КНИЖКА-ШПАРГАЛКА

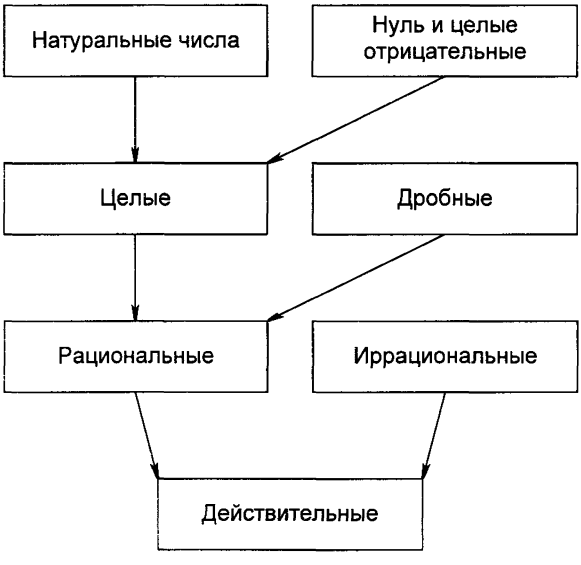
МАТЕМАТИКА

в кармане

АЛГЕБРА

Числа

Развитие понятия числа от натурального до действительного



Натуральные числа

Признаки делимости

Делимость на:	Признак
2	Число оканчивается четной цифрой, т. е. 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр записи числа делится на 3
4	Две последние цифры образуют число, делящееся на 4
5	Оканчивается на 0 или на 5
6	Делится одновременно и на 2, и на 3
8	Три последние цифры образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр записи числа делится на 3
10	Оканчивается на 0

Рациональные числа

Сложение (вычитание) дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$

№	Отношение знаменателей	Сложение	Сумма
1	$n = q$	$\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$	$\frac{m+p}{n}$
2	n и q — взаимно простые числа	$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$	$\frac{mq+pn}{nq}$
3	n кратно q, т. е. $n = aq$	$\frac{m}{aq} + \frac{p}{q}$	$\frac{m+ap}{aq}$
4	НОД$(n;q) = d$, т. е. $n = a \cdot d$ и $q = b \cdot d$	$\frac{m}{ad} + \frac{p}{bd}$	$\frac{mb+ap}{abd}$

Умножение дробей

$$\boxed{\frac{a}{b}} \cdot \boxed{\frac{c}{d}} \rightarrow \boxed{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Деление дробей

$$\boxed{\frac{a}{b}} : \boxed{\frac{c}{d}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}} \cdot \boxed{\frac{d}{c}}$$

$$\boxed{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Пропорции

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a, d — крайние члены
b, c — средние члены

Свойства пропорции:

1. $a \cdot d = b \cdot c$
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$;
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е. $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Модуль

Определение

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Свойства

1) $|a| = |-a|$
2) $|a| \geqslant a$; $|a| \geqslant -a$
3) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
4) $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$
5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

Формулы сокращенного умножения многочленов

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Степень с натуральным показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

- a — основание степени
- n — показатель степени
- $0^n = 0$
- $1^n = 1$

Свойства степени с натуральным показателем

№	Свойство	Пример
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^5 : a^3 = a^2$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^4)^3 = a^{12}$
4	$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

Корень *n*-й степени

Арифметический корень *n*-й степени

Корень *n*-й степени из *a* равен *b*:
$b^n = a$

Арифметический корень *n*-й степени

$\sqrt[n]{a} = b$ 1) $b \geqslant 0$ 2) $b^n = a$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[n]{a^n} = a$

Арифметический квадратный корень

$\sqrt{a} = b$ 1) $b \geqslant 0$ 2) $b^2 = a$

a — подкоренное выражение

n — показатель корня

Свойства арифметических корней

№	Свойство, a ⩾ 0, b ⩾ 0
1	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$
3	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
5	$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}$

Степень с действительным показателем

Степень с действительным показателем

Целый показатель
$a^0 = 1$, $a \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$

Рациональный показатель
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

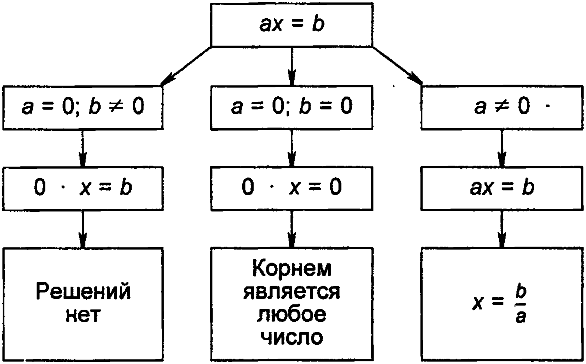
Иррациональный показатель

Уравнения с одной переменной

Степень	Название уравнения	Общий вид
1	Линейное	$ax = b$
2	Квадратное	$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
3	Кубическое	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$

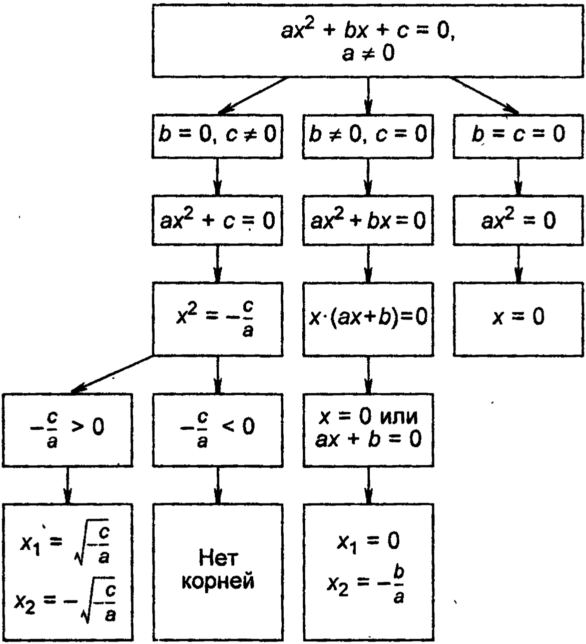
x — переменная; a, b, c, d — некоторые числа.

Решение линейного уравнения



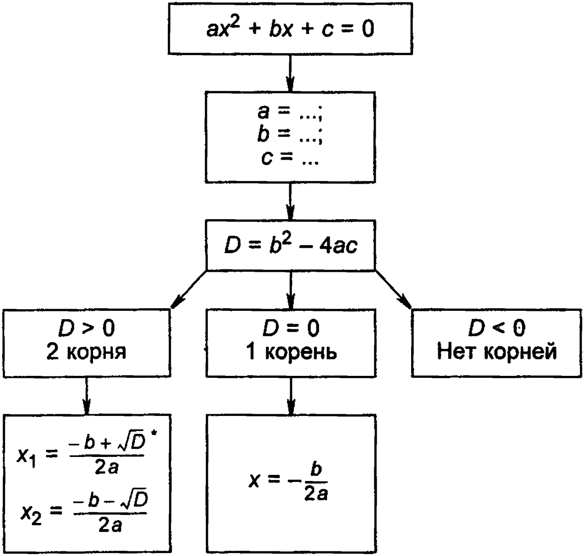
Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$

1. Решение неполного квадратного уравнения



2. Заказ № 20.

2. Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле



* Запись корней x_1 и x_2 в случае, когда $D > 0$, объединяют и записывают так: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Неравенства

Решение: значение переменной, обращающее неравенство в верное

Решить: найти все решения или доказать, что их нет

Равносильные: имеющие одинаковые решения

Неравенство

Можно переносить слагаемые из одной части в другую с противоположным знаком

Можно умножать (делить) обе части на одно и то же положительное число

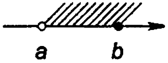
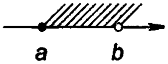
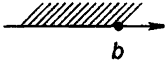
Можно умножать (делить) обе части на одно и то же отрицательное число, поменяв при этом знак неравенства

Название неравенства	Общий вид
Линейное	1) $ax > b$, 2) $ax \geqslant b$, 3) $ax < b$, 4) $ax \leqslant b$
Квадратичное	1) $ax^2 + bx + c > 0$, 2) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, 3) $ax^2 + bx + c < 0$, 4) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

Свойства числовых неравенств

№	Условие	Заключение
1	$a > b$	$b < a$
2	$a > b$ и $b > c$	$a > c$
3	$a > b$, c — любое число	$a + c > b + c$
4	$a > b$ и $c > 0$	$ac > bc$
5	$a > b$ и $c < 0$	$ac < bc$
6	$a > b$ и $c > d$	$a + c > b + d$
7	$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $a > b$ и $c > d$	$ac > bd$
8	$a > b > 0$, n — натуральное число	$a^n > b^n$
9	$a > 0$, $b > 0$, $a > b$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Числовые промежутки

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

Решение линейного неравенства

Вид неравенства	a	Решение	Ответ
$ax + b > 0$	$a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b > 0$	$a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$ax + b \geqslant 0$	$a > 0$	$x \geqslant -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \geqslant 0$	$a < 0$	$x \leqslant -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$
$ax + b < 0$	$a > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$ax + b < 0$	$a < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \leqslant 0$	$a > 0$	$x \leqslant -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$
$ax + b \leqslant 0$	$a < 0$	$x \geqslant -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

Решение неравенств методом интервалов

$f(x) > 0$; $f(x) \geqslant 0$
$f(x) < 0$; $f(x) \leqslant 0$

Пример

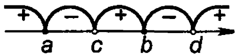
$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

Находим нули функции, т. е. точки, в которых $f(x) = 0$; $x = a$; $x = b$

Находим точки, в которых функция $f(x)$ не определена; $x \neq c$; $x \neq d$

Находим промежутки знакопостоянства, например

$f(x) \geqslant 0$; $f(x) \leqslant 0$



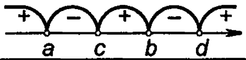
$f(x) \geqslant 0$

Ответ: $(-\infty; a] \cup (c; b] \cup (d; \infty)$

$f(x) \leqslant 0$

Ответ: $[a; c) \cup [b; d)$

$f(x) > 0$; $f(x) < 0$



$f(x) > 0$

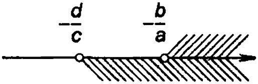
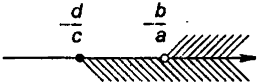
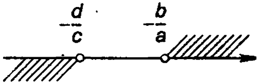
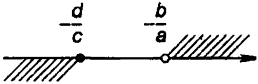
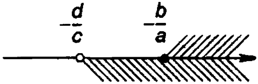
Ответ: $(-\infty; a) \cup (c; b) \cup (d; \infty)$

$f(x) < 0$

Ответ: $(a; c) \cup (b; d)$

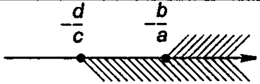
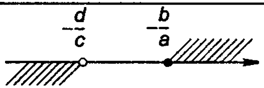
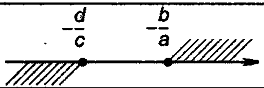
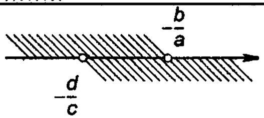
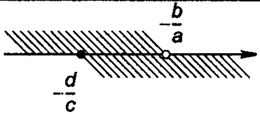
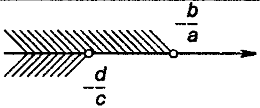
Решение системы линейных неравенств с одной переменной вида

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}, \text{где } -\frac{b}{a} > -\frac{d}{c} \ (a > 0;\ c > 0)$$

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \geqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \leqslant 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geqslant 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a};\ \infty\right)$

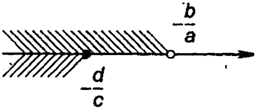
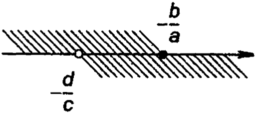
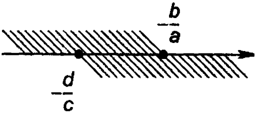
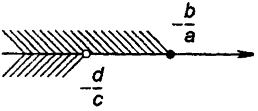
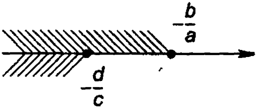
См. продолжение

Продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax+b \geqslant 0 \\ cx+d \geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a};\infty\right)$
$\begin{cases} ax+b \geqslant 0 \\ cx+d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax+b \geqslant 0 \\ cx+d \leqslant 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c};-\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d \geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c};-\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d < 0 \end{cases}$		$\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$

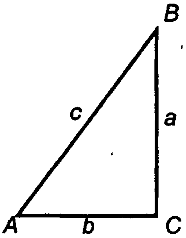
См. продолжение

Продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d>0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d<0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$

Характеристики	Последовательность	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии) $a_{n+1} = a_n + d$	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии) $b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность или знаменатель)	$S_n = \frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b^2{}_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	—	$S = \frac{b_1}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$

Тригонометрические функции острого угла



Функция	Угол	
	A	B
sin (синус)	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
cos (косинус)	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
tg (тангенс)	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
ctg (котангенс)	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$
sec (секанс)	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$
cosec (косеканс)	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$

Сравнительная таблица градусной и радианной мер некоторых углов

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
$0°$	0	$180°$	π
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$210°$	$\frac{7\pi}{6}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$225°$	$\frac{5\pi}{4}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$240°$	$\frac{4\pi}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$300°$	$\frac{5\pi}{3}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$315°$	$\frac{7\pi}{4}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$330°$	$\frac{11\pi}{6}$
		$360°$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент α / Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	–
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	–	–2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	–1
cosec	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	–

См. продолжение

Аргумент α / Функция	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–
sec	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cosec	–	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	–

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$$
$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формулы сложения и вычитания

Функция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$	$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
cos	$\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$	$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
tg	$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$
ctg	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$
sec	$\frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$	$\frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$
cosec	$\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$	$\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Формулы половинных, двойных и тройных углов (также sin 4α; cos 4α)

	$\frac{\alpha}{2}$	2α	3α	4α
sin	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$2\sin\alpha \times \times \cos\alpha$	$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$4\cos^3\alpha \times \times \sin\alpha - - 4\cos\alpha \times \times \sin^3\alpha$
cos	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\cos^2\alpha - - \sin^2\alpha$	$4\cos^3\alpha - - 3\cos\alpha$	$\cos^4\alpha - - 6\cos^2\alpha \times \times \sin^2\alpha + + \sin^4\alpha$
tg	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$	$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$	–
ctg	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$	$\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$	–

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin\alpha + \sin\beta$	$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta$	$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta$	$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta$	$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \sin\alpha$	$\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$
$\cos\alpha - \sin\alpha$	$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$
$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta$	$\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta$	$\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta$	$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

См. продолжение

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta$	$-\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$	$2\operatorname{cosec}2\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$	$-2\operatorname{ctg}2\alpha$

Обратные тригонометрические функции

Функция	Обратная функция	α	$\sin\alpha$
sin	$\arcsin a = \alpha$	$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin\alpha = a$
cos	$\arccos a = \alpha$	$\alpha \in [0; \pi]$	$\cos\alpha = a$
tg	$\operatorname{arctg} a = \alpha$	$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{tg}\alpha = a$
ctg	$\operatorname{arcctg} a = \alpha$	$\alpha \in (0; \pi)$	$\operatorname{ctg}\alpha = a$

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$\lvert a \rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \times$ $\times \arcsin a + \pi k$, $k \in z$	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$
			$\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} +$ $+ 2\pi k$, $k \in z$
			$\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2}$ $+ + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	$\lvert a \rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a +$ $+ 2\pi n$, $n \in z$	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$
			$\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$
			$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$\operatorname{tg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in z$	—
$\operatorname{ctg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in z$	—

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$; $\cos x = a$

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi n$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$k, n \in Z$

Решение простейших тригонометрических уравнений вида tg $x = a$; ctg $x = a$

a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$

$k, n \in z$

Связь показательной и логарифмической функций

Функция	x	y
$y = a^x$	Показатель степени	Степень
$y = \log_a x$ ($x = a^y$)	Степень	Показатель степени

Правила логарифмирования и потенцирования

№	Правила логарифмирования	Правила потенцирования
1	$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$	$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$
2	$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$	$\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \frac{N_1}{N_2}$
3	$\log_a N^k = k \cdot \log_a N$	$k \cdot \log_a N = \log_a N^k$
4	$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N$	$\frac{1}{k} \cdot \log_a N = \log_a \sqrt[k]{N}$

Производная $f'(x)$

Определение.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x_0 \Delta x) - f(x_0)$$

Геометрический смысл.

$y = kx + b$ — касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0. $f'(x_0) = k$

Физический смысл.

1) $S'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$. S — расстояние, v — скорость, a — ускорение, t — время. 2) Мощность есть производная работы по времени

Правила вычисления производных.

1) $(u + v)' = u' + v'$. 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

$= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, где $v \neq 0$

Производная сложной функции.

$h(x) = g\left(f(x)\right) \qquad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Возрастание и убывание функции.

Если $f'(x) > 0$ на J, то $f(x)$ возрастает на J.
Если $f'(x) < 0$ на J, то $f(x)$ убывает на J

Точки максимума и минимума.

Если x_0 — точки экстремума, то $f'(x_0) = 0$

1) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума. 2) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума

Таблица производных

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C — постоянная	0
2	$kx + b$	k
3	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
4	e^x	e^x
5	a^x	$a^x \cdot \ln a$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

См. продолжение

№	$f(x)$	$f'(x)$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Первообразная

Определение. $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке J, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in J$

Основное свойство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке J, то общий вид всех первообразных для $f(x)$: $F(x) + C$, где C — const

Графики функций $F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy

1. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.
2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$.
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k и b — постоянные, где $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первообразная для $f(kx + b)$

Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

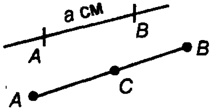
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\, x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\, x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \mathrm{arctg}\, x$

ГЕОМЕТРИЯ

Отрезок



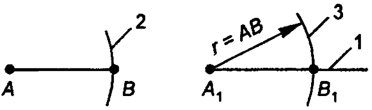
$AB = a$ см

$AC + CB = AB$

Дано: отрезок AB

Построить: A_1B_1, $A_1B_1 = AB$

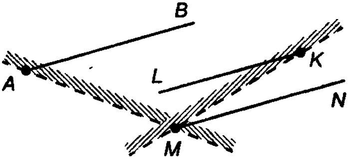
Построение



Луч

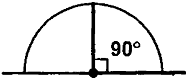
Сонаправленные лучи — AB и MN

Противоположно направленные лучи — MN и KL

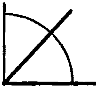


Угол

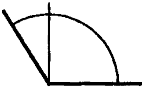
Развернутый



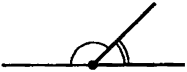
Прямой



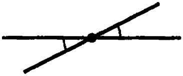
Острый



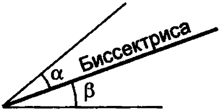
Тупой



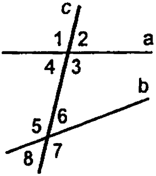
Смежные



Вертикальные



$\angle\alpha = \angle\beta$



С — секущая

Внутренние накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6

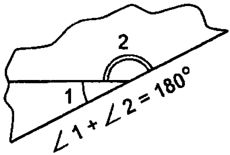
Односторонние (прилежащие) углы — 4 и 5, 3 и 6

Соответственные углы — 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7

Внешние накрест лежащие углы — 1 и 7, 2 и 8

Свойства смежных и вертикальных углов

Теорема о смежных углах

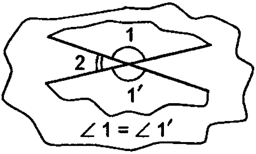


Доказательство:
Так как $\angle 1 + \angle 2$ — развернутый угол, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

Теорема о вертикальных углах

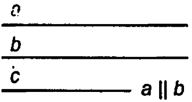
Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 + \angle 2 = 180° \\ \angle 1' + \angle 2 = 180°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 1 = \angle 1'$$

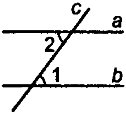
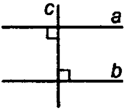
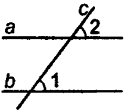
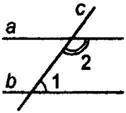


Параллельные прямые

Определение
a и *b* не пересекаются
$a \parallel b,\ b \parallel c \rightarrow a \parallel c$



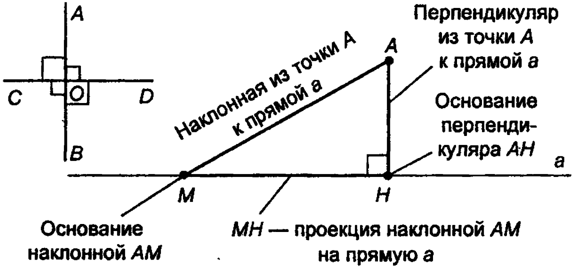
Признаки параллельности прямых (прямые и обратные теоремы)

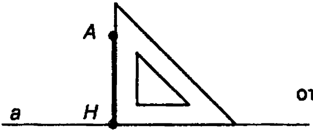
№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
1	Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$ Следствие: Если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$ Следствие: Если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$
2	Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$
3	Если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

Перпендикулярные прямые

Определения

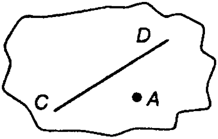
$AB \perp CD$: $\angle AOD = \angle AOC = \angle COB = \angle DOB = 90^\circ$



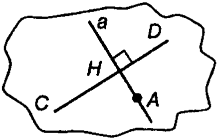


AH — расстояние от точки *A* до прямой *a*

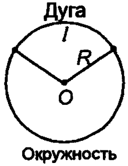
Свойство

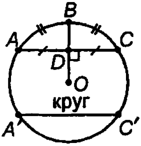


Существует единственная прямая *a*



Окружность, круг





$C = 2\pi R = \pi d$,
где $\pi \approx 3{,}14$

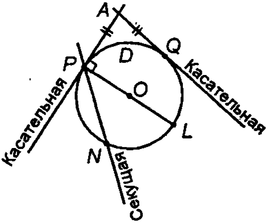
$1° = \dfrac{\pi}{180°}$

1 рад $= \dfrac{180°}{\pi}$

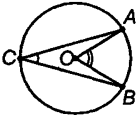
α — радианная мера дуги
a — градусная мера дуги

$l = \dfrac{\pi R a}{180°} = R\alpha$

$AC = A'C'$
$\cup AC = \cup A'C'$
$AD = DC$
$\cup AB = \cup BC$



$AP = AQ$
$\angle PAQ$ — описанный
$\angle PAQ = \frac{1}{2}(\cup PLQ - \cup PDQ)$

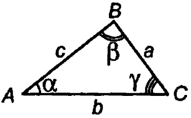


$\angle AOB$ — центральный
$\angle ACB$ — вписанный
$\angle AOB = \alpha°$; $\cup AB = \alpha°$
$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$

$1° = \frac{1}{360}$ часть всей окружности

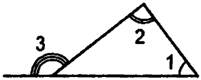
Треугольник

Общие сведения

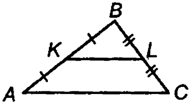


Три стороны, три угла — элементы треугольника

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

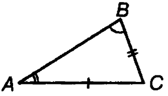


$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$

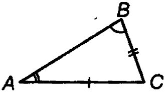


$KL \parallel AC,\ KL = \frac{1}{2} AC$

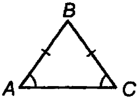
Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников



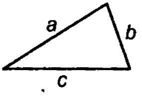
Если $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$



Если $\angle B > \angle A$, то $AC > BC$



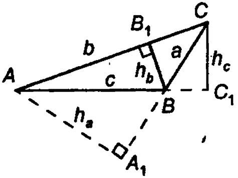
Если $\angle A = \angle C$, то $BC = BA$



$a < b + c$
$b < a + c$
$c < b + a$

Высота, медиана, биссектриса

Высота h:

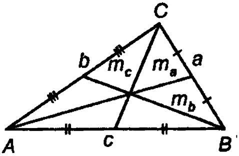


$h_a = \dfrac{2S_{\text{треуг}}}{a}$, где $S_{\text{треуг}}$ — площадь $\Delta\, ABC$

$h_a : h_b : h_c = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c} =$

$= bc : ac : ab$

Медиана m:



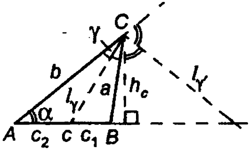
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Биссектриса l:



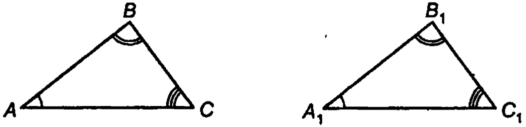
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}$$

$$l_\alpha = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}$$

$$l_{\gamma'} = \frac{2}{|b - c|} \times \sqrt{bc(p - c)(p - b)},$$

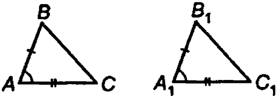
где $p = \dfrac{a + b + c}{2}$, $\angle (h_c; l_\gamma) = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, $\angle (h_c; l_{\gamma'}) = 90^\circ - \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

Равенство треугольников



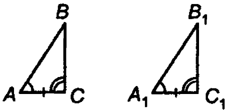
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Первый признак равенства треугольников



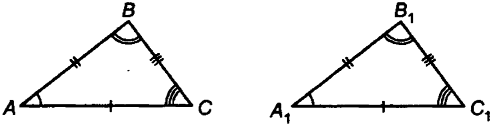
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Второй признак равенства треугольников



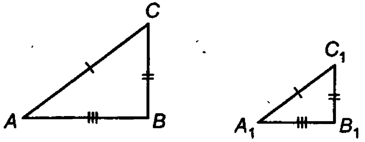
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Третий признак равенства треугольников



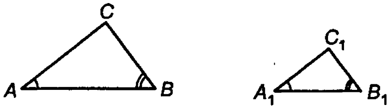
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Подобие треугольников



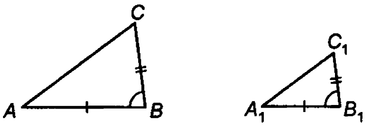
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1$$

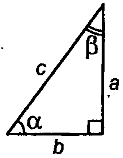
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \quad \angle B = \angle B_1$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Основные тригонометрические соотношения



Синус:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

Косинус:

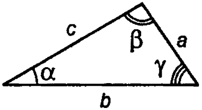
$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

Теорема косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности

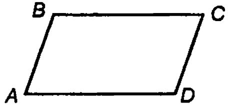
Теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

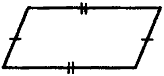
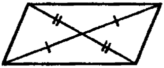
$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

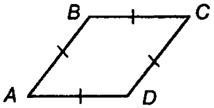
Параллелограмм



$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1. В параллелограмме противоположные углы равны 	1. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм  Если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм
2. В параллелограмме противоположные стороны равны 	2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам 	3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм

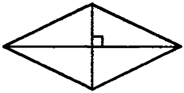
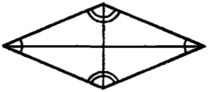
Ромб



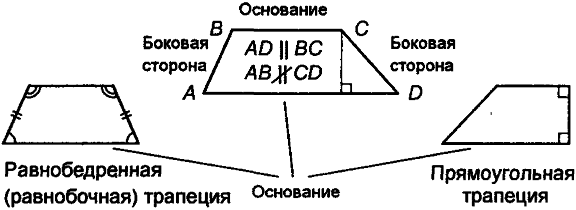
$ABCD$ — ромб

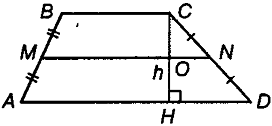
$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

$AB = CD = BC = AD$

Свойства ромба	Признаки ромба
1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом	1. Если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то этот параллелограмм — ромб
	
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов	2. Если диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов, то этот параллелограмм — ромб
	
Все свойства параллелограмма верны для ромба	

Трапеция





Средняя линия трапеции

$$MN \parallel BC; \; MN \parallel AD$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}, \quad CO = OH$$

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = MN \cdot h$$

$$AC \cdot BD = AC \cdot CD + AD \cdot CB$$

$$\angle A + \angle C = 180°; \; \angle B + \angle D = 180°$$

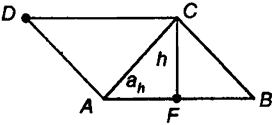
Площадь треугольника

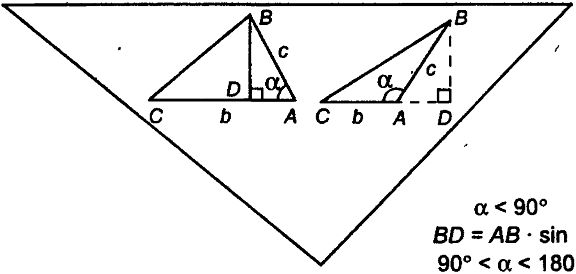
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$





$\alpha < 90°$

$BD = AB \cdot \sin$

$90° < \alpha < 180$

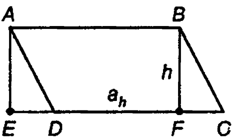
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

$$BD = AB \cdot \sin(180° - \alpha) = AB \cdot \sin \alpha$$

$$h = c \cdot \sin \angle b, c$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} b_h \cdot h \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

Площадь параллелограмма



$S = a_h \cdot h$

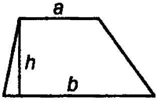
Если $ABCD$ — прямоугольник, то $S_{ABCD} = a_h \cdot h$

Если $ABCD$ — не прямоугольник, то пусть $\angle DAB < 90°$

$S_{ABCE} = S_{\Delta AED} + S_{ABCD}$
$S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$

$S_{\Delta AED} = S_{\Delta BFC}$
$S_{ABCD} = S_{ABFE}$
$S_{ABCD} = a_h \cdot h$

Площадь трапеции



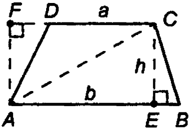
Теорема: $S_{\text{трап}} = \dfrac{a + b}{2} \cdot h$

Доказательство:

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$, поскольку

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AF$,

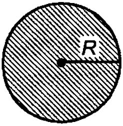
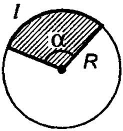


то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot \underbrace{CE + DC \cdot AF}_{h}) =$

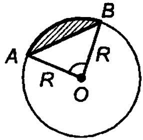
$= \frac{1}{2} h(AB + DC)$

$S_{ABCD} = \dfrac{a + b}{2} h$

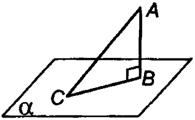
Площади круга, сектора, сегмента

Формула, рисунок	Примеры
 $S_{кр} = \pi R^2$ $S_{кр} = \frac{\pi d^2}{4}$	$R = 2$ см $S \approx 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$ (см^2) $d = 4$ см $S \approx 3{,}14 \cdot \frac{4^2}{4} = 12{,}56$ (см^2)
 $S_{сект} = \frac{Rl}{2} =$ $= R^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360°}$	$R = 2$ см; $l = 3$ см; $S = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ (см^2) $R = 4$ см; $\alpha = 2$ рад; $S = \frac{4^2 \cdot 2}{2} = 16$ (см^2) $R = 3$ см; $\alpha = 120°$; $S = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = 9{,}42$ (см^2)

См. продолжение

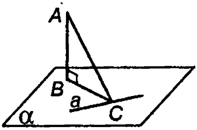
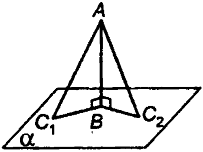
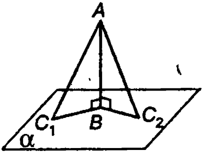
Формула, рисунок	Примеры
 $S_{сегм} = S_{сект} - S_{\Delta AOB}$ $S_{сегм} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$	$R = 2$ см; $\angle AOB = 60°$ $S_{сект} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3}$ (см^2) $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 60° = \sqrt{3}$ (см^2) $S_{сегм} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\right)$ см^2 $R = 2$ см; $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ $S_{сегм} = \frac{1}{2} \cdot 2^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$ $= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ см^2

Наклонная в пространстве

 	$AB \perp \alpha$; AC — наклонная; C — основание наклонной; CB — проекция наклонной	$AC > AB$

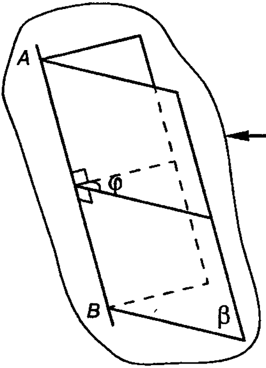
См. продолжение

Продолжение

	$AB \perp \alpha$; AC — наклонная; C — основание наклонной; BC—проекция; $a \subset \alpha$	Теорема о трех перпендикулярах: «Если $a \perp BC$, следовательно, $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, следовательно, $a \perp BC$»
	$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных.	Если $AC_1 = AC_2$, то $BC_1 = BC_2$. Если $BC_1 = BC_2$, то $AC_1 = AC_2$
	$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных	Если $AC_1 > AC_2$, то $BC_1 > BC_2$. Если $BC_1 > BC_2$, то $AC_1 > AC_2$

Двугранный угол

Двугранный угол с ребром *AB* и гранями α и β; плоскость φ пересекает ребро *AB* под прямым углом, а плоскости α и β вырезают на ней линейный угол φ данного двугранного угла

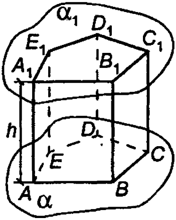


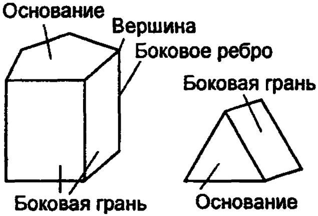
$\angle(\alpha, \beta) = \angle\varphi$

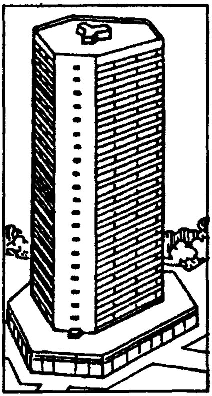
$0° < \angle\varphi < 180°$

Фигура, образованная полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей прямой

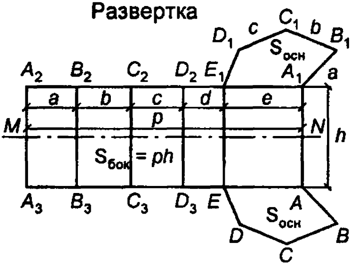
Прямая призма







Развертка

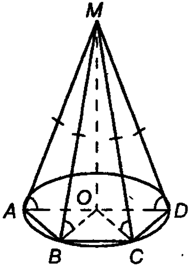
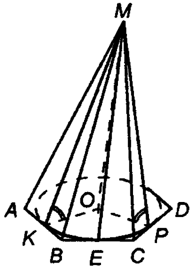


Площадь поверхности

$S_{пр} = S_{бок} + 2S_{осн}$

Объем $V_{пр} = Sh$

Пирамиды

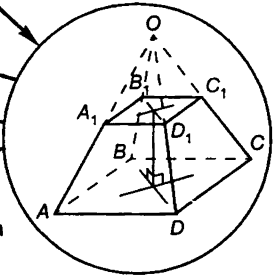
Изображение	Основные соотношения
	Если $MA = MB =$ $= MC = \ldots$, то $MO \perp ABC$. Если $\angle MAO = \angle MBO =$ $= \angle MDO = \angle MCO = \ldots$, то O — центр описанной окружности
	Если $\angle MKO = \angle MEO =$ $= \angle MPO = \ldots$, то O — центр вписанной окружности

Усеченная пирамида

Построение

- $OABCD$ — пирамида $(ABCD) \parallel (A_1B_1C_1D_1)$:
- $OA_1B_1C_1D_1$ — пирамида

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида



$H_o^k(ABCD) = A_1B_1C_1D_1$

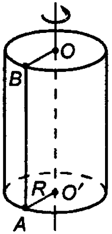
Боковые грани — трапеции

Если $OABCD$ — правильная пирамида, то $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида

- $S_{\text{полн пов}} ; S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_{\text{бок}}$
- $S_{\text{бок. пов}} = \frac{1}{2}(P + p)h$, где P, p — периметры оснований
- $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$
- $S_1 = S_{ABCD}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$
- В правильной усеченной пирамиде грани — равные равнобедренные трапеции
- Высота трапеции боковой грани — апофема правильной усеченной пирамиды (h)

Цилиндр

Цилиндр, получаемый вращением прямоугольника $OO'AB$ вокруг прямой, содержащей сторону OO', перпендикулярные стороны $O'A$ и OB описывают основания цилиндра, а отрезок AB,



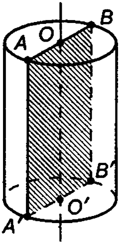
параллельный OO', — боковую поверхность его. R — радиус основания цилиндра, h — его высота, равная образующей

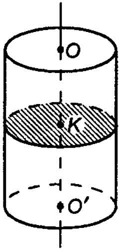
Прямоугольник $AA'B'B$ — осевое сечение цилиндра с осью OO'

$S_{бок} = 2\pi Rh$

$S_{осн} = \pi R^2$

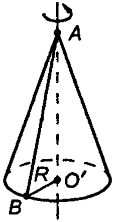
$V = \pi R^2 h$



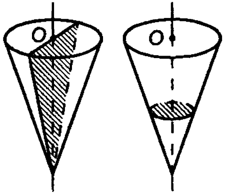


Круг К — поперечное сечение цилиндра с осью OO′

Конус



Конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника AOB вокруг прямой, содержащей катет AO, другой катет OB описывает основание конуса, а гипотенуза AB — его боковую поверхность, R — радиус основания конуса, h — высота его, l — образующая



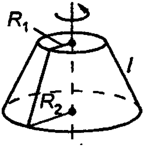
Осевое сечение конуса с осью O — равнобедренный треугольник

$S_{бок} = \pi Rl$

$S_{осн} = \pi R^2$

$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Усеченный конус, общий вид

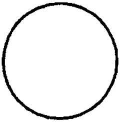
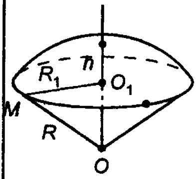
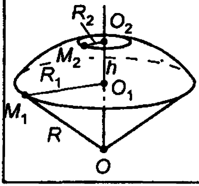


Усеченный конус, R_1 и R_2 — радиусы оснований, h — высота, l — отрезок образующей, O — ось

$S_{бок} = \pi l(R_1 + R_2)$

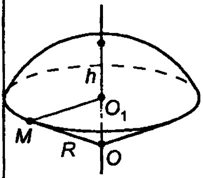
$V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$

Объемы и площади поверхностей шара и его частей

	$S_{\text{пов шара}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{шара}} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$
	$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(R_1^2 + h^2)$ $S = \pi(2Rh + R_1^2) = \pi(h^2 + 2R_1^2)$ $R_1 = \sqrt{h(2R - h)}$ $V_{\text{сегм}} = \pi\left(R - \dfrac{h}{3}\right)h^2 =$ $= \dfrac{1}{6}\pi h(3R_1^2 + h^2) = \dfrac{1}{6}\pi h^2(3D + 2h)$
	h_1 и h_2 — высоты удаленных сегментов так, что $2R - h_1 - h_2 = h$

См. продолжение

Продолжение



$$V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R(h_1^2 + h_2^2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 + h_2^3)$$

$$V_{\text{слоя}} = \frac{1}{6}\pi h(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$

$$S_{\text{пояс}} = 2\pi Rh = \pi Dh$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6}D^2 h$$

$$S_{\text{пов. сект}} = \pi R(2h + O_1M)$$

Содержание

В помощь учебному процессу

Справочные материалы

МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ

Ответственный редактор *О. В. Стукалова*
Макет *И. А. Изергин*
Корректор *Л. К. Корнилова*

ISBN 5-17-009325-X (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-8195-0176-1 (ООО «АСТОЛ»)

Подписано в печать 09.12.2003. Формат 84x108 1/64. Гарнитура Гельветика Дейл. Усл. печ. л. 1,68. Тираж 15000 экз. Заказ № 20
Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 – литература учебная
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№77.99.02.953.Д.008286.12.02 от 27.12.02

ООО «АСТОЛ»
129085, Москва, пр. Ольминского, д. 3а, стр. 3

ООО «Издательство АСТ»
667000, Республика Тыва, г. Кызыл,
ул. Кочетова, д. 28
www.ast.ru
E-mail: astpub@aha.ru

Незаменимая помощь школьникам!

«МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ»

Весь школьный курс математики наглядно представлен в виде простых и четких таблиц и схем, которые облегчают нахождение и запоминание материала. Эта книжка станет незаменимым помощником на уроках, а также при подготовке к зачетам и экзаменам.

ISBN 5-17-009325-X

9 785170 093250