежность элементов, соответственно, за $q_1, q_2, ..., q_n$. Ненадежность всей системы будет равна произведению ненадежностей элементов

$$Q = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n. \tag{13}$$

Поскольку надежность системы равна $P = 1 - Q$, то

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots, \cdot q_n = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \qquad (14)$$

Если надежности всех элементов одинаковы $p_1 = p_2 = \ldots = p$, то соотношения (14) примут вид

$$P = 1 - (1 - p)^n. \qquad (15)$$

В общем случае в резервированных системах могут использоваться как «параллельные», так и «последовательные» соединения элементов (рис. 31.10).

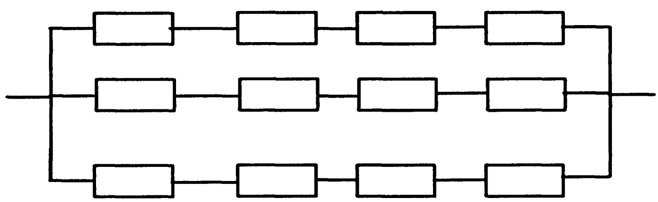


Рис. 31.10

Полагаем, что все надежности элементов равны p, тогда надежность каждой «строки» равна $p^m(t)$, где m — число последовательных элементов в «строке». Поскольку «строки» представляют «параллельные» соединения элементов, то по формуле (15) получим

$$P = 1 - (1 - p^m)^n, \qquad (16)$$

здесь n — число «строк».

При оценке надежности сложной системы ее следует разделить на ряд подсистем, не имеющих общих элементов, и найти надежность каждой из них, а затем системы в целом.

4°. Предположим теперь, что переключение на резервный элемент имеет надежность, меньшую единицы.

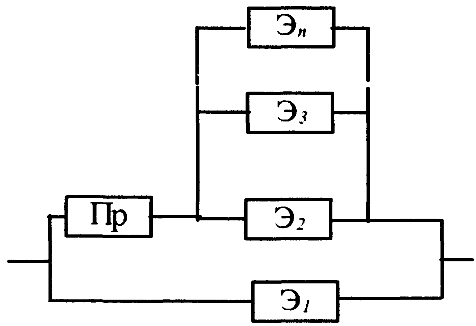


Рис. 31.11

Пусть переключение на резервный элемент осуществляется одним переключателем (рис. 31.11) с надежностью $p_{пр}$. Рассматривая резервную систему как блок параллельных соединений элементов, а переключатель и блок резервных элементов как последовательную, находим надежность этой подсистемы

$$p_2' = (1-(1-p_2)(1-p_3)\dots(1-p_n))p_{пр}. \tag{17}$$

Отсюда надежность всей системы будет

$$P = 1-(1-p_1)(1-p_2'). \tag{18}$$

Если каждый резервный элемент имеет свой переключатель, соответственно, с надежностью $p_{пр}^{(2)}, p_{пр}^{(3)}, \dots, p_{пр}^{(n)}$, то, объединяя переключатели и резервные элементы в последовательные цепи, в выражении (14) надежность резервного элемента следует умножить на надежность переключателя

$$P = 1-(1-p_1)(1-p_2p_{пр}^{(2)})(1-p_3p_{пр}^{(3)})\cdot\ldots\cdot(1-p_np_{пр}^{(n)}). \tag{19}$$

Здесь надежность любого резервного элемента не зависит от того, включился он в работу или нет.

5°. *Надежность резервной линии.* Пусть линия имеет две резервные машины. Считаем, что потоки отказов простейшие, т. е. интенсивности отказов постоянные и что линия с холодным резервом. При отказе машины M_1 включается машина M_2, а при отказе M_2 включается M_3. До включения каждая из резервных машин находится в холодном резерве и отказать не может. Пусть λ_1 — интенсивность потока отказов основной машины, λ_2 — остальных машин. Представим процесс, как марковский случайный процесс (рис. 31.12).

$$\boxed{S_1} \xrightarrow{\lambda_1} \boxed{S_2} \xrightarrow{\lambda_2} \boxed{S_3} \xrightarrow{\lambda_2} \boxed{S_4}$$

Рис. 31.12

Введем обозначения: S_1 — работает основная машина; S_2 — работает первая из резерва машина; S_3 — работает вторая из резерва машина; S_4 — не работает ни одна машина.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний будет

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_1 p_1; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_1; \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\lambda_2 p_3 + \lambda_2 p_2; \\ \frac{dp_4}{dt} &= \lambda_2 p_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Добавим к системе нормировочное условие

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Интегрируя первое уравнение при $P_1(0) = 1$, получим

$$p_1(t) = e^{-\lambda_1 t}.$$

Подставляя во второе уравнение, будем иметь

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

Интегрируя с начальным условием $P_2(0)=0$, получим

$$p_2(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}.$$

Подставляя в третье уравнение, будем иметь

$$\frac{dp_3}{dt}=-\lambda_2 p_3+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}.$$

При $p_3(0)=0$, после интегрирования

$$p_3(t)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_2 t}-\frac{\lambda_1\lambda_2 t}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_2 t}.$$

Для нахождения функции $p_4(t)$ воспользуемся нормировочными условиями, тогда

$$p_4=1-p(t)=1-(p_1+p_2+p_3)=$$

$$=1-e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}-$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_2 t}+\frac{\lambda_1\lambda_2 t}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}.$$

8.1. Интенсивность отказов элемента задана графически (рис. 31.13). **Найти** закон надежности $p(t)$ и среднее время безотказной работы.

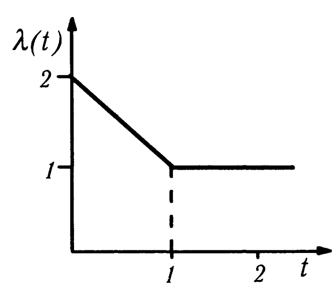


Рис. 31.13

Решение. Из рисунка находим, что интенсивность отказов на участке (0,1) меняется по закону $\lambda(t)=2-t$, а на участке $t>1$ постоянна и равна $\lambda=1$.

Надежность на участке (0,1) по формуле (8) будет

$$p_1(t)=e^{-\int_0^t (2-t)dt}=e^{-(2t-\frac{t^2}{2})}.$$

Найдем $p(t)$ на участке $t>1$

$$\int_1^t \lambda(t)dt=\int_1^t dt=t-1;$$

тогда $p_2(t)=e^{-t+1}$.

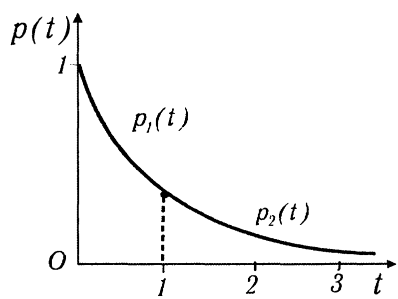


Рис. 31.14

График закона надежности показан на рис. 31.14. Среднее время безотказной работы равно площади, ограниченной кривыми $p_1(t)$, $p_2(t)$ и осями координат

$$\bar{t}=\int_0^1 p_1(t)dt+\int_1^\infty p_2(t)dt=\int_0^1 e^{-(2t-\frac{t^2}{2})}dt+\int_1^\infty e^{-t+1}dt=1{,}05+1=2{,}05.$$

Здесь первый интеграл $\int_0^1 e^{-(2t-\frac{t^2}{2})}dt=1{,}05$ вычислен приближенно.

8.2. Плотность распределения времени безотказной работы элемента на участке $(t_1,t_2\ )$ постоянна и равна нулю вне этого участка (рис. 31.15). **Найти** интенсивность отказов и построить график.

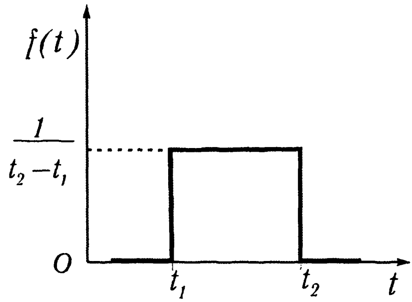


Рис. 31.15

Решение. Интенсивность отказов по формуле (7) равна

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{p(t)}=\frac{f(t)}{1-q(t)} \qquad (t_1<t<t_2).$$

Поскольку

$$q(t)=\int_{t_1}^{t} f(t)dt=\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{t_2-t_1}=\frac{t-t_1}{t_2-t_1},$$

то

$$\lambda(t)=\frac{1}{t_2-t}.$$

График интенсивности отказов приведен на рис. 31.16.

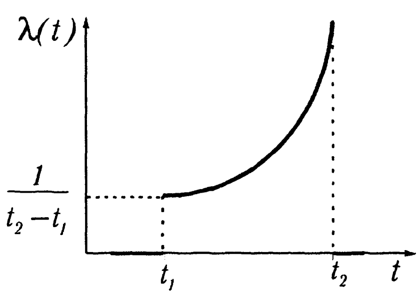


Рис. 31.16

8.3. Простая система состоит из 7 независимых элементов, надежность каждого из которых $p = 0,9$. **Найти** надежность системы.

Решение. Воспользуемся формулой (10), тогда

$$P = 0,9^7 \simeq 0,478.$$

8.4. Простая система состоит из 100 одинаково надежных независимых элементов. **Какова** должна быть **надежность** отдельного элемента, чтобы надежность системы была бы не менее 0,85?

Решение. Представим формулу (10) в виде $p = \sqrt[n]{P}$. Тогда надежность отдельного элемента

$$p = \sqrt[100]{0,85}; \quad \ln p = \frac{1}{100}\ln 0,85; \quad p = 0,9995.$$

8.5. Простая система состоит из трех независимых элементов. **Найти** интенсивность отказов системы, если плотности распределения времени безотказной работы заданы выражениями: $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = 3t^2,\ f_3(t) = 1 - 2t$ при $0 < t < 1$.

Решение. Поскольку $f(t) = q'(t)$, то ненадежность каждого элемента будет

$$q_1(t) = t;\ q_2(t) = t^3;\ q_3(t) = t - t^2 \text{ при } 0 < t < 1.$$

Отсюда надежность элементов

$$p_1(t) = 1 - t;\ p_2(t) = 1 - t^3;\ p_3(t) = 1 - t + t^2 \text{ при } 0 < t < 1.$$

Интенсивность отказа каждого элемента по формуле (7) равна

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{1-t};\ \lambda_2(t) = \frac{3t^2}{1-t^3};\ \lambda_3(t) = \frac{1-2t}{1-t+t^2}.$$

Интенсивность отказов системы находим по формуле (11)

$$\Lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{3t^2}{1-t^3} + \frac{1-2t}{1-t+t^2} =$$

$$=\frac{2(1-t+2t^2-2t^3+3t^4)}{(1-t^3)(1-t+t^2)}.$$

8.6. Найти надежность системы, состоящей из семи элементов с надежностями $p_1, p_2, ..., p_7$ (рис. 31.17).

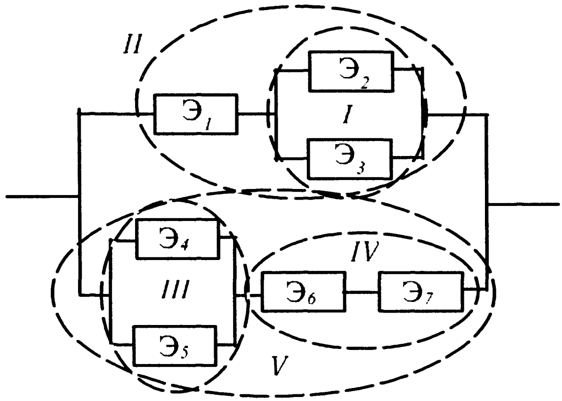


Рис. 31.17

Решение. Поскольку в системе применяются как «последовательное», так и «параллельное» соединение элементов, то при оценке надежности расчленяем ее на ряд подсистем. Рассматривая подсистемы как условные элементы, находим надежность системы в целом.

Подсистема I — «параллельно» включенные элементы $Э_2$ и $Э_3$; надежность $p_I = 1-(1-p_2)(1-p_3)$.

Подсистема II — «последовательно» соединенные элементы $Э_1$ и I; надежность $p_{II} = p_1 \cdot p_I$.

Подсистема III — «параллельно» включенные элементы $Э_4$ и $Э_5$; надежность $p_{III} = 1-(1-p_4)(1-p_5)$.

Подсистема IV — «последовательное» соединение элементов $Э_6$ и $Э_7$; надежность $p_{IV} = p_6 \cdot p_7$.

Подсистема V — «последовательно» соединенные элементы III и IV; надежность $p_V = p_{III} \cdot p_{IV}$.

Вся система — «параллельно» включенные II и V элементы; надежность $P = 1-(1-p_{II})(1-p_V)$.

8.7. Рассмотрим технологическую линию, состоящую из одной основной машины и трех резервных. Пусть основная машина подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_1. **Найти** надежность линии с облегченным резервом, т. е. когда резервные машины до включения подвергаются простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_2, а после включения интенсивность повышается до величины λ_2^o.

Решение. При определении надежности линии введем следующие обозначения состояний. Если основная машина работает, то первый индекс равен нулю, если основная машина отказала, то первый индекс равен единице, а второй индекс определяет число исправных резервных машин. Так, S_{0k} — основная машина исправна, из резервных исправны k машин ($k = 0, 1, 2, 3$); S_{1k} — основная машина отказала, из резервных исправны k машин, причем одна из них работает.

Для составления уравнений Колмогорова представим граф состояний (рис. 31.18).

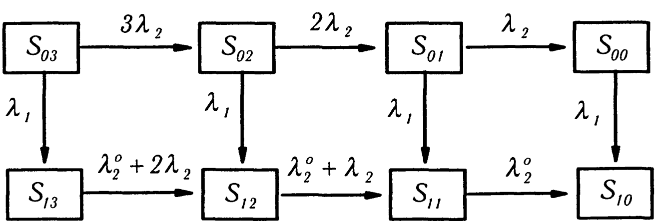


Рис. 31.18

Система уравнений вероятностей состояний в этом случае будет

$$\frac{dp_{03}}{dt} = -(\lambda_1 + 3\lambda_2)p_{03};$$

$$\frac{dp_{02}}{dt} = -(\lambda_1 + 2\lambda_2)p_{02} + 3\lambda_2 p_{03};$$

$$\frac{dp_{01}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_{01} + 2\lambda_2 p_{02};$$

$$\frac{dp_{00}}{dt} = -\lambda_1 p_{00} + \lambda_2 p_{01};$$

$$\frac{dp_{13}}{dt} = -(\lambda_2^o + 2\lambda_2)p_{13} + \lambda_1 p_{03};$$

$$\frac{dp_{12}}{dt} = -(\lambda_2^o + \lambda_2)p_{12} + \lambda_1 p_{02} + (\lambda_2^o + 2\lambda_2)p_{13};$$

$$\frac{dp_{11}}{dt} = -\lambda_2^o p_{11} + \lambda_1 p_{01} + (\lambda_2^o + \lambda_2)p_{12};$$

$$\frac{dp_{10}}{dt} = \lambda_1 p_{00} + \lambda_2^o p_{11}.$$

Из интегрирования первого уравнения системы имеем

$$p_{03} = e^{-(\lambda_1 + 3\lambda_2)t}.$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы и интегрируя, находим p_{02}. Продолжая последовательно процесс интегрирования уравнений, находим остальные значения вероятностей состояний. Вероятность состояния, когда линия не работает, может быть найдена из условия

$$p_{10}(t) = 1 - (p_{03} + p_{02} + p_{01} + p_{00} + p_{13} + p_{12} + p_{11}).$$

Отсюда надежность линии, как обратное событие, будет

$$P(t) = 1 - p_{10}(t),$$

т. е. равна сумме вероятностей, при которых линия работает.

Нетрудно заметить, что изменение числа резервных машин в технологической линии приводит только к увеличению или уменьшению графа состояний (рис. 31.18), а, соответственно, и числа уравнений системы. В остальном схема расчета остается без изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копчёнова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.

2. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000. — 190 с.

3. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, примеры, методология. М.: Наука, 1980. — 551 с.

4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998. — 400 с.

5. *Коваленко И. Н., Филиппова А. А.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.,Высшая школа, 1982. — 256 с.

6. *Рябенький В. С.* Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1993. — 294 с.

7. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982. — 255 с.

Приложение

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	4	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398	3989	3989	3988	3986	4984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	8653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0946	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Распределение Пуассона $P(m,\lambda)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0.9	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0.6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0.0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111		
5			0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020		
6						0,0001	0,0002	0,0003		
m \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0.0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0.1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0.1563	0,1755	0,1606	0.1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0.0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0.1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0.1304	0,1396	0.1318	0,1126
9		0,0002	0.0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0.1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0.0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0.0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,2237
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0 0002
24										0,0001

Таблица 3

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4.	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42-922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45003	45154	45254	40352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320'	“47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	0,49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	0,499968								
4,5	0,499997								
5,0	0,49999997								

Таблица 4

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,4	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32i	70	1,996	2,649	8,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 5

Таблица значений функции $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,95	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,231	0,29
16	0,44	0,70	1,67	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	350	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 6

Критические точки распределения *F* Фишера – Снедекора

(k_1— число степеней свободы большей дисперсии,
k_2—число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

k_1 \ k_2	1	2	3	:4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27.91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	16,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,9S	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12.25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9.33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

k_1 \ k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,09	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4.46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,19	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2.60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Таблица 7

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,В	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 8

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица 9

Критические точки распределения Кочрена

k—число степеней свободы, l—количество выборок)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0.9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0.3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0.3428	0.3099	0.2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0.2295	0,1970	0,1759	0,1608	0.1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0.5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0.4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблица 9 (продолжение)

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

$l \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

$l \backslash k$	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблица 10

Равномерно распределенные случайные числа

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77
66	06	57	47	17	34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01
83	45	29	96	34	06	28	89	80	83	13	74	67	00	78	18	47	54	06	10
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93
99	59	46	73	48	87	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10	45	52	16	42	37
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22
91	49	91	45	23	68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
80	33	69	45	98	26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
44	10	48	19	49	85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
12	55	07	37	42	11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
63	60	64	93	29	16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82
61	19	69	04	46	26	45	74	77	74	51	92	43	37	29	65	39	45	95	93
15	47	44	52	66	95	27	07	99	53	59	36	78	38	48	82	39	61	01	18
94	55	72	85	73	67	89	75	43	87	54	62	24	44	31	91	19	04	25	92
42	48	11	62	13	97	34	40	87	21	16	86	84	87	67	03	07	11	20	59
23	52	37	83	17	73	20	88	98	37	68	93	59	14	16	26	25	22	96	63
04	49	35	24	94	75	24	63	38	24	45	86	25	10	25	61	96	27	93	35
00	54	99	76	54	64	05	18	81	59	96	11	96	38	96	54	69	28	23	91
35	96	31	53	07	26	89	80	93	54	33	35	13	54	62	77	97	45	00	24
59	80	80	83	91	45	42	72	68	42	83	60	94	97	00	13	02	12	48	92
46	05	88	52	36	01	39	09	22	86	77	28	14	40	77	93	91	08	36	47
32	17	90	05	97	87	37	92	52	41	05	56	70	70	07	86	74	31	71	57
69	23	46	14	06	20	11	74	52	04	15	95	66	00	00	18	74	39	24	23
19	56	54	14	30	01	75	87	53	79	40	41	92	15	85	66	67	43	68	06
45	15	51	49	38	19	47	60	72	46	43	66	79	45	43	59	04	79	00	33
94	86	43	19	94	36	16	81	08	51	34	88	88	15	53	01	54	03	54	56

Таблица 11

Таблица значений функции $\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2$

γ	0,80	0,85	0,90	0,95	0,96	0,97
$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2$	1,64	2,08	2,71	3,84	4,21	4,49
γ	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2$	5,43	6,61	7,9	10,9	12,25	15,2

ISBN 5-7325-0769-8

9 785732 507690

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Черненко Владимир Дмитриевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ

В трех томах

Том 3

Заведующая редакцией *Е. В. Шарова*
Переплет художника *М. Л. Черненко*
Корректор *А. Н. Пятницкая*
Макет *Т. Л. Пивоваровой*
Компьютерный набор и верстка *М. М. Пивоварова, Т. Л. Пивоваровой*

ЛР № 010292 от 18.08.98

Сдано в набор 22.05.03. Подписано в печать 13.08.03.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 30,0. Уч.-изд. л. 29,1. Тираж 3000 экз. Зак. № **2850**.

ФГУП «Издательство “Политехника”».
191023, Санкт-Петербург, Инженерная ул., 6.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Республиканская типография им. П. Ф. Анохина».
185005, г. Петрозаводск, ул. «Правды», 4.