Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. К. Белый, Ю. А. Дорофеева

Математика не для ЕГЭ

Алгебраические уравнения

Учебное пособие для абитуриентов
и студентов первого курса

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2015

УДК 512.1
ББК 22.14
Б439

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Петрозаводского государственного университета

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор каф. геометрии и топологии ПетрГУ
С. С. Платонов;
д-р экон. наук, зав. отделом моделирования и прогнозирования регионального развития института экономики КарНЦ РАН
П. В. Дружинин

Белый, Евгений Константинович.
Б439 Алгебраические уравнения : учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый, Ю. А. Дорофеева ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федеральное бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2015. – 240 с. – (Математика не для ЕГЭ).
ISBN 978-58021-2604-2

Учебное пособие ориентировано на широкий круг читателей: абитуриентов, студентов первого курса, а также учителей математики средней школы.

ISBN 978-58021-2604-2

УДК 512.1
ББК 22.14

Содержание

Предисловие **5**

Математическая символика **9**

Введение **12**

Глава 1. Линейные уравнения **19**

§ 1.1. Уравнения с одной неизвестной 19

§ 1.2. Уравнения с двумя неизвестными 20

§ 1.3. Системы двух уравнений 28

§ 1.4. Системы трех и более уравнений 35

§ 1.5. Неравенства 45

Глава 2. Уравнения второго порядка **55**

§ 2.1. Основные алгебраические тождества 55

§ 2.2. Квадратный трехчлен 59

§ 2.3. Уравнения с двумя неизвестными 80

§ 2.4. Симметричные формы 84

§ 2.5. Однородные многочлены 94

§ 2.6. Уравнения с тремя неизвестными 99

Глава 3. Уравнения старшего порядка **102**

§ 3.1. Операции над многочленами 102

§ 3.2. Разложение многочленов на множители . . . 107

§ 3.3. Неравенства 125

§ 3.4. Комплексные корни многочлена 132
§ 3.5. Формула Кардано 149
§ 3.6. Формула Феррари 161
§ 3.7. Границы корней многочлена 164
§ 3.8. Интерполяционный многочлен Лагранжа . . 168
§ 3.9. Многочлены в других задачах 173

Задачи **188**

Ответы **207**

Древнегреческий алфавит **226**

Биографические справки **227**

Список литературы **237**

Учитель может только указать путь.
Пройти путь каждый должен сам.
Восточная мудрость

Предисловие

$\boxed{\Rightarrow 9}$ *Дорогой читатель! Мы открываем экспериментальную серию книг «Математика не для ЕГЭ». Основное назначение серии – помочь выпускнику* ***систематизировать, творчески усвоить программу средней школы и адаптировать будущего студента к программе высшей школы****. Поэтому книги будут полезны и первокурсникам, только приступившим к изучению высшей математики. Не в последнюю очередь мы надеемся, что предлагаемые учебные пособия окажутся полезными учителям математики, особенно преподающим в физико-математических классах. В процессе работы над книгой авторы опирались на личный опыт подготовки абитуриентов к вступительным экзаменам и опыт преподавания на различных факультетах ПетрГУ, который показывает, что многим студентам, вплоть до старших курсов, не дают успешно учиться пробелы в знаниях по элементарной математике. А это, как зубная боль: пока серьезно не возьмешься за лечение, будет мешать.*

Само название серии говорит о том, что мы не считаем главной целью обучения сдачу ЕГЭ. Любой экзамен всего лишь *один из методов контроля качества усвоенного материала, и, к сожалению, его успешная сдача далеко не всегда означает готовность подняться на следующую ступень образования.*

Сейчас имеется довольно широкий выбор литературы для поступающих в вузы, и может возникнуть вопрос: зачем нужна еще одна книга для абитуриентов? Здесь можно заметить, что ***мы преследуем более дальние цели, нежели только поступление в вуз****. Книги этой серии не заменят школьные учебники и тем более уроки, в них нет той последовательности изложения материала, которая присуща методистам и которая рассчитана на годы обучения, но они помогут на некоторые вещи взглянуть под другим углом зрения. Авторы не пытались включить в пособие как можно больше задач, поскольку хороших задачников с разобранными примерами решений более чем достаточно. Разумеется, это книги под редакцией М. И. Сканави, учебное пособие для студентов педагогических институтов В. Н. Литвиненко и А. Г. Мордкович и пр. Для всех, кто интересуется задачами с параметрами, можно рекомендовать замечательную книгу В. П. Моденова. В конце пособия (с. 237) вы найдете список литературы, где представлены не только книги, содержание которых «вписывается» в школьную программу, но и вузовские, в которых пройденные в школе темы получают дальнейшее развитие. Это, прежде всего, учебники и задачники по аналитической геометрии и алгебре. Для* *будущих математиков и физиков можно рекомендовать все выпуски физико-математического журнала «Квант» начиная с 1970 года, где можно найти не только разбор методов решения задач по самым разным разделам математики и физики, но и множество статей, написанных представителями этих наук. Если вы серьезно настроены на учебу,* ***не стоит останавливаться на одном учебном пособии****. Разные авторы по-разному раскрывают одни и те же темы, и разные читатели по-разному воспринимают один и тот же текст. К одной цели можно идти различными дорогами. Приобретение нескольких книг поможет сэкономить на репетиторах и между делом развить навык самостоятельной работы, который в жизни очень пригодится.*

На протяжении столетий в школьной программе формировалась, фиксировалась система наиболее важных сведений, необходимых для начала самостоятельной жизни, – фундамент востребованных в обществе профессий. Вопрос «как учиться?» непростой. Сейчас главная беда значительной части первокурсников заключается даже не в слабой подготовке по математике, а именно в неумении и нежелании учиться. А ***учится человек для себя****. Потому что ему интересно учиться. Потому что он хочет продолжить образование в лучших вузах страны и даже мира. Потому что он хочет* ***стать специалистом, хозяином жизни****, быть востребованным в обществе и государстве. Ведь все привычные нам* *и кажущиеся незаменимыми в повседневной жизни замечательные технические устройства, сооружения – результат применения достижений науки, в том числе сложного математического аппарата. В современном обществе наука признана важнейшим фактором производства. Впрочем, и раньше многие выдающиеся государственные деятели понимали это. Так, Петр I и Наполеон не только знали математику на уровне квалифицированного инженера, но и уделяли большое внимание вопросам математического образования, поскольку математика является базовой дисциплиной для всех точных наук, а заботу о процветании наук они считали делом государственным.*

Авторы надеются, что «Математика не для ЕГЭ» поможет будущим специалистам усовершенствовать свою математическую подготовку, а у кого-то пробудит интерес к математике. Замечания и предложения вы можете направлять по адресу: **belyi@petrsu.ru***. Хотелось бы обратить внимание на тот факт, что* ***инструмент, которым вы научитесь пользоваться сегодня, будет вашим верным другом на протяжении всей жизни****. И если вы все-таки решили учиться, желаем запастись терпением. Пусть в этом нелегком деле вам сопутствует удача!*

Евгений Белый

Июль 2015

Математическая символика

$\boxed{5 \Leftrightarrow 12}$

1. $\varnothing$ – пустое множество.

2. $\{3\}$ – множество, состоящее только из числа 3.

3. $\{1, 2, 5\}$ – множество, состоящее из чисел $1, 2$ и 5.

4. $max\{a, b, c, d, e\}$ – максимальное значение из перечисленных a, b, c, d, e.

5. $min\{a, b, c, d, e\}$ – минимальное значение из перечисленных a, b, c, d, e.

6. $(a; b)$ – открытый интервал вещественных чисел, т. е. все числа от a до b, за исключением границ.

7. $[a; b]$ – замкнутый интервал вещественных чисел, т. е. все числа от a до b, включая границы.

8. $a \in A$ – a является элементом множества A.

9. $A \subset B$ – A является подмножеством множества B.

10. $A \cup B$ – объединение множеств A и B.

11. $A \cap B$ – пересечение множеств A и B.

12. $\overline{A}$ – дополнение множества A.

13. (x, y) – упорядоченная пара чисел x и y. Интерпретируется так же, как точка плоскости с соответствующими координатами.

14. (x, y, z) – упорядоченная тройка чисел x, y и z или точка в трехмерном пространстве.

15. (a_x, a_y) – вектор на плоскости с координатами a_x и a_y.

16. $\{(x, y)|2x+y = 1\}$ – множество пар $(x; y)$, для которых выполняется условие $2x + y = 1$.

17. $\Re = (-\infty; +\infty)$ – множество вещественных чисел. Поскольку каллиграфы сейчас стали большой редкостью, в конспектах и на доске этот символ обычно изображают как R с двойной вертикальной чертой.

18. $x \in \Re$ – x является вещественным числом.

19. $\{(x, 2)\}$, где $x \in \Re$ – множество всех пар (x, y), в которых x – произвольное вещественное число, а $y = 2$.

20. $\{(x, 2)|x \in \Re\}$ – то же, что и $\{(x, 2)\}$, где $x \in \Re$.

21. $(\Re, 2)$ – то же, что и $\{(x, 2)|x \in \Re\}$.

22. $\{(x, y)\}$, где $x, y \in \Re$ – множество всех пар вещественных чисел или всех точек плоскости.

23. $(\Re, \Re)$ – то же, что и $\{(x, y)\}$, где $x, y \in \Re$.

24. $P_n(x)$ – некоторый многочлен степени n от переменной x. Для этой цели также в книге иногда используются обозначения: $D_n(x)$, $R_n(x)$ или $Q_n(x)$.

25. $L(x)$ – некоторый линейный член, т. е. выражение вида $ax + b$, где a и b – константы.

26. & – логическое «И».

27. $\vee$ – логическое «ИЛИ».

28. $(a \neq 2)\&(a \neq 3)$ – истинны одновременно два утверждения: $(a \neq 2)$ и $(a \neq 3)$.

29. $(a \neq 2) \vee (a \neq 3)$ – истинно утверждение $(a \neq 2)$, или $(a \neq 3)$ или $(a \neq 2)\&(a \neq 3)$.

30. $\forall\ x$ – любое x.

31. $\exists\ x$ – существует x.

Введение

$\boxed{9 \Leftrightarrow 19}$ Как следует из названия книги, нам предстоит заняться поиском неизвестных. Поиск «неизвестных» – удел не только математиков. Ежедневно этим делом занимаются люди, профессии которых не связаны с точными науками. Так, врач, опираясь на результаты осмотров, обследований и анализов, пытается установить болезнь; сыщик на основании порой несвязных показаний очевидцев ищет преступника; археолог по найденым артефактам изучает быт давно исчезнувших цивилизаций. Все перечисленные выше ситуации объединяет то обстоятельство, что нельзя непосредственно увидеть, измерить интересующий нас объект – в нашем распоряжении имеется лишь ряд фактов, зафиксированных в утверждениях о нем, и каждое утверждение сужает круг поиска. Как когда-то заметил Платон, «мы видим только тени вещей». И по этим теням нам надо воспроизвести объект. Пусть, например, фирма N ищет сотрудника с высшим экономическим образованием не старше 40 лет, владеющего английским языком и имеющего навыки работы на персональном компьютере. Значит, фирма ищет некоторого гражданина X, для которого истинны утверждения:

$$\begin{cases} X \text{имеет высшее экономическое образование;} \\ X \text{не старше 40 лет;} \\ X \text{владеет английским языком;} \\ X \text{имеет навыки работы на персональном компьюторе.} \end{cases}$$

Фигурная скобка означает, что все указанные выше четыре утверждения должны быть истинными одновременно, то есть между утверждениями можно поставить «логическое И». Если бы в объявлении было написано: «Требуются слесари, электрики и сварщики», утверждения следовало поместить в квадратную скобку:

$$\left[\begin{array}{c} \text{X слесарь;} \\ \text{X электрик;} \\ \text{X сварщик.} \end{array}\right.$$

В данном случае квадратная скобка говорит о том, что для кандидата на рабочее место должно быть выполнено хотя бы одно из перечисленных условий, между утверждениями подразумевается «логическое ИЛИ», несколько отличающееся от того «ИЛИ», которое мы часто используем в быту. В быту, говоря «А ИЛИ Б», мы можем подразумевать «либо А, либо Б». «Логическое ИЛИ» всегда означает «либо А, либо Б, либо А и Б одновременно». В нашем случае допускается, что слесарь одновременно может быть и электриком, и сварщиком.

Любое уравнение или неравенство с одной или несколькими неизвестными по сути является утверждением о равенстве или соответственно неравенстве двух выражений, и его решениями будут те наборы неизвестных, при которых утверждение истинно. Набор таких утверждений, заключенный в фигурную (квадратную) скобку, называют **системой уравнений и (или) неравенств**. Отдельное уравнение или неравенство также можно рассматривать как частный случай системы, состоящей из одного утверждения. Две системы называют **эвивалентными** или **равносильными**, если множества их решений совпадают. В таком случае уравнения $e^{x-1} = cos(x-1)$, $log_2 x = 0$ и $(x-1)^2 = 0$ эквивалентны. Хорошей физической моделью уравнения являются весы, на одной чаше которых стоит груз неизвестного веса, а на другой – гири. Единственный недостаток модели – отсутствие гирь и грузов с отрицательным весом.

Алгебраическим уравнением (неравенством) называют уравнение (неравенство), в левой части которого находится многочлен степени $n \geq 0$, а в правой – ноль. **Многочлен** или **полином** можно рассматривать как сумму **одночленов** или **мономов**, каждый из которых представляет собой произведение с числовым коэффициентом нескольких переменных, возведенных в целые неотрицательные степени. **Степенью**, или **порядком**, монома называют сумму степеней входящих в него переменных. Степень многочлена – наибольшая степень входящего в него монома. В частности, многочленом, или полиномом, степени n от одной переменной x называется выражение вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

При этом a_0x^n называют старшим членом, соответственно a_0 – старшим коэффициентом многочлена, а a_n – свободным членом. Коэффициенты многочлена a_k, где $k = 0, 1, \ldots n$, в общем случае мы будем считать вещественными числами. Многочлен степени $n = 1$ называют **линейным членом**. В курсе математики средней школы мы сталкиваемся также с «многочленами бесконечной степени»:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ и } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Это, безусловно, суммы бесконечных геометрических прогрессий со знаменателями, соответственно x и $(-x)$, которые сходятся при $|x| < 1$ и определяются как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n\right)$$
$$\text{и } \lim_{n\to\infty}\left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n\right).$$

В высшей математике такие «многочлены» называют **степенными рядами**. Степенные ряды позволяют нам находить значения элементарных и ряда других функций.

Например, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Так,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \approx 0,4792.$$

Значение этой величины с точностью до семи цифр после запятой – $0,4794255$. Таким образом, уже первые два члена степенного ряда позволили нам найти значение функции с точностью до трех значащих цифр. Однако в курсе средней школы со степенными рядами знакомятся только учащиеся физико-математических классов и непосредственного отношения к теме нашей книги эти ряды не имеют.

В курсе алгебры мы привыкли иллюстрировать рассуждения и их результаты графиками, то есть некоторыми геометрическими объектами, и само слово «алгебра» у многих ассоциируется с изображением параболы. Тем не менее длительное время алгебра развивалась в отрыве от геометрии, и только в XVII веке французский философ и математик Рене Декарт ввел на плоскости систему координат, которая позволила установить соответствие между алгебраическими уравнениями и кривыми на плоскости. Оказалось, уравнению $y = a + kx$ соответствует прямая, пересекающая ось Oy в точке $(0; a)$ и составляющая с осью Ox угол ϕ, такой, что $tg(\phi) = k$; уравнению $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ – окружность радиуса r с центром в точке с координатами $(a; b)$; а уравнению $x^2 - y^2 = 0$ – пара прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$. Таким образом, решениям уравнения соответствует геометрическое место точек с координатами $(x; y)$, при подстановке которых уравнение обращается в тождество, а решениям систем – точки пересечения соответствующих геометрических мест. Однако уравнение, связывающее две переменные, не всегда определяет кривую. Так, уравнение $x^2+y^2 = 0$ имеет единственное решение – $(0; 0)$. Если уравнениям, связывающим три переменные x, y и z, соответствуют поверхности в трехмерном пространстве, то системам двух уравнений обычно соответствуют линии их пересечения, а трех – точки. Определить, что будет решением уравнения, иногда непросто. Для примера возьмем точку трехмерного пространства с координатами $(1; 2; 3)$. Системы

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases}$$

эквивалентны. В свою очередь последняя система уравнений эквивалентна уравнению $(x-1)^2+(y-2x)^2+(z-3x)^2 = 0$, поскольку оно имеет единственное решение $(1;2;3)$. Раскрыв скобки и приведя подобные, мы придем к уравнению

$$14x^2 - 2x - 4xy - 6xz + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Согласитесь, если б не мы составили это уравнение, решить его было бы непросто. Но мы-то точно знаем его единственное решение: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$, которому соответствует не поверхность, а точка трехмерного пространства.

Предлагаемая книга состоит из трех глав, в каждой из которых материал расположен по нарастанию сложности. Благодаря системе ссылок и других средств навигации, книгу можно читать с любого места и в любом направлении. Поэтому если при первом чтении какой-либо вопрос вызывает затруднение, можно пропустить его и двигаться дальше или обратиться к дополнительной литературе. Биться головой о стену не лучшее занятие, но, прежде чем отложить решение задачи, **приложить усилия все-таки надо**. Решение задачи, над которым вы долго думали, дня через три может само прийти в голову, но никогда само не придет в голову решение задачи, над которым вы не думали. Если что-то сразу не получится – это нормально. **Мы растем на решении тех задач, которые не умеем решать!**

Глава 1. Линейные уравнения

Линейные уравнения – первые уравнения, с которыми мы встречаемся в школе и пройти мимо которых нам не удастся ни в одном разделе высшей математики.

§ 1.1. Уравнения с одной неизвестной

$\boxed{12 \Leftrightarrow 20}$ В общем виде линейное уравнение с одной неизвестной можно записать так: $ax = b$, где x – неизвестная величина, а a и b – параметры. В зависимости от значений параметров уравнение может иметь бесконечное множество решений, одно единственное или же не иметь решений:

1) $a = 0$. Здесь могут быть два случая.

1.1) $b = 0$. Уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$. Его решением будет любое вещественное x. Иначе говоря, множество решений $\Re = (-\infty; +\infty)$.

1.2) $b \neq 0$. Решений нет, т. е. множество решений – $\varnothing$.

2) $a \neq 0$. Единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Пример. Дано уравнение $\boxed{\Omega\ 188}$

$$(a^2 - 5 \cdot a + 6)x = 2a^2 - 3a - 2.$$

Найти решение относительно неизвестной величины x.

Решение:

1) Коэффициент при x равен нулю, если $a^2 - 5a + 6 = 0$.

Корни квадратного трехчлена: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

1.1) $a = 2 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$. Множество решений – $\Re$.

1.2) $a = 3 \Rightarrow 0 \cdot x = 7$. Множество решений – $\emptyset$.

2) При $(a \neq 2)\&(a \neq 3)$ уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{2 \cdot a^2 - 3a - 2}{a^2 - 5 \cdot a + 6} \Rightarrow x = \frac{2(a-2)(a+\frac{1}{2})}{(a-2)(a-3)} \Rightarrow x = \frac{2a+1}{a-3}.$$

Ответ:

1) $\Re$ при $a = 2$.

2) $\emptyset$ при $a = 3$.

3) $x = \frac{2a+1}{a-3}$ при $(a \neq 2)\&(a \neq 3)$.

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 188, п. 1.

§ 1.2. Уравнения с двумя неизвестными

$\boxed{19 \Leftrightarrow 28}$ Линейное уравнение с двумя неизвестными в общем виде: $ax + by = c$. Поскольку уравнение связывает две неизвестные величины, решениями его будет множество пар $(x; y)$, которое можно интерпретировать как геометрическое место точек плоскости. Если коэффициенты при x и y не равны одновременно нулю, такому уравнению соответствует прямая на плоскости. Многим более привычна запись уравнения прямой в виде $y = a + k \cdot x$, где a – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy, а k – угловой коэффициент прямой, т. е. тангенс угла наклона прямой по отношению к оси Ox.

Такое уравнение также является линейным, но «не в общем виде», поскольку не может задать прямую, параллельную оси Oy. Исследуем уравнение.

1) $(a = 0)\&(b = 0)$.

1.1) $c = 0$. Уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Его решением будет множество всех пар вещественных чисел: $\{(x; y)\}$, где $x, y \in \Re$. Иначе множество решений можно записать в виде $(\Re; \Re)$. Это множество всех точек плоскости.

1.2) $c \neq 0$. Уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. Множество решений – $\varnothing$.

2) $(a \neq 0)\&(b = 0)$. Задача сводится к решению линейного уравнения с одной неизвестной $a \cdot x = c$. Решением будет множеств пар

$$\left\{\left(\frac{c}{a}; y\right)|y \in \Re\right\} = \left(\frac{c}{a}; \Re\right).$$

Этому множеству соответствует прямая, параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в точке $\frac{c}{a}$ (рис. 1б).

3) $(a = 0)\&(b \neq 0)$. Решением будет множество пар

$$\left\{\left(x; \frac{c}{b}\right)|x \in \Re\right\} = \left(\Re; \frac{c}{b}\right).$$

Этому множеству соответствует прямая, параллельная оси Ox и пересекающая ось Oy в точке $\frac{c}{b}$ (рис. 1а).

4) $(a \neq 0)\&(b \neq 0)$. Решение можно записать в виде

$$\left\{\left(x; \frac{c-ax}{b}\right)|x \in \Re\right\}.$$

Ему соответствует прямая на плоскости, непараллельная ни одной из координатных осей: $y = \frac{c-ax}{b}$ (рис. 1в).
Если коэффициенты уравнения и свободный член являются функциями некоторой переменной, например a, то говорят об **однопараметрическом семействе** линейных уравнений или об **однопараметрическом семействе** прямых.

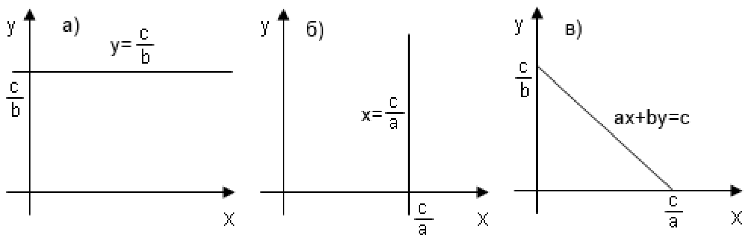

Рис. 1. Прямые на плоскости

Ω 188 **Пример 1.** Исследовать уравнение
$(a^2 + 3a + 2)x + (a^2 - 2a - 3)y = a^2 - 4.$

Решение. Здесь мы имеем дело с однопараметрическим семейством линейных уравнений. Разложив соответствующие квадратные трехчлены на множители, получим:
$(a + 1)(a + 2)x + (a + 1)(a - 3)y = (a - 2)(a + 2).$
1) Коэффициенты при x и y одновременно равны нулю толь-

ко при $a = -1$. В этом случае уравнение примет вид
$0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$. Множество решений – $\varnothing$.
2) При $a \neq -1$ можно рассмотреть два случая.
2.1) Если $a = 3$, то $20x = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.
2.2) Если $a \neq 3$, решение можно записать в виде

$$y = \frac{a^2 - 4}{(a+1)(a-3)} - \frac{a+2}{a-3} \cdot x.$$

Ответ:
1) $\varnothing$ при $a = -1$.
2) $\{(\frac{1}{4}; y) | y \in \Re\}$ при $a = 3$.
3) Во всех остальных случаях решениями будут все пары $(x; y)$, связанные соотношением $y = \frac{a^2-4}{(a+1)(a-3)} - \frac{a+2}{a-3} \cdot x$, т. е.

$$\left\{ \left(x; \frac{a^2 - 4}{(a+1)(a-3)} - \frac{a+2}{a-3} \cdot x \right) | x \in \Re \right\}.$$

Таким образом, если вас попросят указать решения уравнения $2x + 3y = 6$, вы смело можете сказать, что это все пары вещественных чисел (x, y), удовлетворяющие отношению $2x + 3y = 6$, или записать множество решений в виде $\{(x, y) | 2x + 3y = 6; x, y \in \Re\}$.

Пример 2. Леша и Гоша подрядились на работу. Требовалось напечатать тексты, разложить их по конвертам, подписать и заклеить конверты. Известно, что Леша печатает текст за 5 минут, а работа с конвертом занимает у него всего $\boxed{\Omega\ 188}$

1 минуту. Гоше для печатания текста требуется 10 минут, а конверт он оформляет за 5 минут. Очевидно, Леша за час может выполнить 10 единиц работы, а Гоша только 4. Работая отдельно, они в сумме выполнят за час 14 единиц работы, иначе говоря, производительность команды составит 14 единиц продукции в час. Вопрос: можно ли распределить работу так, чтобы общая производительность команды увеличилась? Иногда с ходу предлагают поручить Леше, как самому расторопному, более трудоемкую операцию с текстами, а Гоше оставить работу с конвертами. Но тогда Леша за час напечатает 12 текстов, а Гоша за это время справится с 12 конвертами. Еще хуже! Найдем оптимальное решение.

Решение. Поскольку Леша набирает 5 текстов в час, производительность его труда по текстам равна 12 единиц в час. Это производительность по конкретной производственной операции. Соответственно, его производительность по конвертам – 60 ед./ч. Производительность труда Гоши по текстам – 6, по конвертам – 12 ед./ч. Нам предстоит ответить на вопрос: какую долю времени каждый из них должен тратить на тексты, а какую на конверты? Обозначим долю времени, отведенную работе с текстом, для Леши через x, а для Гоши через y. Тогда они вместе за час должны набрать $12x + 6y$ текстов. Доли времени, отведенные на конверты для Леши и Гоши, составят соответственно $1-x$ и $1-y$, т. е.

все время, свободное от работы с текстами. За это время они оформят $60(1-x)+12(1-y)$ конвертов. Количество напечатанных текстов должно равняться количеству конвертов: $12x+6y = 60(1-x)+12(1-y)$. Приведя подобные и сократив левую и правую части полученного уравнения на 18, получим $4x+y = 4$. Распределение времени для Леши и Гоши однозначно определяется парой $(x; y)$, которую можно считать координатами некоторой точки на плоскости. Чтобы количество текстов совпало с количеством конвертов, эта точка должна лежать на прямой $AC : 4x + y = 4$ (рис. 2). Кроме того, по смыслу задачи на величины x и y накладываются ограничения $x, y \in [0; 1]$. Тогда все допустимые пары $(x; y)$

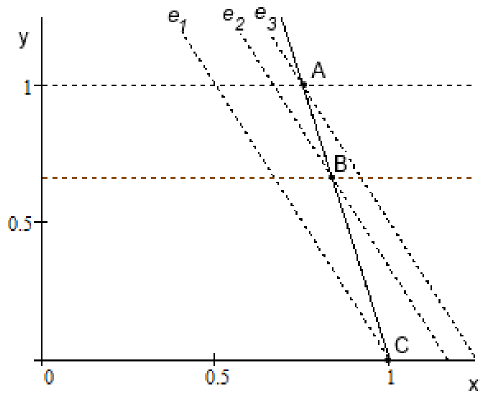

Рис. 2. Точка A соответствует оптимальному плану

должны лежать на отрезке АС. Количество единиц конечного продукта равно количеству текстов: $k = 12x+6y$. В частности, при $k = 12$ уравнение принимает вид $12x + 6y = 12$ (прямая e_1 на рис. 2). Эта прямая пересекается с отрезком AC в точке $C(1; 0)$. Если теперь мы начнем увеличивать значение параметра k, прямая $12x + 6y = k$ будет смещаться вверх параллельно самой себе. Когда прямая займет положение e_2, она пересечет отрезок AC в точке B, соответствующей случаю, когда Леша и Гоша работали по отдельности $x = \frac{5}{6}; y = \frac{4}{6}$, т. е. когда команда производила $12x + 6y = 14$ единиц конечного продукта. Итак, со смещением прямой e_1 вверх параллельно самой себе производительность команды k растет. К сожалению, двигать прямую вверх без конца мы не можем. Действуют ограничения. Самое верхнее допустимое положение e_1 – это e_3, когда прямая пересекает отрезок AC в точке $A(\frac{3}{4}; 1)$. В этом случае $12x + 6y = 15$.

Ответ: команда достигнет максимальной производительности труда – 15 единиц конечного продукта в час, если Леша три четверти часа будет заниматься текстами и четверть часа конвертами, а Гоша только текстами.

Немного теории. Если функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на всей вещественной оси или некотором ее интервале, в любой точке ее области определения существует касательная. Уравнение прямой, касающейся графика функции в точке с координатами $(a, f(a))$, можно представить в виде $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Когда a принимает значения из области определения $f(x)$, касательная принимает положения прямых соответствующего семейства. Сам график функции $y = f(x)$ является по отношению к полученному семейству прямых **огибающей** кривой, т. е. кривой, которая в каждой своей точке касается некоторой прямой данного семейства.

Пример 3. Дана функция $f(x) = x^3 - 4a$. Построить однопараметрическое семейство касательных к графику $f(x)$. $\boxed{\Omega\ 188}$

Решение. Производная $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$. Следовательно, касательная к графику в точке $(a, f(a))$ имеет вид

$y = a^3 - 4a + (3a^2 - 4) \cdot (x - a)$ или $(3a^2 - 4) \cdot x - y = 2a^3$.

Ответ: $(3a^2 - 4) \cdot x - y = 2a^3$.

Семейство касательных изображено на рис. 3. Таким обра-

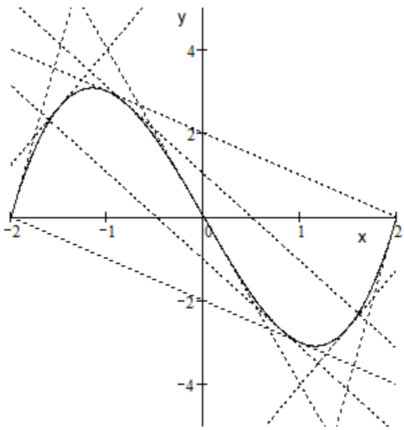

Рис. 3. Однопараметрическое семейство прямых

зом, каждому значению $a \in \Re$ соответствует прямая, касающаяся графика функции в точке $(a, f(a))$.

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 188, п. 1.

§ 1.3. Системы двух уравнений

$\boxed{20\Leftrightarrow 35}$ Такую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь возможны следующие варианты:
1) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, система имеет бесконечное множество решений. В таком случае обоим уравнениям соответствует одна прямая на плоскости (рис. 4а). Это значит, одно уравнение можно получить из другого, умножив его на некоторое вещественное число:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 4x - 6y = 14. \end{cases}$$

2) Система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Уравнениям соответствуют две параллельные прямые (рис. 4б):

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 4x - 6y = 6. \end{cases}$$

3) Система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Такой системе соответствуют две пересекающиеся прямые на плоскости (рис. 4в). Поскольку две непараллельные прямые имеют на плоскости одну точку пересечения, решение здесь существует и единственно.

В школьном курсе математики обычно рассматривают два

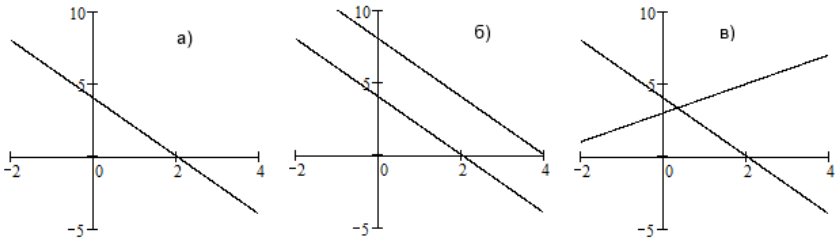

Рис. 4. Прямые на плоскости

метода решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными: «подстановка» и «вычитание». Решим систему (1) вторым из перечисленных методов. Пока будем считать, что все коэффициенты системы ненулевые. Умножим левую и правую части первого уравнения на b_2, а левую и правую части второго – на b_1:

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2; \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = c_2 b_1. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты при y в обоих уравнениях стали одинаковыми. Теперь из левой части первого уравнения вычтем левую часть второго, а из правой части первого – правую часть второго. Получим линейное уравнение $(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x = c_1b_2 - c_2b_1$. В дальнейшем в таком случае будем для краткости говорить о вычитании из одного уравнения другого. Аналогично сделаем одинаковыми коэффициенты при x:

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2; \\ a_1a_2x + b_2a_1y = c_2a_1. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим уравнение $(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2$. Теперь можем записать равенства

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \\ y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \end{cases} \tag{2}$$

которые, однако, имеют смысл только при отличных от нуля знаменателях дробей: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \Rightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1$ или $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Мы вернулись к хорошо известному нам условию (см. рис. 4в). Если оно выполнено, остается найти единственное решение $(x; y)$. Только как запомнить формулы (2)? Для этого введем понятие «определитель»:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} a \cdot d - b \cdot c.$$

Текст «def» над знаком равенства означает «равно по определению». Таблица, ограниченная двумя вертикальными отрезками в левой части равенства, называется **определителем второго порядка**, или просто **определителем**. Впервые понятие «определитель» для решения систем линейных уравнений ввел Лейбниц, но эти работы не были им опубликованы. В 1748 г. в одном из своих трактатов Маклорен фактически использовал определители для решения систем двух уравнений с двумя неизвестными и трех уравнений с тремя неизвестными.

Составим определитель из коэффициентов левой части системы уравнений (1) на с. 28. В дальнейшем будем называть его **главным определителем** системы и обозначать:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Для обозначения определителя мы использовали греческую букву «дельта». Именно от этой буквы когда-то произошли и латинская «D», и русская «Д», и даже «дельта реки». Теперь запишем еще два определителя – $\triangle_x$ и $\triangle_y$ («дельта x» и «дельта y»):

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \quad \text{и} \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Первый получается из главного путем замены столбца коэффициентов при x на столбец свободных членов, второй – заменой столбца коэффициентов при y на столбец свободных членов. Теперь выражения (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = \frac{\triangle_x}{\triangle}; \\ y = \frac{\triangle_y}{\triangle}. \end{cases} \tag{3}$$

Новая символика избавила нас от необходимости помнить сложную формулу и записывать длинную цепочку преобразований. Для закрепления навыка стоит прорешать несколько систем. Тогда решать эту задачу по-другому вам не захочется. Метод обладает еще одним замечательным свойством – прозрачностью. Здесь трудно сделать такую ошибку, которую нельзя было бы сразу найти.

$\boxed{\Omega\ 188}$ **Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) = 11 \neq 0.$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4{\cdot}1 - 1{\cdot}(-3) = 7 \text{ и } \triangle_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2{\cdot}1 - 3{\cdot}4 = -10.$$

Откуда из равенств (3) следует

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{11}; \\ y = -\frac{10}{11}. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 188}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 4x - 6y = 8. \end{cases}$$

Решение. Найдем главный определитель:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Система либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений. В нашем случае $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$. Значит, уравнения эквивалентны и решение – бесконечное множество пар вещественных чисел.

Ответ: $\{(x, y) | 2x - 3y = 4; x, y \in \Re\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 188}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 4x - 6y = 7. \end{cases}$$

Решение. Найдем главный определитель:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Система либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений. В нашем случае $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{4}{7}$.

Ответ: система не имеет решения.

Ω 189 **Пример 4.** Решить систему уравнений с параметром

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2; \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4. \end{cases}$$

Решение:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - a^2 - a = -a \cdot (a-3).$$

1) При $a = 0$ и $a = 3$ главный определитель $\triangle = 0$.

$$1.1)\ a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Решений нет.}$$

$$1.2)\ a = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \{(x, y) | 2x + 3y = 5; x, y \in \Re\}.$$

2) $\triangle \neq 0$, т. е. $(a \neq 0)\&(a \neq 3)$.

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} a+2 & a \\ 2a+4 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a - 2a^2 - 4a = 0.$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} 2 & a+2 \\ a+1 & 2a+4 \end{vmatrix} = 4a + 8 - a^2 - 3a - 2 = -(a-3)(a+2).$$

$$\begin{cases} x = \frac{\triangle_x}{\triangle} \\ y = \frac{\triangle_y}{\triangle} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a+2}{a} \end{cases}$$

Ответ:

1) $\varnothing$ при $a = 0$.

2) $\{(x, y) | 2x + 3y = 5; x, y \in \Re\}$ при $a = 3$.

3) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a+2}{a} \end{cases}$ при $(a \neq 0)\&(a \neq 3)$.

Задачи к параграфу на с. 188, п. 2–3. $\boxed{\Omega}$

§ 1.4. Системы трех и более уравнений

$\boxed{28 \Leftrightarrow 45}$ Широкий класс технических и экономических задач связан с решением больших систем линейных уравнений. Так, при проектировании ферм моста количество уравнений может достигать нескольких тысяч. Разумеется, до появления электронно-вычислительной техники напрямую такой вычислительный процесс организовать было нереально. Но нас сейчас будет интересовать алгоритм решения систем линейных уравнений именно «вручную». Настоящий специалист должен не только правильно поставить задачу для персонального компьютера, но и понимать суть применяемых алгоритмов. Более того, без глубокого понимания алгоритмов трудно грамотно поставить задачу.

Пусть количество уравнений равно количеству неизвестных и равно n. Такие системы в дальнейшем будем называть **системами линейных уравнений n-го порядка.** Для их решения в 1750 г. швейцарским математиком Крамером был предложен метод, основанный на понятии определителя произвольного порядка. Фактически **метод Крамера** является эффективным только при решении систем второго и третьего порядков. Для решения уравнений выше третьего порядка обычно применяют **метод Гаусса**, а уравнения третьего порядка решают как методом Крамера, так и методом Гаусса. Линейному уравнению с тремя неизвестными $ax + by + cz = d$ соответствует плоскость в трехмерном пространстве. Системе трех уравнений – три плоскости. В зависимости от их взаимного расположения, плоскости могут иметь бесконечное множество общих точек, вообще не иметь общих точек или иметь одну единственную.

Любая из следующих трех операций приводит к системе, эквивалентной исходной:

1) перестановка двух уравнений в системе;

2) умножение уравнения на отличное от нуля число;

3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

Из возможности умножения уравнения на число следует и возможность деления, поскольку деление может рассматриваться как умножение на обратное число. Для начала будем исходить из того, что решение существует и единственно.

Пример 1. Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $\boxed{\mathit{\Omega}\ 189}$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9; \\ x - y + 3z = 2; \\ 3x - 6y - z = 25. \end{cases} \tag{4}$$

Прежде всего договоримся о новой символике. Удачно выбранная символика может существенно упростить ход решения задачи. Запишем систему (4) в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right).$$

Такой объект называют **расширенной матрицей**. Расширенная матрица несет в себе всю информацию о системе уравнений в том смысле, что по ней можно восстановить последнюю. Первый столбец – столбец коэффициентов при x, второй – при y, третий – при z. После вертикальной черты идет столбец свободных членов, т. е. «правых частей» уравнений. Трем перечисленным выше операциям над системой уравнений соответствуют три операции над расширенной матрицей: перестановка строк; умножение строки на отличное от нуля число; прибавление к одной строке другой, умноженной число. Далее нам предстоит посредством трех перечисленных выше операций привести матрицу к **диагональному виду**, то есть такому, когда по **главной диагонали** располагаются только единицы, а все остальные коэффициенты до вертикальной черты – нули. В этом и состоит метод Гаусса.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \stackrel{1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \stackrel{2}{\to}$$

$$\stackrel{2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \stackrel{3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \stackrel{4}{\to}$$

$$\xrightarrow{4}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{6}$$

$$\xrightarrow{6}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{7} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: $(2; -3; -1)$.

Диагональ из единичек, выстроенную с «северо-запада» на «юго-восток», называют главной диагональю. Мы могли выполнить преобразования непосредственно с системой уравнений, но, согласитесь, запись оказалась бы длинновата.

Разберем алгоритм по шагам. Как вы, наверно, заметили, номера шагов в записи хода решения проставлены над соответствующими стрелочками.

1) Из второй строки вычьтем первую; из третьей – первую, умноженную на 3. Теперь первые элементы во второй и третьей строке равны 0.

2) Из третьей строки вычьтем вторую, умноженную на 4.

3) Делим третью строку на (-8).

4) Ко второй строке прибавим третью, умноженную на 2. Из первой вычьтем третью, умноженную на 5.

5) Делим вторую строку на (-3).

6) Из первой строки вычьтем вторую, умноженную на 2. Получаем диагональную матрицу, на главной диагонали кото-

рой расположены только единицы, а все остальные элементы – нули.

7) По расширенной матрице восстановим традиционную запись системы уравнений.

Если бы задача решалась на компьютере, когда уравнений много, а их коэффициенты в общем случае не целые вещественные числа, схема вычислений выглядела бы несколько иначе, поскольку машине, в отличие от человека, все равно, с какими числами работать. Также в технических приложениях часто актуален вопрос о точности вычислений. Если, скажем, первый элемент в первой строке – очень малое число, при делении на него может произойти потеря точности. Проиллюстрируем процесс решения системы уравнений на компьютере. Для краткости обозначим символом «$*$» произвольное число. Тогда последовательность шагов можно описать следующим образом:

1. Ставим на первое место строку, первый элемент которой имеет наибольшее по модулю значение. Делим первую строку на ее первый элемент. Теперь значение первого элемента первой строки – 1.

2. От каждой из нижерасположенных строк отнимаем певую, умноженную на первый элемент соответствующей строки. Таким образом, под первым элементом первой строки окажутся только нулевые значения.

3. Среди строк, начиная со второй, найдем ту, у которой второй элемент имеет наибольшее по модулю значение. Поставим эту строку на второе место и разделим на ее второй элемент.

4. От каждой строки, начиная с третьей, отнимаем вторую, умноженную на второй элемент соответствующей строки. Таким образом, под вторым элементом второй строки также окажутся одни нули.

Продолжая так дальше, мы придем к матрице, на главной диагонали которой стоят единицы, а под диагональю – нули. Разумеется, договоренность о том, что уравнение имеет единственное решение, пока остается в силе.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \end{array}\right)\xrightarrow{5}\cdots\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{array}\right).$$

Теперь пойдем снизу вверх. От каждой строки, расположенной выше последней, отнимем последную, умноженную на последний элемент соответствующей строки. Имеется в виду последний элемент из расположенных слева от вертикальной черты. Теперь над единицей внизу расположены только нули. Поскольку все остальные, расположенные слева, элементы первой строки равны нулю, указанная процедура «не испортит» остальные элементы матрицы, расположенные левее. Далее от всех строк, которые выше второй, отнимаем вторую строку, умноженную на предпоследний элемент. Продолжая так, мы придем к матрице, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные до вертикальной черты – нули.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{array}\right).$$

Задача решена. Вычислительный процесс, на первый взгляд, не вызывает затруднений. Однако, как показывает практика, чтобы научиться выполнять его без ошибок, надо потрудиться. Результаты желательно проверять подстановкой. Ошибки делают все – от младшего школьника до академика! Только не все умеют вовремя их обнаружить.

До сих пор мы исходили из того, что решение существует и единственно. Но так бывает невсегда.

Пример 2. Решить систему уравнений $\boxed{\mathit{\Omega}\ 190}$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9; \\ x - y + 3z = 2; \\ 2x + y + 8z = -7. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & -3 & 11 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & = \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right).$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\cdot z \\ y = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\cdot z \end{cases}$$ или, что то же самое,

$$\left\{(x;y;z)|\ x = -\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\cdot z;\ y = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\cdot z;\ z \in \Re\right\}.$$

После первого шага у нас оказались две эквивалентные строки, одну из них мы убрали. На третьем шаге перенесли столбец коэффициентов при z в правую часть. Привели левую часть матрицы к диагональному виду при помощи все тех же трех простых операций, после чего осталось только записать ответ. Решения образуют бесконечное множество. В пространстве ему соответствует прямая, по которой пересекаются две плоскости.

$\boxed{\Omega\ 190}$ **Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9; \\ x - y + 3z = 2; \\ 2x + y + 8z = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & -2 & 18 \end{array}\right).$$

Ответ: система не имеет решения.

Последним двум строкам соответствуют две параллельные плоскости, которые не могут иметь общих точек:

$$\begin{cases} -3y - 2z = 11; \\ -3y - 2z = 8. \end{cases}$$

Поскольку с системами линейных уравнений приходится сталкиваться довольно часто, желательно довести навыки их решения «до подкорки». Нужное количество заданий вы найдете в любом сборнике задач по линейной алгебре.

Задачи к параграфу на с. 189, п. 4. $\boxed{\Omega}$

§ 1.5. Неравенства

$\boxed{35 \Leftrightarrow 55}$ Объединим в одной таблице схемы решения линейных неравенств с рассмотренной нами на с. 19 схемой решения соответствующего уравнения.

	$a < 0$	$a = 0$			$a > 0$
Неравенство	$\forall\ b$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$\forall\ b$
$a \cdot x < b$	$(\frac{b}{a}; +\infty)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\Re$	$(-\infty; \frac{b}{a})$
$a \cdot x \leq b$	$[\frac{b}{a}; +\infty)$	$\varnothing$	$\Re$	$\Re$	$(-\infty; \frac{b}{a}]$
$a \cdot x = b$	$\frac{b}{a}$	$\varnothing$	$\Re$	$\varnothing$	$\frac{b}{a}$
$a \cdot x \geq b$	$(-\infty; \frac{b}{a}]$	$\Re$	$\Re$	$\varnothing$	$[\frac{b}{a}; +\infty)$
$a \cdot x > b$	$(-\infty; \frac{b}{a})$	$\Re$	$\varnothing$	$\varnothing$	$(\frac{b}{a}; +\infty)$

Как видно из таблицы, если коэффициент при неизвестной в уравнении $ax = b$ отличен от нуля, точка $\frac{b}{a}$ делит вещественную ось на два луча, на одном из которых уравнение превращается в неравенство $ax > b$, на другом – $ax < b$.

Ω 190 **Пример 1.** Решить неравенство $(a^2+a-2)\cdot x < a^2+2a-3$.

Решение:

1) $a^2+a-2 < 0 \Rightarrow (a-1)(a+2) < 0 \Rightarrow a \in (-2;1)$. При делении левой и правой частей неравенства на отрицательную величину, знак неравенства меняет направление:

$$x > \frac{a^2+2a-3}{a^2+a-2} \Rightarrow x > \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+3)} \Rightarrow x > \frac{a+1}{a+3}.$$

2) $a^2+a-2 = 0 \;\Rightarrow\; a = -2$ или $a = 1$.

2.1) $a = -2 \;\Rightarrow\; 0\cdot x < -3$. Нет решения.

2.2) $a = 1 \;\Rightarrow\; 0\cdot x < 0$. Нет решения.

3) $a^2+a-2 > 0 \Rightarrow (a-1)\cdot(a+2) > 0 \Rightarrow a \in (-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

При делении левой и правой частей неравенства на положительную величину направление знака неравенства не меняется: $x < \frac{a^2+2a-3}{a^2+a-2} \Rightarrow x < \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+3)} \Rightarrow x < \frac{a+1}{a+3}$.

Ответ:

1) $\varnothing$ при $a = -2$ и $a = 1$.

2) $(\frac{a+1}{a+3}; +\infty)$ при $a \in (-2;1)$.

3) $(-\infty; \frac{a+1}{a+3})$ при $a \in (-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными $ax + by = c$. Если коэффициенты при неизвестных не равны одновременно нулю, уравнению соответствует прямая на плоскости (с. 20). Последняя делит плоскость на две полуплоскости. На одной уравнение $ax+by=c$ превращается в неравенство $ax+by<c$, а на другой – $ax+by>c$. Чтобы определить направление знака неравенства в каждой полуплоскости, достаточно подставить в уравнение любую точку полуплоскости и посмотреть, в какое неравенство превратится уравнение. Если начало координат $(0;0)$ не лежит на прямой, т. е. $c \neq 0$, удобно подставлять значения $x=0$, $y=0$.

Пример 2. Отобразить на плоскости геометрическое место точек $(x;y)$, заданное неравенствами $\boxed{\mathit{\Omega}\ 190}$

$$\begin{cases} 6x+y \geq 10; \\ x+y \leq 5; \\ 3x-2y \leq 10. \end{cases}$$

Решение. Построим графики прямых:

$$6x+y=10;\ x+y=5 \text{ и } 3x-2y=10.$$

Для этого достаточно знать две точки на каждой прямой, например точки попарного пересечения прямых. Знание их координат позволит сделать график более информативным. К тому же нам представляется случай еще раз закрепить навыки решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными (с. 28).

$$A : \begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} l_2 \\ l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} l_1 \\ l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 6x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Построим уравнения прямых l_1, l_2 и l_3. Отметим на графике точки A, B, C и проведем через них прямые:

Прямая	Точки	Уравнение прямой
l_1	A, C	$6x + y = 10$
l_2	A, B	$x + y = 5$
l_3	B, C	$3x - 2y = 10$

Графики прямых l_1, l_2 и l_3 изображены на рис. 5. Теперь, чтобы найти полуплоскость, на которой $6x + y > 10$, подставим в левую часть неравенства координаты любой не лежащей на прямой $6x + y = 10$ точки. Мы подставим координаты точки $(0; 0)$. Неравенство не выполняется, значит, $6x + y < 10$ по другую сторону прямой l_1, на графике по правую сторону. Аналогичная подстановка показывает, что неравенство $x + y < 5$ выполняется для точек, лежащих

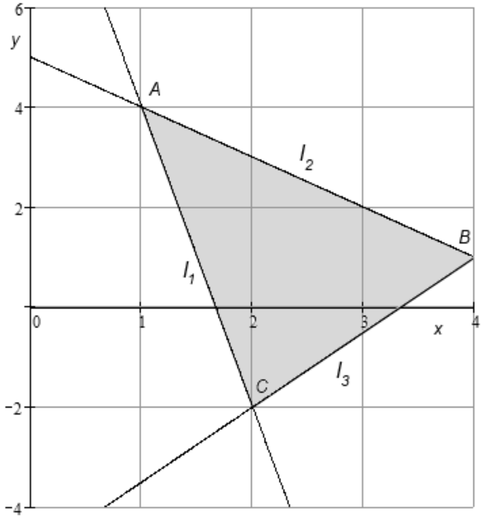

Рис. 5. Треугольник ABC

слева от прямой l_2, а неравенство $3x - 2y < 10$ – для точек, расположенных левее прямой $3x - 2y = 10$. Поскольку нас интересует геометрическое место точек, для которых выполняются одновременно три неравенства, решением системы будет множество пар $(x; y)$, являющихся координатами точек, принадлежащих одновременно всем трем рассмотренным полуплоскостям.

Ответ: решением будет множество точек треугольника ABC, включая границу, поскольку все неравенства нестрогие.

Пример 3. Допустим, наше предприятие может выпускать два пользующихся спросом на рынке изделия A и B, для производства которых требуются три вида ресурсов: токарный станок, фрезерный станок и сварочная аппаратура. По $\boxed{\Omega\ 191}$

договору аренды, в этом квартале мы располагаем 800 часами рабочего времени токарного станка, 700 – фрезерного и 640 часами сварочной аппаратуры. Для производства одной партии изделия A требуется 8 часов времени токарного станка, 3 – фрезерного и 8 часов сварочной аппаратуры. Для производства партии изделия B те же ресурсы нужны в объемах 10, 10 и 5 соответственно. Изделие A можно реализовать на рынке по цене 30 тысяч рублей за партию, изделие B – 60 тысяч рублей за партию. Требуется составить план производства изделий A и B, при котором доход с продаж будет максимальным. Иными словами, перед нами стоит вопрос: в каком объеме мы должны производить каждое изделие?

Решение. Оформим условия задачи в виде таблицы:

Ресурс	Изделие A	Изделие B	Лимит
Токарный станок	8	10	800
Фрезерный станок	3	10	700
Сварочное оборудование	8	5	640
Цена	30	60	

Обозначим количество партий изделий A и B переменными x и y соответственно, тогда каждому реальному производственному плану будет соответствовать точка на плоскости с координатами $(x; y)$ (рис. 6). На производство x партий изделия A уйдет $8x$ часов работы токарного станка, а на производство y партий изделия B – $10y$ часов. Значит, для

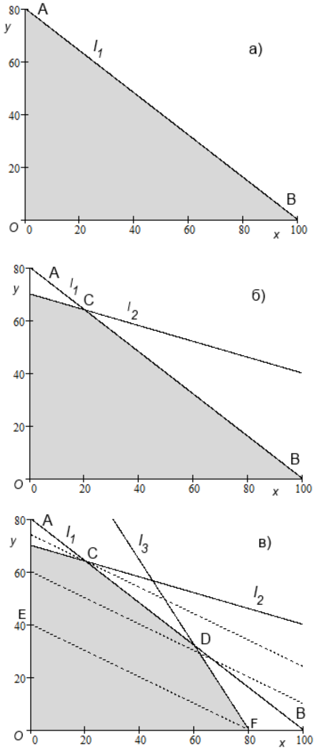

Рис. 6. Область производственных возможностей

выполнения плана $(x; y)$ потребуется $8x + 10y$ часов работы токарного станка, при этом мы не можем затратить более 800 часов. Таким образом, должно выполняться неравенство $8x + 10y \leq 800$. Учитывая также естественные ограничения $x \geq 0$ и $y \geq 0$, изобразим на плоскости область наших производственных возможностей, геометрическое место всех пар $(x; y)$, которые реально можно произвести, если единственным ограничением является рабочее время токарного станка. Эта область представлена на рис. 6а. На графике прямая $8x+10y = 800$ обозначена l_1. Аналогично ограничения, связанные с арендой фрезерного станка, выразятся неравенством $3x + 10y \leq 700$, и область производственных возможностей сузится до изображенной на рис. 6б. Прямая $3x + 10y = 700$ обозначена на графике l_2. Наконец, ограниченность последнего ресурса означает $8x + 5y \leq 640$ и область производственных возможностей примет окончательный вид (рис. 6в). Это множество всех пар $(x; y)$, которые мы в состоянии произвести. Таким образом, область производственных возможностей задана системой неравенств

$$\begin{cases} 8 \cdot x + 10 \cdot y \leq 800; \\ 3 \cdot x + 10 \cdot y \leq 700; \\ 8 \cdot x + 5 \cdot y \leq 640; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Осталось решить, какой производственный план будет оптимальным? В соответствии с условиями задачи, x партий изделия A дадут доход с продаж $30x$, а y партий изделия B – $60y$ тысяч рублей. Итого: $30x + 60y$. Пусть d – доход с продаж, тогда решениями уравнения $30x + 60y = d$ при соблюдении известных ограничений будут все пары $(x; y)$, дающие доход d. Например, доход 2 миллиона 400 тысяч рублей можно получить, приняв план, соответствующий точкам $E(0; 40)$ или $F(80; 0)$, а также любой другой точке, лежащей на отрезке EF, т. е. на пересечении прямой $30x + 60y = 2400$ с областью производственных возможностей. Но, вероятно, это неоптимальные планы. Если мы переместим прямую EF вверх параллельно самой себе, то новой прямой будет соответствовать большее значение d. Так, если прямая $30x + 60y = d$ пройдет через точку $(0; 60)$ на оси Oy, доход составит 3 миллиона 600 тысяч рублей. Однако мы не можем поднять прямую на любую высоту. Мы можем двигать ее вверх параллельно самой себе до тех пор, пока она имеет общие точки с областью производственных возможностей. Таким образом, мы остановимся тогда, когда прямая $30x + 60y = d$ пройдет через точку C. Найдем ее координаты:

$$C : \begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 10 = 800 \\ 3x + 10y = 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 64 \end{cases}$$

Тогда доход с продаж: $30 \cdot 20 + 60 \cdot 64 = 4440$.

Ответ: оптимальный план выпуска – 20 партий изделия A и 64 партии изделия B. Доход с продаж при этом составит

4 миллиона 440 тысяч рублей.

Задача на оптимизацию, которую мы сейчас рассмотрели, относится к классу задач линейного программирования. Этот раздел математики появился в 30-х годах XX века после выхода статьи Леонида Витальевича Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». В линейном программировании предполагается наличие линейной **целевой функции** и линейных ограничений. Задача о Леше и Гоше (с. 23) также является задачей линейного программирования. Когда для достижения максимума или минимума целевой функции мы варьируем только двумя переменными, задача имеет простую геометрическую интерпретацию. В случае трех переменных областью производственных возможностей стал бы многогранник в трехмерном пространстве. Рисовать трехмерные чертежи не каждому по силам. В случае еще большего числа переменных нам пришлось бы выйти в многомерное пространство. Например, если бы в последнем примере наше предприятие могло производить 10 видов изделий, задачу пришлось бы решать в 10-мерном пространстве на некотором гипермногограннике, а двигать пришлось бы не прямую, а 9-мерную гиперплоскость. Здесь придется отказаться от наглядности и привлечь аппарат линейной алгебры.

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 190, п. 5–7.

Глава 2. Уравнения второго порядка

§ 2.1. Основные алгебраические тождества

$\boxed{45\Leftrightarrow 59}$ В представленной ниже таблице сформулированы основные свойства операций сложения и умножения вещественных чисел.

№	Сложение	№	Умножение
1	Коммутативный закон: $a+b=b+a$.	1	Коммутативный закон: $a\cdot b=b\cdot a$.
2	Ассоциативный закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$.	2	Ассоциативный закон: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
3	Существует такое число 0, что для $\forall\ a$ $a+0=a$.	3	Существует такое число 1, что для $\forall\ a$ $a\cdot 1=a$.
4	Для $\forall\ a$ существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$	4	Для $\forall\ a\neq 0$ существует такое число a^{-1}, что $a\cdot a^{-1}=1$
5	Дистрибутивный закон: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$		

При решении уравнений и неравенств трудно избежать тождественных преобразований. Смысл тождественного преобразования состоит в замене одного выражения другим, тождественным исходному. Выражение **тождественно** исходному, если при любом наборе значений входящих в него переменных оно принимает то же значение, что и исходное. Основные алгебраические тождества выводятся непосредственно из представленных выше свойств операций сложения и умножения. Как вы, наверно, заметили, первые 4 свойства для сложения и умножения чем-то похожи. В математике множество, элементы которого относительно какой-либо операции обладают свойствами (1–4), называют **коммутативной группой**. Множествам такого рода посвящен целый раздел математики, который называют **теорией групп**. Таким образом, вещественные числа образуют коммутативную группу относительно операций сложения и умножения. Пятое свойство устанавливает связь между операциями. Наличие противоположных и обратных чисел позволяет ввести еще две операции, без которых в принципе можно обойтись, но с которыми удобней: вычитание (как прибавление противоположного числа) и деление (как умножение на обратное). Теперь для вывода любого из приведенных ниже основных алгебраических тождеств достаточно раскрыть скобки и привести подобные члены:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

5) $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$;

6) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$;

7) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;

8) $a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

(для нечетных n !!!);
9) $a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;
10) иногда полезно знать:
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$,
т. е. квадрат суммы чисел равен сумме их квадратов и сумме всех возможных их попарных удвоенных произведений; формулировка справедлива и для первого в нашем списке тождества, касающегося квадрата суммы двух чисел.
Последние тождества также легко проверить, раскрыв скобки и приведя подобные. Например,

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = \\ = a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}- \\ -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-1}-b^n = a^n-b^n.\end{aligned}$$

Теперь о выражении $(a+b)^n$, которое называют **биномом Ньютона**. Здесь n – неотрицательное целое число. Случаи $n=2$ и $n=3$ представлены выше, $(a+b)^0=1$, $(a+b)^1=a+b$. Если раскрыть скобки, бином примет вид

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^nb^n.$$

В первом слагаемом правой части равенства бинома присутствует n-я степень a и нулевая степень b, а затем в каждом следующем слагаемом степень a на единицу уменьшается, а степень b на единицу увеличивается. Таким образом, сумма степеней a и b всегда остается равной n. При каждом произведении степеней a и b присутствует коэффициент, который обозначен C_n^k, где n – степень бинома, k – номер коэффициента, начиная с нулевого. Найти биномиальные коэффициенты для любой степени бинома нетрудно, если воспользоваться **треугольником Паскаля**:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Здесь крайние коэффициенты бинома любой степени всегда равны единице, а каждый из остальных получается сложением двух вышестоящих. Последнее нетрудно доказать. Действительно,

$$
\begin{gathered}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \\
= \left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n\right) \cdot (a+b) = \\
= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_n^n a b^n + \\
+ C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-2} b^3 + \ldots + C_n^n b^{n+1} = \\
= C_n^0 a^{n+1} + \left(C_n^0 + C_n^1\right) a^n b + \left(C_n^1 + C_n^2\right) a^{n-1} b^2 + \ldots + C_n^n b^{n+1},
\end{gathered}
$$

откуда следует:
$C_{n+1}^0 = C_n^0$; $C_{n+1}^1 = C_n^0 + C_n^1$; $C_{n+1}^2 = C_n^1 + C_n^2$; $\ldots$; $C_{n+1}^{n+1} = C_n^n$,
что мы и наблюдаем в треугольнике Паскаля.

Из формулы бинома $(a+b)^n$ нетрудно получить формулу для $(a-b)^n$. Поскольку нечетная степень (-1) равна (-1), а четная – 1, достаточно у каждого второго слагаемого в разложении бинома заменить «+» на «−»:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

§ 2.2. Квадратный трехчлен

$\boxed{55 \Leftrightarrow 80}$ Выражение вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ называют **квадратным трехчленом**, коэффициент a при x^2 – **старшим коэффициентом**, c – **свободным членом**. Квадратные уравнения, т. е. уравнения с квадратным трехчленом в левой части умели решать еще в Древнем Вавилоне за 2000 лет до нашей эры. Необходимость решать такие уравнения возникала при измерении площадей, в процессе выполнения земельных работ для военных нужд и при астрономических расчетах.

Пример 1. Требуется построить спортивную площадку площадью 1800 м^2 прямоугольной формы. При этом ее длина должна быть на 5 м больше ширины. Какими должны быть длина и ширина площадки? $\boxed{\Omega\ 192}$

Решение. Пусть x – ширина площадки, тогда $x + 5$ – ее длина, а площадь равна $x \cdot (x+5) = 1800$. Раскрыв скобки после несложных преобразований, придем к уравнению $x^2 + 5x - 1800 = 0$. Его корни: (-45) и 40. Отбросив отрицательное решение, оставим $x = 40$.

Ответ: ширина – 40 м, длина – 45 м.

Квадратный трехчлен может не иметь вещественных корней, может иметь два совпадающих или два различных корня в зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Корням трехчлена соответствуют точки пересечения оси Ox с графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 7 и 8).

Разложим квадратный трехчлен на линейные множители:

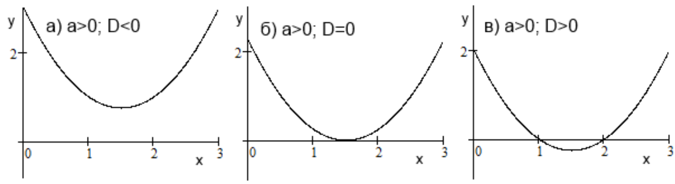

Рис. 7. Ветви параболы направлены вверх

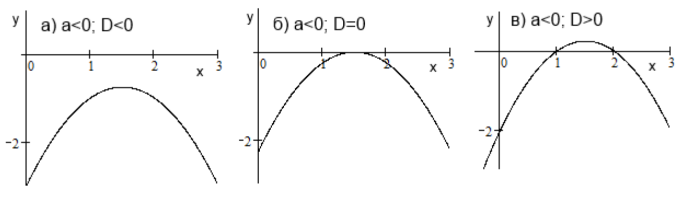

Рис. 8. Ветви параболы направлены вниз

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\cdot\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Выражение в правой части последнего равенства не может равняться нулю, если $b^2 - 4ac < 0$, т. е. когда в квадратных скобках окажется сумма неотрицательного числа $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ и положительного $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$. Если же $b^2 - 4ac \geq 0$,

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right],$$

и согласно тождеству о разности квадратов выражение раскладывается в произведение двух линейных членов:

$$a\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Таким образом, квадратный трехчлен обращается в ноль при

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Величину $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом** квадратного трехчлена. При $D = 0$ корни совпадут.

Пример 2. Найти корни квадратного трехчлена $2x^2+2x+3$. $\boxed{\Omega\ 192}$

Решение. $D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 < 0$.

Ответ: Вещественных корней не существует.

Ω 192 **Пример 3.** Найти корни квадратного трехчлена $4x^2-4x+1$.
Решение. $D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$. Трехчлен имеет два совпадающих вещественных корня $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.
Ответ: два совпадающих корня $\frac{1}{2}$.

Ω 192 **Пример 4.** Найти корни квадратного трехчлена $2x^2+x-6$.
Решение. $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49$. Трехчлен имеет два вещественных корня

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}.$$

Ответ: -2 и $\frac{3}{2}$.

Хотя поиск корней квадратного трехчлена осуществляется по алгоритму и не является творческим процессом, полезно знать ряд приемов, позволяющих иногда упростить эту и без того простую задачу. Ведь именно на мелочах можно выиграть немало ценного времени. Если коэффициент при x в выражении $ax^2+bx+c=0$ является целым четным числом $b = 2p$, то уравнение принимает вид $ax^2+2px+c=0$, дискриминант $D = 4p^2 - 4ac = 4(p^2 - ac)$. Если $D \geq 0$, существуют корни $x_{1,2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2-ac}}{2a}$. Числитель и знаменатель последней дроби сократим на 2. Теперь корни квадратного трехчлена вида $ax^2+2px+c=0$ находятся следующим образом:

1) определим $D/4 = p^2 - ac$;

2) если $D/4 < 0$, решений нет; иначе $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-ac}}{a}$.

Пример 5. Найти корни квадратного трехчлена $3x^2 + 10x - 8$. Ω 192

Решение. Заметим, что $10 = 2 \cdot 5$, $D/4 = 25 - 3 \cdot (-8) = 49$. Трехчлен имеет два вещественных корня

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{3} = \frac{-5 \pm 7}{4}.$$

Ответ: -4 и $\frac{2}{3}$.

Если мы применим обычную формулу, придется иметь дело с дискриминантом, равным 196. Может показаться, что выигрыш не так уж велик, но школьные задачи ориентированы на расчеты «вручную», и потому обычно коэффициенты в квадратных трехчленах – целые числа, а значит, примерно в половине случаев коэффициент при x – четное число. Если при этом дискриминант большой, время вычислений сокращается в разы.

Пусть теперь коэффициент при x^2 равен единице. Если трехчлен $x^2 + px + q$ имеет вещественные корни x_1 и x_2, он раскладывается в произведение двух линейных членов:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2.$$

Таким образом, коэффициенты квадратного трехчлена и его корни связаны соотношениями, которые являются частным случаем **теоремы Виета**:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Последние соотношения во многих случаях и при должном навыке позволяют легко угадывать корни. Например, $x^2 - 5x + 6$. Можно угадать, что два числа, сумма которых равна 5, а произведение 6, – это 2 и 3. Если дан квадратный трехчлен $x^2 + x - 2$, то сумма корней равна (-1), а произведение (-2). Можно угадать корни: (-2) и 1. Если свободный член отрицателен, корни имеют разные знаки. Корни ищем среди делителей свободного члена. Таким образом, если целых корней нет – нам не повезло.

Упражнения. Опираясь на теорему Виета, угадайте корни следующих трехчленов:

$$\begin{array}{lll} x^2 - x - 2; & x^2 + 7x + 10; & x^2 + 2x - 3; \\ x^2 + 5x + 6; & x^2 - 7x + 10; & x^2 - 2x - 3; \\ x^2 - x - 6; & x^2 + 3x - 10; & x^2 - 4x + 3; \\ x^2 + x - 6; & x^2 - 10x + 21; & x^2 + 4x + 3. \end{array}$$

Результаты обязательно проверьте подстановкой. Если вы выполнили все задания, то должны заметить, что навык развивается очень быстро.

Ω 192 **Пример 6.** Решить уравнение с параметром
$(a^2 + a - 2)\, x^2 + (2a^2 + a + 3)\, x + a^2 - 1 = 0.$

Решение:

1) $a^2+a-2=0$ при $a=-2$ или $a=1$. Уравнение становится линейным.

1.1) При $a=-2$ уравнение принимает вид
$9x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

1.2) При $a=1$ уравнение принимает вид $6x=0 \Rightarrow x=0$.

2) При $a\neq -2$ и $a\neq 1$
$D=\left(a^2+a+3\right)^2-4\cdot(a^2-1)(a^2+a-2)=$
$=25a^2+10a+1=(5a)^2+2\cdot 5a+1=(5a+1)^2\geq 0$.
Значит, вещественные корни существуют при любом a.

$$\sqrt{(5a+1)^2}=|5a+1|=\begin{cases}-5a-1, \text{ если } a<-\frac{1}{5};\\ 5a+1, \text{ если } a\geq -\frac{1}{5}.\end{cases}$$

Однако $|5a+1|$ фигурирует в формулах со знаком «$\pm$», поэтому всегда рассматриваются оба случая: «$+$» и «$-$».

$$x_{1,2}=\frac{-(2a^2+a+3)\pm|5a+1|}{2(a+2)(a-1)};$$
$$x_1=\frac{-2a^2-a-3-5a-1}{2(a+2)(a-1)}=\frac{-2(a+2)(a+1)}{2(a+2)(a-1)}=-\frac{a+1}{a-1};$$
$$x_2=\frac{-2a^2-a-3+5a+1}{2(a+2)(a-1)}=\frac{-2(a-1)^2}{2(a+2)(a-1)}=-\frac{a-1}{a+2}.$$

Ответ:

1) $x=-\frac{1}{3}$ при $a=-2$.

2) 0 при $a=1$.

3) $\begin{cases} x_1 = -\frac{a+1}{a-1} \\ x_2 = -\frac{a-1}{a+2} \end{cases}$ иначе.

Причем при $a = -\frac{1}{5}$ оба корня совпадают.

Квадратный трехчлен может быть правой частью не только уравнения, но и неравенства. Вернемся к рис. 7 и 8 (с. 60). Если дискриминант меньше нуля, квадратный трехчлен имеет постоянный знак на всей вещественной оси, который совпадает со знаком коэффициента при квадрате переменной. Если дискриминант равен нулю, то в одной точке трехчлен обращается в ноль, в остальных точно также сохраняет постоянный знак. Наконец, если дискриминант больше нуля, трехчлен имеет два корня, которые делят вещественную ось на три промежутка знакопостоянства (см. рис. 7 и 8).

Ω 192 **Пример 7.** Решить неравенство $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

Решение. Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, которые делят вещественную ось на три промежутка знакопостоянства (рис. 9). Знаки чередуются, поэтому

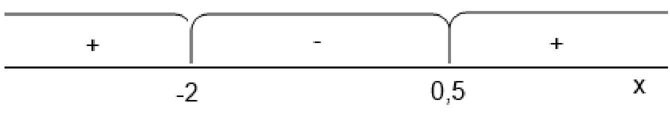

Рис. 9. Промежутки знакопостоянства

достаточно определить знак $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ на одном интервале. $f(0) < 0$. Значит, на интервале $(-2; \frac{1}{2})$ выражение $f(x) < 0$. Тогда на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(-\frac{1}{2}; +\infty)$, наоборот, $f(x) > 0$. Мы ищем множество значений x, для которых $f(x) \geq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

Если говорить об уравнениях и неравенствах с параметром, для их решения иногда необходимо провести небольшое исследование. Рассмотрим на примере уже решенного нами уравнения (с. 64) один когда-то «модный» на вступительных экзаменах класс задач.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $\boxed{\Omega\ 192}$

$$\left(a^2 + a - 2\right) x^2 + \left(2a^2 + a + 3\right) x + a^2 - 1 = 0$$

имеет два корня x_1 и x_2, таких, что $x_1 < 1 < x_2$?

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ – произвольный квадратный трехчлен. Определим необходимые и достаточные условия существования двух его корней, расположенных по разные стороны от заданного числа t, т. е. $x_1 < t < x_2$. Как видно на рис. 10, это возможно в двух случаях: $a > 0$ и $f(t) < 0$ (график слева); $a < 0$ и $f(t) > 0$ (график справа). То есть корни лежат по разные стороны от t тогда и только

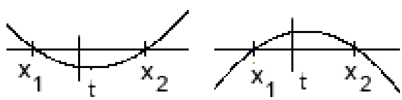

Рис. 10. Корни расположены по разные стороны от заданного числа

тогда, когда $a \cdot f(t) < 0$, иначе говоря, когда коэффициент при x^2 и значение $f(t)$ в точке, разделяющей корни, имеют разные знаки. В нашем примере $t = 1$ и

$$f(1) = a^2 + a - 2 + 2a^2 + a + 3 + a^2 - 1 = 4a^2 + 2a = 2a(2a + 1).$$

Коэффициент при x^2 – это $a^2 + a - 2$. Значит, должно выполняться условие
$2a(2a + 1)(a^2 + a - 2) < 0$, т. е. $a(2a + 1)(a + 2)(a - 1) < 0$. Многочлен в левой части неравенства обращается в ноль в точках $-2; -\frac{1}{2}; 0; 1$, разбивающих вещественную ось на пять промежутков знакопостоянства, как показано на рис. 11. Определим знак на одном из интервалов, например последнем, подставив вместо a очень большое вещественное число. На интервале $(1; +\infty)$ выражение принимает знак «+». Расставим знаки в остальных интервалах по принципу чередования. Интересующее нас неравенство выполняется на интервалах $(-2; -0,5)$ и $(0; 1)$.

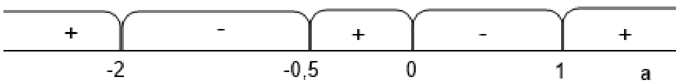

Рис. 11. Промежутки знакопостоянства

Ответ: при $a \in (-2; -0,5) \cup (0; 1)$.

Теперь рассмотрим квадратное неравенство с параметром. Это уже довольно серьезная работа, но именна та, которой занимается настоящий инженер или экономист, – исследование зависимости решений от меняющихся параметров.

Пример 9. Решить неравенство с параметром $\boxed{\Omega\ 192}$

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0.$$

Решение. Найдем дискриминант
$D=4a^2-8a+4-4a^2+4=-8(a-1)$ и классифицируем возможные исходы в зависимости от значения старшего члена.
1) В случае нулевого старшего члена неравенство перестает быть квадратным: $a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm 1$.
1.1) При $a=-1$ неравенство принимает вид утверждения
$-4x+1>0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0,25)$.
1.2) При $a=1$ получим $1>0$, что справедливо при любом $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Рассмотрим случай, когда старший член отрицателен, т. е. когда ветви параболы направлены вниз:
$a^2-1<0 \Rightarrow (a+1)(a-1)<0 \Rightarrow a \in (-1; 1)$. Здесь в свою очередь классифицируем возможные исходы в зависимости от значения дискриминанта.
2.1) $D<0 \Rightarrow a>1$.
Эти значения a не попадают в интервал $(-1; 1)$.
2.2) $D=0 \Rightarrow a=1$. Это значение также не попадает в рассматриваемый интервал.
2.3) $D>0 \Rightarrow a<1 \Rightarrow a \in (-1; 1)$. На этом интервале

квадратный трехчлен имеет два вещественных корня:

$$x_2 = \frac{-2a + 2 + \sqrt{-8a + 8}}{2 \cdot (a^2 - 1)} < x_1 = \frac{-2a + 2 - \sqrt{-8a + 8}}{2 \cdot (a^2 - 1)}.$$

Сократив числитель и знаменатель дробей на 2, получим:

$$x_2 = \frac{-a + 1 + \sqrt{-2a + 2}}{a^2 - 1} < x_1 = \frac{-a + 1 - \sqrt{-2a + 2}}{a^2 - 1}.$$

Поскольку $-a + 1 - \sqrt{-2a + 2} < -a + 1 + \sqrt{-2a + 2}$, но $a^2 - 1 < 0$, а при делении на отрицательную величину знак неравенства меняет направление, $x_2 < x_1$. Ветви параболы направлены вниз, и $D > 0$ (как на рис. 8в). Следовательно, квадратный трехчлен больше нуля на интервале $(x_2; x_1)$.

3) Положительный старший член:

$a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Снова рассмотрим все возможные значения дискриминанта.

3.1) $D < 0 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow a \in (1; +\infty)$. Это случай, когда весь график параболы лежит выше оси Ox. Решением будет все множество вещественных числел: $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.2) $D = 0 \Rightarrow a = 1$. Это значение a не входит в рассматриваемую область значений.

3.3) $D > 0 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a \in (-\infty; -1)$. Поскольку ветви параболы направлены вверх, квадратный трехчлен больше нуля при значениях $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (как на рис. 7в). Мы также учли, что на рассматриваемом интервале $a^2 - 1 > 0$, а значит, $x_1 < x_2$.

Теперь нам предстоит собрать все результаты, полученные на ветвях дерева, отражающего произведенный нами перебор вариантов, в Ответ: При этом вовсе не обязательно придерживаться той же нумерации пунктов. Ответ – это результат, и его следует формулировать четко и просто.

Ответ:

1) $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ при $a \in (-\infty; -1)$;

2) $(-\infty; 0,25)$ при $a = -1$;

3) $(x_2; x_1)$ при $a \in (-1; 1)$;

4) $\Re$ при $a \in [1; +\infty)$,

$$\text{где } x_1 = \frac{-a+1-\sqrt{-2a+2}}{a^2-1},\ x_2 = \frac{-a+1+\sqrt{-2a+2}}{a^2-1}.$$

В четвертом пункте ответа мы объединили результаты двух пунктов решения: 1.2 и 3.1. То есть как при $a = 1$, так и при $a \in (1; +\infty)$ множество решений – $\Re$. Проанализируем полученный результат. Выражение в левой части исследуемого неравенства есть функция двух переменных x и a:

$$f(x, a) = (a^2 - 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (a - 1) \cdot x + 1.$$

Тогда уравнение $z = f(x, a)$ задает некоторую поверхность в трехмерном пространстве (рис. 12). Условия задачи теперь можно сформулировать так: при каких значениях x и a поверхность лежит выше плоскости Oxa? Значение функ-

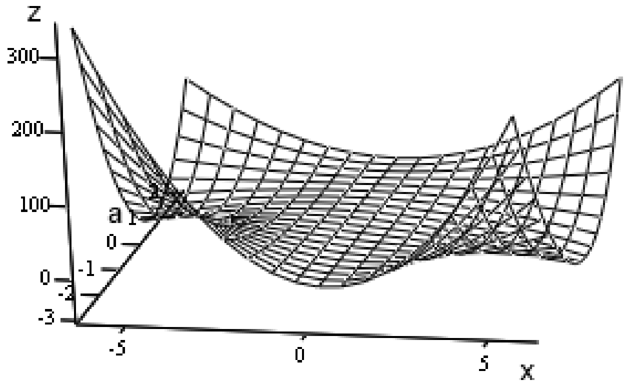

Рис. 12. Поверхность $z = f(x, a)$

ции $f(x, a)$ можно интерпретировать как высоту над уровнем моря в точке с координатами $(x; a)$. Трехмерный график поверхности не всегда достаточно информативен, поэтому в математике часто для изображения поверхностей применяют линии уровня, хорошо знакомые нам по географическим картам. Для нашей поверхности линии уровня изображены на рис. 13а. Каждой линии соответствует некоторое фиксированное значение $f(x, a) = Const$ – «высота над уровнем моря». Кривая, помеченная числом 0, – «берег моря». По этому графику вы легко можете установить части поверхности, расположенные выше «уровня моря». График кривой $f(x, a) = 0$, т. е. «линии берега», мы разместили отдельно на рис. 13б. Осталось только раскрасить карту (рис. 14). Итак, в соответствии с ответом, на интервале $a \in (-\infty; -1)$ «су-

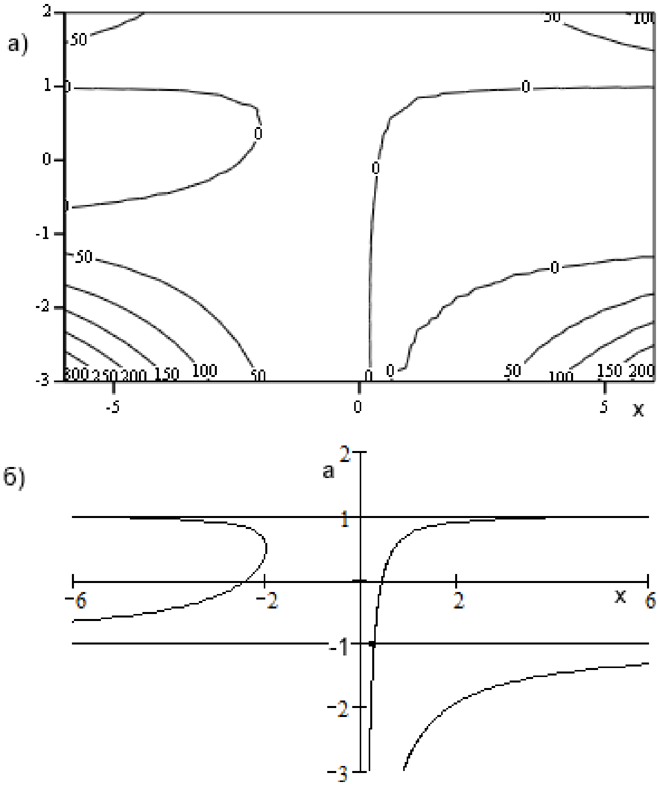

Рис. 13. Линии уровня (а); нулевая линия уровня (б)

ша» располагается по обе стороны от $x_1; x_2$, на интервале $a \in (-1; -1)$ – по разные стороны от $x_1; x_2$, а при $a \in [1; +\infty)$ – «суша, и ничего, кроме суши». Корни квадратного трехчлена являются функциями параметра a:

$$x_1(a) = \frac{-a+1-\sqrt{-2a+2}}{a^2-1}; \quad x_2(a) = \frac{-a+1+\sqrt{-2a+2}}{a^2-1}.$$

Традиционно на графике ось абсцисс отводят аргументам,

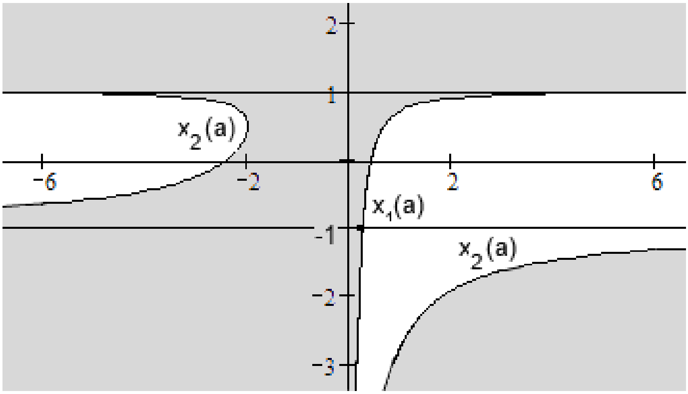

Рис. 14. Области знакопостоянства

а ось ординат – функциям, но не запрещено поступать и наоборот. Мы только что записали уравнения «линий берега». Рассмотрим их ассимптоты. Одна ассимптота имеет уравнение $a = 1$ и, как зафиксировано в ответе, целиком «принадлежит суше». Берег может приближаться к ней сколь угодно близко, но никогда не достичь ее. На языке высшей математики это означает, что для пределов снизу (слева) функций $x_1(a)$ и $x_2(a)$ выполняются равенства:

$$\lim_{a\to 1-0} \frac{-a+1-\sqrt{-2a+2}}{a^2-1} = -\infty;$$

$$\lim_{a\to 1-0} \frac{-a+1+\sqrt{-2a+2}}{a^2-1} = +\infty.$$

Утверждение под знаком предела $a \to 1-0$ означает, что в обоих случаях a стремится к 1 слева (на нашем графике «снизу», но все равно принято говорить «слева» в смысле положения величин на своей вещественной оси). Пределы справа мы не можем рассмотреть, поскольку при $a > 1$ функции $x_1(a)$ и $x_2(a)$ не определены. Другая ассимптота – прямая $a = -1$, она заслуживает отдельного рассмотрения. При $a = -1$ обе «линии берега» имеют разрыв. Причем для $x_1(a)$ разрыв устранимый, поскольку существует общий предел, т. е. пределы слева и справа совпадают:

$$\lim_{a\to -1} x_1(a) = \lim_{a\to -1} \frac{-a+1-\sqrt{-2a+2}}{a^2-1} = \frac{1}{4}.$$

Для устранения разрыва достаточно доопределить функцию в точке разрыва $x_1(-1) = 0,25$. В выражении для $x_2(a)$ числитель при $a \to -1$ – конечная положительная величина, а знаменатель стремится к нулю. При этом знак знаменателя зависит от того, как стремится к единице a: слева или справа. Таким образом,

$$\lim_{a\to -1-0} x_1(a) = +\infty; \lim_{a\to -1+0} x_2(a) = -\infty.$$

Мы сознательно не приводим выкладки для нахождения пределов, чтобы не отвлекаться от задачи. К тому же в трех случаях мы использовали **правило Лопиталя**, которое обычно в курсе математики средней школы не изучается. Итак, при переходе через точку $a = -1$ меняется относительное положение $x_1(a)$ и $x_2(a)$ на вещественной оси: до этой точки $x_1(a) < x_2(a)$, после нее $x_2(a) < x_1(a)$. Таким образом, «линии берега» $x_1(a)$ и $x_2(a)$ ограничивают область, на которой $f(x,a) > 0$ (см. рис. 14), но сами в решение не входят. Если бы неравенство было нестрогим $f(x,a) \geq 0$, граница вошла бы в решение.

При исследовании неравенства мы сделали больше, чем обычно требуется от школьника. В частности, приведенные выше графики трудно построить без соответствующих программных средств. Мы просто хотели проиллюстрировать пример. Провести все исследование, не сделав ни одной ошибки, очень трудно, поэтому в конечном итоге успех дела зависит от того, как быстро вы умеете находить ошибки. Для закрепления пройденного материала попробуйте решить то же неравенство, считая величину a неизвестной, а x – параметром:

$$(a^2 - 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (a - 1) \cdot x + 1 > 0.$$

После того как мы раскроем скобки в левой части неравенства и произведем группировку по степеням a, задачу можно сформулировать так: решить неравенство

$$x \cdot a^2 + 2x \cdot a - (x - 1)^2 > 0,$$

где a – неизвестная величина, x – параметр. Интересно, что решение опять отлично будет иллюстрировать рис. 14 (с. 74). Рассмотрим еще один пример.

Пример 10. Решить неравенство с параметром $\boxed{\Omega\ 192}$

$$ax^2 + 2x + 1 > 0.$$

Решение:

1) $a = 0 \Rightarrow 2x + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-0,5; +\infty)$;

2) $a \neq 0$. Найдем дискриминант $D = 4(1 - a)$.

2.1) $D < 0 \Rightarrow a > 1$. Поскольку дискриминант меньше нуля и ветви параболы направлены вверх, как на рис. 7а (с. 60), множество решений – $\Re$.

2.2) $D > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a \in (-\infty; o) \cup (0; 1)$.

$$\text{Корни: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

2.2.1) $a \in (-\infty; 0) \Rightarrow x_2 < x_1$, и ветви параболы направлены вниз, как на рис. 8в (с. 60).

$$x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}; \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}\right).$$

2.2.2) $a \in (0; 1)$. Положение параболы, как на рис. 7в (с. 60).

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right).$$

2.3) $D = 0 \Rightarrow a = 1$. Квадратный трехчлен принимает вид $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, а $(x+1)^2 > 0$ при всех значениях x, кроме $x = -1$, т. е. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Ответ:

1) $\left(\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$ при $a \in (-\infty; 0)$;

2) $(-0,5; +\infty)$ при $a = 0$;

3) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right)$ при $a \in (0; 1)$;

4) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ при $a = 1$;

5) $\Re$ при $a \in (1; +\infty)$.

Данных в ответе достаточно, чтобы в первом приближении построить график, как на рис. 14 (с. 74), но мы предпочли сначала найти ряд пределов. Серая область на рис. 15 – множество пар $(x; a)$, для которых выполняется неравенство $ax^2 + 2x + 1 > 0$. Граница не входит в решение. При построении графиков мы опирались на пределы

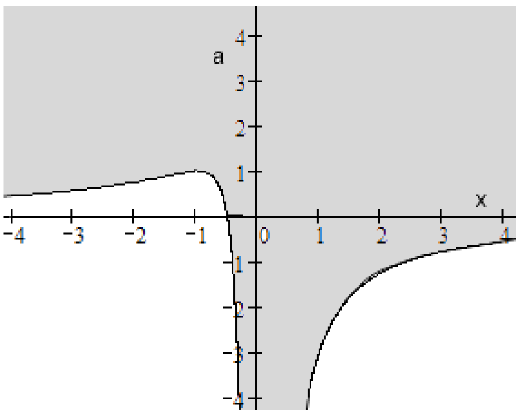

Рис. 15. Области знакопостоянства

$$\lim_{a\to 0}\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a} = -\frac{1}{2} \text{ и } \lim_{a\to 0-0}\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} = +\infty.$$

Хотя функции параметра $x_1(a) = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2(a)\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$, ограничивающие интервал значений x в первом пункте ответа, не определены при $a = 0$, в пределе они переходят в границы интервала второго пункта ответа. Обратите внимание, что во втором пределе a стремится к нулю слева. Аналогично при a, стремящемся к нулю справа,

$$\lim_{a\to 0+0}\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} = -\infty,$$

и первый интервал области значений x из третьего пункта в пределе «убегает в минус бесконечность», а второй переходит в интервал из второго пункта ответа. Также следует обратить внимание на то, что в ходе исследования неравенства установлено: $a < 0 \Rightarrow x_2 < x_1$ и $a > 0 \Rightarrow x_1 < x_2$. И наконец,

$$\lim_{a\to -\infty}\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a} = \lim_{a\to -\infty}\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} = 0.$$

Таким образом, при построении графика мы опирались не только на зафиксированную в ответе информацию, но также на найденные предельные значения.

Задачи к параграфу на с. 192, п. 8–11. $\boxed{\Omega}$

§ 2.3. Уравнения с двумя неизвестными

59⇔84 В этом разделе мы можем немного расслабиться. Теория уравнений второго порядка с двумя неизвестными сейчас нас интересует только на описательном уровне. В общем виде уравнение можно записать так:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a_0 = 0. \tag{5}$$

Разумеется, здесь a_{11}, a_{22} и a_{12} не должны одновременно равняться нулю, иначе мы получим линейное уравнение. Кривые, заданные уравнениями второго порядка, называют **кривыми второго порядка**, или **коническими сечениями**. Одной и той же кривой могут соответствовать разные уравнения в зависимости от ее положения в принятой системе координат. Различают три основных типа конических сечений: эллипсы, гиперболы и параболы (рис. 16). Кроме основных конических сечений, существуют еще и вы-

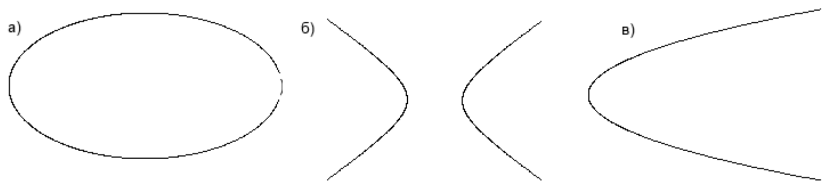

Рис. 16. Конические сечения: а) эллипс, б) гипербола, в) парабола

рожденные случаи: прямая, пара пересекающихся прямых и точка. Термин «коническое сечение» возник в Древней Греции. Греки рассматривали эти кривые как сечения конуса плоскостью. В зависимости от наклона плоскости по отношению к оси конуса, получались эллипсы (как частный случай – окружность), гиперболы и параболы. Если плоскость касалась поверхности конуса, получалась прямая; если плоскость пересекала конус вдоль его оси, – пара пересекающихся прямых, а если проходила через вершину конуса под соответствующим углом, – точка. Рассекание конусов плоскостями может показаться праздным занятием, но конические сечения обладают рядом интересных свойств. В частности, у них есть **фокусы**. Если в фокус параболы поместить точечный источник света, то отраженные от нее лучи образуют пучок параллельных, а значит, могут освещать бесконечно удаленные цели. Если точечный источник света поместить в один из фокусов эллипса, то отраженные лучи пересекутся в другом фокусе. На самом деле точечных источников не бывает, так же как и идеальных поверхностей, но тем не менее поверхности прожекторов делают именно в виде **параболоида**, а источник света помещают в его фокус. Не менее важен и тот факт, что траектории движения материальных точек в поле центральной силы, например гравитационном, – кривые второго порядка. И хотя в идеальные траектории вносят возмущения другие менее весомые небесные тела, с большой степенью точности мы можем считать, что орбиты планет солнечной системы – эллипсы, а Солнце находится в одном из фокусов каждого эллипса. Таким образом, уравнения второго порядка довольно неплохо описывают окружающий нас мир и уже поэтому заслуживают внимания.

Задача определения типа кривой второго порядка по ее уравнению решается в курсе **аналитической геометрии**. Однако сами кривые можно определить, не прибегая к услугам конуса и даже не вводя на плоскости систему координат.

Эллипс – это геометрическое место всех точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна.

Гипербола – это геометрическое место всех точек, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна.

Парабола – это геометрическое место всех точек, одинакого удаленных от заданной точки (фокуса) и некоторой фиксированной прямой.

Для любого конического сечения можно найти систему координат, в которой его уравнение принимает **канонический** вид. Это уравнения

$$\text{эллипса: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{гиперблы: } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\text{и параболы: } y^2-2px=0,$$

где a, b и p – вещественные константы. Кривые второго порядка также делят плоскость на области знакопостоянства, внутри которых уравнения превращаются в соответствующие неравенства:

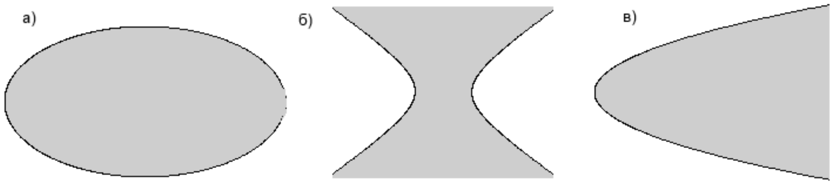

Рис. 17. Области знакопостоянства

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ (рис. 17а);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ (рис. 17б);}$$

$$y^2 - 2px \leq 0 \text{ (рис. 17в).}$$

Как вы, вероятно, заметили, уравнения гиперболы и параболы в канонической форме несколько отличаются от тех, к которым мы привыкли в школе. На это есть свои причины. Так, более привычное для многих уравнение $y = \frac{a}{x}$ определяет только семейство гипербол с перпендикулярными ассимптотами, но ассимптоты могут образовывать любой угол. Хотя теория уравнений и, соответственно, кривых второго порядка доступна человеку, владеющему математикой в рамках школьной программы, ее изучение требует времени и определенных усилий. Мы же пока запомним одно полезное наблюдение. **Кривая второго порядка не может иметь более двух общих точек с прямой**. Для доказательства достаточно в уравнении прямой выразить одну из переменных x или y и подставить в уравнение (5).

§ 2.4. Симметричные формы

$\boxed{80\Leftrightarrow 94}$ Выражение $f(x, y)$ называют **симметричной формой**, если

$$f(y, x) \equiv f(x, y),$$

т. е. форма, полученная при перестановке переменных x и y тождественна исходной. Аналогично для любого числа переменных выражение называют симметричной формой, если после любой перестановки любой пары переменных мы приходим к форме, тождественной исходной. Примеры симметричных форм: $x+y$; xy; x^2+y^2. В § 2.2, когда применяли теорему Виета, мы столкнулись с системами уравнений, содержащими две симметричные формы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Эти уравнения устанавливают связь корней квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ с его коэффициентами и иногда помогают нам сразу угадать корни. Теперь мы, наоборот, используем квадратный трехчлен для решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = p; \\ xy = q. \end{cases}$$

При решении таких систем часто в первом уравнении выражают одну переменную через другую, делают подстановку во второе уравнение и получают квадратное уравнение, которое теперь надо решить. Сколько лишних шагов! Мы можем сразу заметить, что, согласно теореме Виета, x и y должны быть корнями уравнения $z^2 - pz + q = 0$.

Пример 1. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 193}$

$$\begin{cases} x + y = 7; \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решение: x и y – корни уравнения $z^2 - 7z + 2 = 0$. Найдем $D = 49 - 8 = 41 > 0$. Уравнение имеет два вещественных корня

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Ответ: система уравнений имеет два решения:

$$\begin{cases} x = \frac{7-\sqrt{41}}{2} \\ y = \frac{7+\sqrt{41}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{7+\sqrt{41}}{2} \\ y = \frac{7-\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\Omega\ 193}$ **Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = -2; \\ xy = 7. \end{cases}$$

Решение: x и y – корни уравнения $z^2 + 2z + 7 = 0$. Найдем $D = 4 - 28 = -24 < 0$. Множество решений – $\varnothing$.

Ответ: система уравнений не имеет решения.

Теперь попробуйте решить те же задачи методом подстановки.

$\boxed{\Omega\ 193}$ **Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = -5; \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решение. По теореме Виета, такой системе соответствует квадратное уравнение, два вещественных корня которого нетрудно угадать, – это (-2) и (-3).

Ответ: система уравнений имеет два решения: $(-2; -3)$ и $(-3; -2)$.

Теперь усложним задачу.

Пример 4. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 193}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5; \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решение. Умножив левую и правую части второго уравнения на (-3) и 2, мы придем к системе уравнений, левые части которых симметричные формы относительно $(2x)$ и $(-3y)$, а значит, $(2x)$ и $(-3y)$ являются корнями уравнения $z^2 + 5z - 36$.

$$\begin{cases} (2x) + (-3y) = -5; \\ (2x) \cdot (-3y) = -36. \end{cases}$$

Найдем $D = 25 - 4 \cdot (-36) = 169$, тогда

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2} \Rightarrow z_1 = -9 \text{ и } z_2 = 4.$$

Это и есть два решения относительно величин $(2x)$ и $(-3y)$.

$$1)\ \begin{cases} 2x = -9 \\ -3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x = 4 \\ -3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(-\frac{9}{2}; -\frac{4}{3})$ и $(2; 3)$.

Теперь рассмотрим случай, когда решение системы методом подстановки невозможно или затруднительно.

$\boxed{\Omega\ 194}$ **Пример 5.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 11; \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} xy + x + y = 11; \\ xy \cdot (x + y) = 30. \end{cases} \quad \text{Положим,} \begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 30 \end{cases}$$

Уравнение $z^2 - 11z + 30$ имеет два решения: 5 и 6.

$$1) \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow 1.1) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad 1.2) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \Rightarrow 2.1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \quad 2.2) \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(1; 5)$ и $(5; 1)$.

$\boxed{\Omega\ 194}$ **Пример 6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 7; \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} xy + x + y = 7; \\ (x+y)^2 - xy = 13. \end{cases} \quad \text{Положим,} \quad \begin{cases} u = x + y; \\ v = xy. \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 7 - u \\ u^2 + u - 20 = 0 \end{cases}$$

Квадратное уравнение $u^2 + u - 20 = 0$ имеет два решения, которые легко угадать, опираясь на теорему Виета: $u_1 = -5$ и $u_2 = 4$.

$$1) \begin{cases} u = -5 \\ v = 7 - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -5 \\ v = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Соответствующее квадратное уравнение $z^2 + 5z - 12 = 0$.

$$D = 25 + 48 = 73;\ z_{1.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.1) \begin{cases} x = \frac{-5-\sqrt{73}}{2} \\ y = \frac{-5+\sqrt{73}}{2} \end{cases} \quad 1.2) \begin{cases} x = \frac{-5+\sqrt{73}}{2} \\ y = \frac{-5-\sqrt{73}}{2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u = 4 \\ v = 7 - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Соответствующее квадратное уравнение $z^2 - 4z + 3 = 0$.

$$\Rightarrow 2.1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad 2.2) \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{-5-\sqrt{73}}{2}; \frac{-5+\sqrt{73}}{2})$, $(\frac{-5+\sqrt{73}}{2}; \frac{-5-\sqrt{73}}{2})$, $(1; 3)$ и $(3; 1)$.

Ранее мы отметили, что прямая и кривая второго порядка не могут иметь больше двух общих точек (рис. 18а). Аналогично две кривые второго порядка не могут иметь более четырех общих точек (рис. 18б).

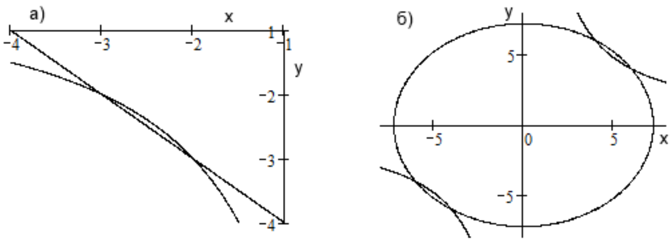

Рис. 18. Кривые второго порядка

Ω 194 **Пример 7.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 52; \\ xy = 24. \end{cases}$$

Решение. Первому уравнению соответствует окружность радиуса $\sqrt{52}$ с центром в начале координат, второму – гипербола. Как мы видим на графике (см. рис. 18б), кривые имеют четыре точки пересечения. Убедимся в этом, решив систему аналитически:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ xy = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 52 \\ xy = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 100 \\ xy = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 10 \\ xy = 24 \end{cases}$$

Последний результат можно записать и так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = +10; \\ xy = 24. \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -10; \\ xy = 24. \end{cases} \end{array}\right.$$

Напомним, что между утверждениями, охваченными квадратной скобкой, подразумевается «логическое ИЛИ». Таким образом, решением исходной системы уравнений будет объединение решений двух систем, заключенных в квадратную скобку. Составим для обеих систем соответствующие квадратные уравнения:

$$1)\ z^2 + 10z + 24 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -5 \pm 1 \Rightarrow$$

$$1.1)\ \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases} \quad 1.2)\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$2)\ z^2 - 10z + 24 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 5 \pm 1 \Rightarrow$$

$$2.1)\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \quad 2.2)\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Ответ: $(-6;-4), (-4;-6), (6;4), (4;6)$.

При решении систем трех уравнений с тремя неизвестными, входящими в симметричные формы, иногда приходит на помощь **теорема Виета**. Для случая многочлена третьей степени она звучит так: если многочлен

$$x^3 + px^2 + rx + q$$

имеет три вещественных корня $x_1,\ x_2,\ x_3$, для его коэффициентов справедливы равенства

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2 + x_3); \\ r = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \\ q = -x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в последнем, достаточно раскрыть скобки в разложении многочлена на линейные множители и привести подобные:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Пример 8. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 195}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ xy + xz + yz = 11; \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Решение. По теореме Виета, неизвестные x, y, z должны быть корнями многочлена $t^3 - 6t^2 + 11t - 6$. Для нахождения корней многочлена угадаем один из корней $t = 1$, разделим многочлен на $(t - 1)$, и тогда задача сведется к нахождению корней квадратного трехчлена, как в примере на с. 114. Многочлен имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, и решениями системы будут все тройки $(x; y; z)$, являющиеся перестановками этих трех чисел.

Ответ: $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$, $(3; 2; 1)$.

Пример 9. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 195}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14; \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Решение. Из тождества на с. 57 следует:
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)$.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ (x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=14 \\ xyz=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases}$$

Последнюю систему мы решили в предыдущем примере.
Ответ: $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(2;3;1)$, $(3;1;2)$, $(3;2;1)$.
В расмотренных выше примерах присутствовали уравнения второго порядка с тремя неизвестными. Геометрический смысл таких уравнений будет раскрыт на с. 99.

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 193, п. 12–15.

§ 2.5. Однородные многочлены

$\boxed{84\Leftrightarrow 99}$ Функция нескольких переменных $F(x,y,z,\ldots)$ называется **однородной порядка n**, если для любого вещественного числа $a>0$ выполняется равенство

$$F(ax,ay,az,\ldots)=a^n\cdot F(x,y,z,\ldots).$$

Иногда также требуют, чтобы число n было целым. Например, $F(x,y)=xy-\sqrt{x^3y+xy^3}$ – однородная функция второго порядка, так как

$$F(ax,ay)=ax\cdot ay-\sqrt{(ax)^3ay+ax(ay)^3}=a^2\left(xy-\sqrt{x^3y+xy^3}\right).$$

Для многочленов требование $a > 0$ можно заменить на $a \neq 0$. Тогда **однородным многочленом порядка n** мы будем называть многочлен от нескольких переменных $F(x, y, z, \ldots)$, такой, что для любого вещественного a выполняется равенство $F(ax, ay, az, \ldots) = a^n F(x, y, z, \ldots)$. Однородный многочлен порядка n определяют и как сумму моночленов порядка n. Тогда однородный многочлен второго порядка от двух переменных x и y должен иметь вид $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ всегда имеет тривиальное решение: $x = 0;\ y = 0$. Если коэффициенты при x^2 и y^2 отличны от нуля, то $x = 0 \Rightarrow y = 0$ и $y = 0 \Rightarrow x = 0$.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $\boxed{\Omega\ 192}$
$x^2 - 5xy + 6y^2$ и указать его корни.

Решение. Если $y \neq 0$,

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = y^2 \left(\left(\frac{x}{y} \right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 6 \right).$$

$$\text{Пусть } \frac{x}{y} = t, \text{тогда } y^2 - 5xy + 6y^2 = y^2 \cdot (t^2 - 5t + 6) =$$

$$= y^2(t-2)(t-3) = y^2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} - 3 \right) = (x-2y)(x-3y).$$

Ответ: $(x - 2y)(x - 3y)$.

Таким образом, задача разложения на множители однородного многочлена второго порядка с двумя переменными сводится к задаче нахождения корней квадратного трехчлена. Отсюда мы можем извлечь еще один прием нахождения корней квадратного трехчлена.

Ω 192 **Пример 2.** Разложить на множители трехчлен $6x^2 - 5x + 1$ и указать его корни.

Решение. Поставим в соответствие исходному квадратному трехчлену однородный многочлен $6x^2 - 5xy + y^2$. Теперь, чтобы вернуться к исходному, достаточно положить $y = 1$.

$$6x^2 - 5xy + y^2 = x^2\left(6 - 5\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = x^2(6 - 5t + t^2) =$$

$$= x^2(t^2 - 5t + 6) = x^2(t-2)(t-3).$$

Теперь вспомним, что $t = \frac{y}{x}$, и возьмем $y = 1$.

$$6x^2 - 5xy + y^2 = x^2\left(\frac{1}{x} - 2\right)\left(\frac{1}{x} - 3\right) =$$

$$= (1-2x)(1-3x) = (2x-1)(3x-1).$$

Ответ: $(2x-1)(3x-1)$, корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{3}$.

Значит, если квадратный трехчлен имеет вид $ax^2 + bx + 1$, для нахождения его корней достаточно найти корни трехчлена $y^2 + by + a$ и в ответе записать их обратные величины.

Ω 195 **Пример 3.** Решить уравнение $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.

Решение. Такое уравнение всегда имеет тривиальное решение: $(x = 0)\&(y = 0)$. Если $y \neq 0$, мы можем разделить

левую и правую части уравнения на y^2. Пусть $\frac{x}{y} = t$. Тогда $t^2 - 5t + 6 = 0$. Если дискриминант меньше нуля, других решений, кроме тривиального, не существует. Находим $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. Следовательно, $x = 2y$ и $x = 3y$. Тривиальное решение удовлетворяет обоим равенствам.
Ответ: $\{(x; y)|x = 2y\} \cup \{(x; y)|x = 3y\}$, где $x, y \in \Re$.

Таким образом, на плоскости однородному алгебраическому уравнению второго порядка соответствует или одна точка с координатами $(0; 0)$, или две пересекающиеся в начале координат прямые.

Пример 4. Решить систему уравнений $\boxed{\Omega\ 195}$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 8y^2 = 0; \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 48. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение однородное. Разделив его на y^2 и введя замену $\frac{x}{y} = t$, придем к уравнению $t^2 - 5t + 8 = 0$. Дискриминант $D = 25 - 32 = -7 < 0$. Значит, уравнение $x^2 - 5xy + 8y^2 = 0$ имеет только одно тривиальное решение $(x = 0)\&(y = 0)$. Подставив это решение во второе уравнение, придем к ложному утверждению: $0 = 48$.
Ответ: система не имеет решения.

$\boxed{\Omega\ 195}$ **Пример 5.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0; \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 48. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение однородное. Разделив его левую и правую части на y и введя замену $\frac{x}{y} = t$, придем к уравнению $t^2 - 5t + 6 = 0$. Его корни: $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$.

1) $t = 2 \Rightarrow x = 2y$. Подставляем $x = 2y$ во второе уравнение системы: $12y^2 = 48 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 4$.

2) $t = 3 \Rightarrow x = 3y$. Подставляем $x = 3y$ во второе уравнение системы:

$20y^2 = 48 \Rightarrow y^2 = 4,8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4,8} \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{4,8}$.

Ответ: $(-2; -4), (2; 4), (-\sqrt{4,8}; -3\sqrt{4,8}), (\sqrt{4,8}; \sqrt{4,8})$.

$\boxed{\Omega\ 195}$ **Пример 6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160; \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8. \end{cases}$$

Решение. Оба уравнения неоднородны. Умножим второе уравнение на 20 и вычтем из результата первое уравнение:

$$\begin{array}{ccccc} 20x^2 & -60xy & -40y^2 & = & 160 \\ 3x^2 & -2xy & & = & 160 \\ \hline 17x^2 & -58xy & -40y^2 & = & 0. \end{array}$$

Мы пришли к следующей эквивалентной исходной системе:

$$\begin{cases} 17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0; \\ 3x^2 - 2xy = 160. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на y^2 и обозначим $\frac{x}{y} = t$. Найдем дискриминант уравнения $17t^2 - 58t - 40 = 0$:
$D = 58^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-40) = 6084 > 0$. $\sqrt{6084} = 78$. Корни уравнения: $t_{1,2} = \frac{58 \pm 78}{34} \Rightarrow t_1 = -\frac{10}{17}; t_2 = 4$.
1) $t = -\frac{10}{17} \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{10}{17} \Rightarrow 10y = -17x$. Умножим второе уравнение на 10 и подставим $(-17x)$ вместо $10y$:
$64x^2 = 1600 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow y = \mp \frac{17}{2}$.
2) $t = 4 \Rightarrow x = 4y$. Подставим $x = 4y$ во второе уравнение системы: $40y^2 = 160 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 8$.
Ответ: $(-5; \frac{17}{2}), (5; -\frac{17}{2}), (-8; -2), (8; 2)$.
Задачи к параграфу на с. 195, п. 16. $\boxed{\Omega}$

§ 2.6. Уравнения с тремя неизвестными

$\boxed{94 \Leftrightarrow 102}$ Уравнения второго порядка с тремя неизвестными в задачах средней школы встречаются нечасто. Общий вид уравнения:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+ a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0.$$

За исключением вырожденных случаев, каждому такому уравнению соответствует поверхность в трехмерном пространстве. Несмотря на большое количество членов уравнения, соответствующих типов поверхностей не так уж много. Просто существует континиум способов расположения поверхности в системе координат. Как и в случае уравнений второго порядка, в некоторой системе координат запись уравнений имеет канонический вид. Прежде всего заметим, что каждой кривой второго порядка плоскости Oxy в пространстве соответствует цилиндрическая поверхность. Это эллиптический (рис. 19а), гиперболический (рис. 19б) и параболический (рис. 19в) цилиндры. Действительно, каж-

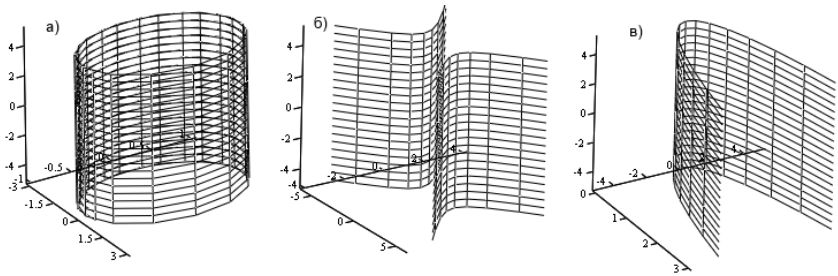

Рис. 19. Цилиндрические поверхности

дой точке плоскости с координатами $(x_0; y_0)$ соответствует в пространстве прямая, т. е. множество точек с координатами $(x_0; y_0; z)$, где $z \in \Re$. Если прямую перемещать параллельно самой себе вдоль некоторой плоской кривой, она опишет в пространстве цилиндрическую поверхность. Однако класс поверхностей второго порядка несколько шире (рис. 20):

1. Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (20а).
2. Эллиптический параболоид: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (20б).
3. Гиперболический параболоид: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (20в).
4. Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (20г).
5. Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (20д).
6. Конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (20е).

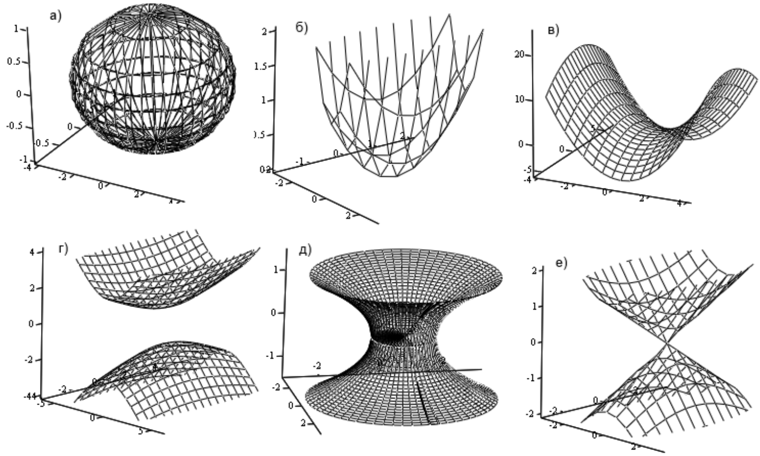

Рис. 20. Основные типы поверхностей второго порядка

Сечение любой поверхности второго порядка плоскостью – кривая второго порядка.

Глава 3. Уравнения старшего порядка

§ 3.1. Операции над многочленами

$\boxed{99\Leftrightarrow107}$ Операции умножения и сложения многочленов, как и аналогичные операции на множестве вещественных чисел (с. 55), обладают свойствами коммутативности и ассоциативности и связаны дистрибутивным законом. В математике множество, на котором определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие таким свойствам, называют **кольцом**. Относительно сложения в этом кольце существует «ноль», который просто совпадает с числом ноль, и для каждого многочлена существует противоположный, такой, что сумма исходного многочлена и противоположного ему равна нулю. В этом кольце вещественные числа будут многочленами нулевой степени. Пусть даны два многочлена степени n и m. Тогда
1) степень их произведения равна $n + m$;
2) степень суммы не превышает $max\{n, m\}$.
Обратите внимание: сумма может иметь степень, меньшую, чем у слагаемых. Это связано с тем, что старшие степени могут сократиться. Таким образом, множество многочленов замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения в том смысле, что результат этих операций всегда многочлен. Однако этого нельзя сказать о делении. Многочлен P_n делится на многочлен D_n, если существует

такой многочлен Q_n, что $P_n = D_n \cdot Q_n$. Например,

$$D_3(x) = x^3 + 2x - 3;\ \ Q_2(x) = x^2 - 1;$$
$$P_5(x) = D_3(x) \cdot Q_2(x) = (x^3+2x-3) \cdot (x^2-1) = x^5+x^3-3x^2-2x+3.$$

Тогда многочлен P_5 делится без остатка, как на D_3, так и на Q_2. Напрашивается аналогия с множеством целых чисел. Множество целых чисел также замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, но не деления. Чтобы определить, делится ли число 3251 на 12, выполним известный алгоритм:

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 2 & 5 & 1 & \ \ 12 \\ \cline{5-5} 2 & 4 & & & 270 \\ \cline{1-2} & 8 & 5 & & \\ & 8 & 4 & & \\ \cline{2-3} & & 1 & 1 & \end{array}$$

В таком случае говорят, что при делении 3251 на 12 мы получили 270 и 11 в остатке. Остаток всегда неотрицательное целое число, меньшее делителя. Таким образом,

$$\frac{3251}{12} = 270 + \frac{11}{12} \text{ или } 3251 = 170 \cdot 12 + 11.$$

Теперь вспомним суть десятичной записи числа:

$$3251 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1.$$

Если в этой записи заменить 10 на x, получится многочлен третьей степени $3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$. Алгоритм деления многочлена на многочлен практически ничем не отличается от алгоритма деления целых чисел. Он даже проще, поскольку не приходится рассматривать единицу старшего разряда как 10 единиц младшего.

$\boxed{\Omega\ 196}$ **Пример 1.** Разделить многочлен
$P_5(x) = x^5+3x^3+x^2-2x+1$ на многочлен $D_2(x) = x^2+2x+1$.

Решение. Выполним деление многочлена на многочлен по аналогии с известным алгоритмом:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x^5 & & +3x^3 & +x^2 & -2x & +1 & x^2+2x+1 \\ \cline{7-7}
x^5 & +2x^4 & +x^3 & & & & x^3-2x^2+6x-9 \\ \cline{1-3}
 & -2x^4 & +2x^3 & +x^2 & & & \\
 & -2x^4 & -4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^3 & 3x^2 & -2x & & \\
 & & 6x^3 & 12x^2 & +6x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x^2 & -8x & +1 & \\
 & & & -9x^2 & -18x & -9 & \\ \cline{4-6}
 & & & & \mathrm{10x} & +10 &
\end{array}
$$

Ответ:

$$\frac{x^5 + 3x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = x^3 - 2x^2 + 6x - 9 + \frac{10x + 10}{x^2 + 2x + 1}.$$

С учетом тождества $x^2+2x+1=(x+1)^2$, последнюю дробь можно сократить на $x+1$:

$$\frac{x^5+3x^3+x^2-2x+1}{x^2+2x+1}=x^3-2x^2+6x-9+\frac{10}{x+1}.$$

Другой способ записи результата:

$$x^5+3x^3+x^2-2x+1=(x^3-2x^2+6x-9)\cdot(x^2+2x+1)+10x+10.$$

Из применяемого в алгоритме метода исключения старших членов следует, что в остатке всегда получится многочлен степени, меньшей, чем у делителя. В частности, при делении многочлена на линейный член в остатке будет получаться вещественное число.

Деление многочлена на линейный член также можно производить лесенкой, но существует более компактная схема – **схема Горнера**. Суть ее заключается в следующем. Пусть многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ требуется разделить на линейный член $(x-c)$.

Положим $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$ – результат деления, а r – остаток. Тогда

$$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=\\&\qquad=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})\cdot(x-c)+r.\end{aligned}$$

Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + (b_1 - b_0c)x^{n-1} + \ldots$$

Отсюда $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1 - b_0c$; $a_2 = b_2 - b_1c$ и т. д. Наконец, $a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}c$ и $a_n = r - b_{n-1}c$. Теперь из последних равенств поочередно выражаем: $b_0 = a_0$; $b_1 = a_1 + b_0c$; $b2 = a_2 + b_1c$ и т. д., пока не дойдем до $b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}c$ и $r = a_n + b_{n-1}c$. Таким образом, зная коэффициенты исходного многочлена и линейный член $(x - c)$, мы можем последовательно найти все коэффициенты результата деления и остаток. Вычисления удобно выполнять в таблице. Тогда после некоторой тренировки вы доведете выполнение этой операции до автоматизма.

$\boxed{\Omega\ 196}$ **Пример 2.** Разделить многочлен $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ на линейный член $x - 2$.

Решение. Составим таблицу из трех строк. В первую строку занесем степени коэффициентов от четвертой до нулевой, во вторую поместим соответствующие коэффициенты исходного многочлена, а третью, где должны быть коэффициенты результата выполнения операции и остаток, будем заполнять в ходе выполнения схемы Горнера.

Степень	4	3	2	1	0	Остаток
a	1	−5	2	−3	7	–
b	0	1	−3	−4	−11	−15

Заполним строку коэффициентов b. В ячейке, соответствующей степени 4, ставим 0, поскольку результат деления – многочлен степени 3. Далее каждую следующую ячейку получаем из двух ячеек предыдущего столбца: строки a и b. Для этого к значению a из предыдущего столбца прибавляем значение b из того же столбца, умноженное на 2, поскольку в нашей задаче $c = 2$. В последней ячейке помещаем значение остатка. Осталось только записать результат в терминах математической символики.

Ответ:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7 = (x-2)\cdot(x^3 - 3x^2 - 4x - 11) - 15.$$

Проверьте результат, применив алгоритм деления лесенкой.
Задачи к параграфу на с. 196, п. 17–18. $\boxed{\Omega}$

§ 3.2. Разложение многочленов на множители

$\boxed{102\Leftrightarrow 125}$ В курсе средней школы мы чаще имеем дело с многочленами от одной переменной, при этом как переменную x, так и все коэффициенты многочлена считаем вещественными числами. Решить уравнение с многочленом в левой части $P_n(x) = 0$ – значит найти все его корни, т. е. такие значения x, при которых многочлен обращается в ноль. В свою очередь задача нахождения корней существенно облегчается, если удается разложить многочлен на множители. Но сначала о корнях. Мы пока признаем только вещественные корни. Для квадратного трехчлена эта задача выполнима, если его дискриминант неотрицателен. Многочлен третьей степени всегда имеет хотя бы один вещественный корень, и его корни находятся по формуле, открытой в XVI веке Кардано (с. 149). В этом же веке итальянским математиком Лудовико Феррари получено общее решение уравнения четвертой степени. Таким образом, после Феррари математики сосредоточились на задаче нахождения корней многочлена пятой степени, но не тут-то было. Только в XIX веке норвежский математик Нильс Абель доказал, что корни уравнения пятой степени в общем случае не выражаются через радикалы. Поэтому уравнения свыше четвертого порядка обычно решают численно, хотя есть приемы, позволяющие в отдельных конкретных случаях найти эти корни и аналитически. Если многочлен $P_n(x)$ удастся разложить на m множителей:

$$P_n(x) = P_{k_1}(x) \cdot P_{k_2}(x) \ldots P_{k_m}(x), \text{ где } k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n,$$

то множество решений исходного уравнения будет объединением множеств решений всех уравнений $P_{k_i}(x) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots m$. В данном параграфе мы рассмотрим несколько приемов разложения многочленов на множители. В первую очередь, это непосредственное использование известных алгебраических тождеств.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $x^4 - 18x^2 + 81$. $\boxed{\Omega\ 197}$

Решение:

$$x^4-18x^2+81 = \left(x^2\right)^2-2\cdot9\cdot x^2+9^2 = (x^2-9)^2 = (x-3)^2(x+3)^2.$$

Ответ: $x^4 - 18x^2 + 81 = (x-3)^2(x+3)^2$.

Пример 2. Разложить на множители многочлен $x^6 + y^6$. $\boxed{\Omega\ 197}$

Решение:

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= \left(x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3 = (x^2+y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = \\ &= (x^2+y^2)(x^4 + 2x^2y^2 + y^2 + y^4 - 3x^2y^2) = \\ &= (x^2+y^2)\left((x^2+y^2)^2 - (\sqrt{3}xy)^2\right) = \\ &= (x^2+y^2)(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2). \end{aligned}$$

Ответ: $x^6 + y^6 = (x^2+y^2)(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)$.

Часто все проблемы решает удачная группировка.

Пример 3. Разложить на множители многочлен $x^4 + 4x^2 - 5$. $\boxed{\Omega\ 197}$

Решение:

$$x^4 + 4x^2 - 5 = x^4 - x^2 + 5x^2 - 5 = x^2(x^2 - 1) + 5(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + 5) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 5).$$

Ответ: $x^4 + 4x^2 - 5 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 5)$.

Теперь немного теории.

Теорема 1. Многочлен n-го порядка $P_n(x)$ делится на линейный член $(x-c)$ без остатка тогда и только тогда, когда c является корнем многочлена.

Доказательство. Разделив многочлен $P_n(x)$ на линейный член $(x - c)$ так, как мы это делали в предыдущем параграфе, придем к равенству

$$P_n(x) = D_{n-1}(x) \cdot (x - c) + r,$$

где $D_{n-1}(x)$ – некоторый многочлен порядка $n-1$, а r – остаток. Если деление прошло без остатка, $r = 0$. Подставим в равенство $x = c$: правая часть обратится в ноль и равенство примет вид $P_n(c) = 0$, т. е. c – корень $P_n(x)$. И наоборот. Если c – корень, то при $x = c$ левая часть и линейный множитель в правой части обращаются в ноль, следовательно, $r = 0$. **Теорема доказана.**

Если коэффициенты многочлена в алгебраическом уравнении – рациональные числа, а значит, представимы в виде рациональных дробей, то умножив левую и правую части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей всех дробей, мы получим многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому следующие утверждения достаточно сформулировать только для многочленов с целыми коэффициентами.

Теорема 2. Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень, этот корень должен быть делителем свободного члена.

Доказательство. Пусть c – решение уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Тогда

$$a_n = -c \cdot (a_0c^{n-1} + a_1c^{n-2} + \cdots + a_{n-1}).$$

Таким образом, a_n является произведением c на другое целое число. **Теорема доказана**.

Когда мы применяли теорему Виета к квадратным трехчленам, то искали делители свободного члена. Оказывается, целые корни многочлена любого порядка с целыми коэффициентами являются делителям свободного члена. Проверка подстановкой может занять много времени. Например, если свободный член равен 60, он имеет 24 делителя:

$$\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm5; \pm6; \pm10; \pm12; \pm15; \pm20; \pm30; \pm60.$$

Если оказалось, что ни один из делителей свободного члена не является корнем, вам не повезло! Многочлен не имеет целых корней. Только что доказанную теорему можно обобщить на случай рационального корня.

Теорема 3. Если корнем многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами является рациональное число, представленное несократимой дробью $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, то числитель дроби p является делителем свободного члена, а знаменатель q – делителем старшего коэффициента.

Доказательство. Пусть $c = \frac{p}{q}$ – решение уравнения

$$P_n(x) = 0.$$

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0.$$

Умножив его левую и правую части на q^n, получим уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 q^n = -p \cdot \left(a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n\right).$$

Правая часть последнего равенства делится на p. Поскольку целые числа p и q не имеют общих делителей, a_0 делится на p.

Теперь перенесем в правую часть все моночлены, кроме a_0p^n:

$$a_0p^n = q \cdot \left(a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}\right).$$

Правая часть делится на q. Следовательно, старший коэффициент в левой части a_0 делится на q. **Теорема доказана**.
Таким образом, для проверки существования рациональных корней $\frac{p}{q}$ многочлена $P_n(x)$, мы должны выполнить следующие три шага:

1) найти все делители свободного члена;
2) найти все делители старшего члена;
3) проверить подстановкой все дроби, числитель которых найден на первом шаге, а знаменатель – на втором.

При этом надо помнить, что каждая пара натуральных чисел p и q будет представлять два рациональных числа: $\frac{p}{q}$ и $\left(-\frac{p}{q}\right)$. Если ни одна из рациональных дробей, составленных по известному правилу, не является корнем, то мы зря трудились: многочлен имеет только иррациональные корни. Но, если мы угадаем один из корней, мы можем понизить порядок многочлена, разделив его на $(x - \frac{p}{q})$.

Пример 4. Разложить на множители многочлен $\boxed{\mathit{\Omega}\ 197}$
$x^4 + 4x^2 - 5$.

Решение. Эту задачу мы уже решали в примере на с. 109 методом группировки. Теперь используем другой прием. Легко проверить подстановкой, что выражение обращается в ноль при $x = 1$ и $x = -1$. Тогда многочлен должен делиться без остатка на $(x-1)$ и $(x+1)$, а значит, и на $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 4x^2 - 5 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
x^4 \quad - x^2 & x^2 + 5 \\ \cline{1-1}
5x^2 - 5 & \\
5x^2 - 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ответ: $x^4 + 4x^2 - 5 = (x-1)(x+1)(x^2+5)$.

$\boxed{\Omega\ 198}$ **Пример 5.** Разложить на множители многочлен $x^3 + 2x^2 + x - 18$.

Решение. Заметим, что корнем многочлена является $x = 2$, и выполним деление многочлена на $x - 2$ по схеме Горнера, как показано на с. 106.

Степень	3	2	1	0	Остаток
a	1	2	1	−18	–
b	–	1	4	9	0

Таким образом, $x^3 + 2x^2 + x - 18 = (x-2)(x^2+4x+9)$. У квадратного трехчлена дискриминант меньше нуля, и дальнейшее разложение на множители невозможно.

Ответ: $x^3 + 2x^2 + x - 18 = (x-2)(x^2+4x+9)$.

$\boxed{\Omega\ 198}$ **Пример 6.** Разложить на множители многочлен

$$2x^3 + x^2 + 4x - 15.$$

Решение. Прежде всего в соответствии с теоремой 3 выполним три шага, указанные на с. 113:

1) все делители свободного члена: $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15;$

2) все делители старшего члена: $\pm 1; \pm 2;$

3) все возможные рациональные дроби, в которых числитель взят из 1-го пункта, а знаменатель – из 2-го:

$$\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15;\ \pm \frac{1}{2};\ \pm \frac{3}{2};\ \pm \frac{5}{2};\ \pm \frac{15}{2}.$$

Проверка подстановкой показывает, что из 18 перечисленных рациональных чисел только $\frac{3}{2}$ является корнем рассматриваемого многочлена. Действительно,

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3+4\frac{3}{2}-15=\frac{1}{2^3}\cdot(2\cdot 3^3+3^2+4\cdot 3\cdot 2^2-15\cdot 2^3)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot(54+18+48-120)=0.$$

Любой человек, имеющий навыки работы на персональном компьютере, легко может проверить все перечисленные подстановки, например в Excel. Таким образом, $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ является делителем рассматриваемого многочлена. Но мы, чтобы избежать операций с дробями, выполним деление многочлена на линейный член: $2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=(2x-3)$. Так как коэффициент при x в линейном члене не равен единице, схема Горднера здесь не сработает и мы выполним деление «лесенкой»:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 \ +x^2+4x-15 & 2x-3 \\
\cline{2-2}
2x^3-3x^2 \qquad\qquad & x^2+5 \\
\cline{1-1}
4x^2+4x \quad\; & \\
4x^2-6x \quad\; & \\
\cline{1-1}
10x \ \text{-}15 & \\
10x \ \text{-}15 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Поскольку $x^2 + 5$ не раскладывается на множители, задача решена.

Ответ: $2x^3 + x^2 + 4x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5)$.

Если коэффициенты многочлена четвертой степени симметричны относительно среднего члена, можно применить следующий прием.

$\boxed{\Omega\ 199}$ **Пример 7.** Разложить на множители многочлен

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1.$$

Решение. Очевидно, $x \neq 0$.

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = x^2\left(x^2 - 6x + 10 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= x^2\left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10\right).$$

Пусть $\left(x+\frac{1}{x}\right)=z$, тогда $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ и выражение примет вид

$$x^2(z^2-2-6z+10) \Rightarrow x^2(z^2-6z+8) \Rightarrow x^2(z-2)(z-4).$$

Выражение обращается в ноль при $z=2$ и $z=4$:
1) $z=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+1 \Rightarrow x_{1,2}=1.$
2) $z=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+1 \Rightarrow x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}.$
Ответ:

$$x^4-6x^3+10x^2-6x+1=(x-1)^2\left(x-(2-\sqrt{3})\right)\left(x-(2+\sqrt{3})\right).$$

Мы могли решить эту задачу и иначе: заметив, что 1 – корень многочлена, разделить многочлен на $(x-1)$ (пример на с. 106). Оказывается, 1 является и корнем частного, которое следует также разделить на $(x-1)$. В конечном итоге останется только найти корни квадратного трехчлена x^2-4x+1.

В данном случае проблему нахождения корней многочлена четвертой степени мы свели к задаче решения квадратных уравнений. Тот же прием позволяет понижать порядок уравнений более высокой степени.

Пример 8. Разложить на множители многочлен $\boxed{\Omega\ 199}$

$$x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1.$$

Решение. Вынесем за скобки величину x^3:

$$x^3\left(x^3-3x^2+2x-3+2\frac{1}{x}-3\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=$$

$$=x^3\left(\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right).$$

Пусть $\left(x+\frac{1}{x}\right)=z$, тогда $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$. Выведем аналогичную формулу и для $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3z\Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}x^3\left(\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right)&=\\ =x^3\left(z^3-3z-3(z^2-2)+2z-3\right)&=\\ =x^3\left(z^3-3z^2-z-3\right)=x^3\left(z^2(z-3)-(z-3)\right)&=\\ =x^3(z-3)(z+1)(z-1).&\end{aligned}$$

Рассмотрим три случая: $z=-1$, $z=1$ и $z=3$.

1) $z=-1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1\Rightarrow x^2+x+1=0$. Дискриминант меньше нуля. Вещественных корней нет.

2) $z=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x+1=0$. Дискриминант меньше

нуля. Вещественных корней нет.

3) $z = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ:

$$x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 =$$
$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Рассмотрим примеры, когда делителем многочлена является неполный квадрат вида $x^2 + q$. Начнем с многочлена третьей степени $P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Пусть

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (ax + b)(x^2 + q) = ax^3 + bx^2 + aqx + bq.$$

Задача легко решается методом группировки.

Пример 9. Разложить на множители многочлен $\boxed{\mathit{\Omega}\ 199}$

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 6.$$

Решение:

$$x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 2).$$

Ответ: $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = (2x - 3)(x^2 + 2)$.

Пусть теперь многочлен четвертой степени $P_4(x)$ имеет делитель вида $x^2 + q$:

$$\begin{aligned} a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + q) = \\ = ax^4 + bx^3 + (c + aq)x^2 + bqx + cq. \end{aligned}$$

Если приравнять коэффициенты многочленов в левой и правой частях двойного равенства, мы получим систему пяти уравнений для нахождения четырех неизвестных: a, b, c и q. Если система несовместна, наша гипотеза неверна.

$\boxed{\Omega\ 199}$ **Пример 10.** Разложить на множители многочлен

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2.$$

Решение. Допустим, многочлен имеет представление:

$$(ax^2 + bx + c)(x^2 + q) = ax^4 + bx^3 + (c + aq)x^2 + bqx + cq.$$

Тогда, приравняв соответствующие коэффициенты, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c + aq = 4 \\ bq = 1 \\ cq = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ q = 1 \\ c = 2 \\ c + aq = 4 \end{cases}$$

Система оказалась непротиворечивой.

Ответ:

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = (2x^2 + x + 2)(x^2 + 1).$$

Пример 11. Разложить на множители многочлен $\boxed{\mathit{\Omega}\ 199}$

$$24x^5 + 22x^4 - 73x^3 - 69x^2 + 3x + 9.$$

Решение. Допустим, многочлен имеет представление:

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(x^2+q) = ax^5+bx^4+(c+aq)x^3+(d+bq)x^2+cqx+dq.$$

Приравняв, как в предыдущем примере, коэффициенты многочлена в правой части последнего равенства к соответствующим коэффициентам исходного многочлена, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a = 24 \\ b = 22 \\ c + aq = -73 \\ d + bq = -69 \\ cq = 3 \\ dq = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 22 \\ \begin{cases} c + 24q = -73 \\ cq = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} d + 22q = -69 \\ dq = 9 \end{cases} \end{cases}$$

Решим отдельно системы

$$\begin{cases} c + 24q = -73 \\ cq = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} d + 22q = -69 \\ dq = 9, \end{cases}$$

сведя их к симметричным (с. 87):

$$1) \begin{cases} c + (24q) = -73 \\ c \cdot (24q) = 72 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 + 73z + 72 = 0 \Longrightarrow z_1 = -1 \text{ и } z_2 = -72.$$

$$1.1) \begin{cases} c = -1 \\ 24q = -72 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ q = -3 \end{cases}$$

$$1.2) \begin{cases} c = -72 \\ 24q = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = -72 \\ q = -\frac{1}{24} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} d + (22q) = -69 \\ d \cdot (22q) = 198 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 + 69z + 198 = 0 \Longrightarrow z_1 = -3 \text{ и } z_2 = -66.$$

$$2.1) \begin{cases} d = -3 \\ 22q = -66 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ q = -3 \end{cases}$$

$$2.2)\begin{cases} d=-66 \\ 22q=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-66 \\ q=-\frac{3}{22} \end{cases}$$

Рассмотренные системы имеют непротиворечивые решения:

$$\begin{cases} c=-1 \\ q=-3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} d=-3 \\ q=-3 \end{cases}$$

Таким образом, $a=24$; $b=22$; $c=-1$; $d=-3$; $q=-3$.

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(x^2+q)=(24x^3+22x^2-x-3)(x^2-3).$$

Чтобы разложить на множители выражение

$$24x^3+22x^2-x-3,$$

применим алгоритм поиска рациональных корней (с. 113). Первый корень, найденный в процессе перебора рациональных дробей, $x=-\frac{1}{2}$. Разделим многочлен третьего порядка на линейный член $2x+1$. Поскольку здесь коэффициент при x не единица, деление выполним «лесенкой» (с. 116). Деление, как и следовало ожидать, прошло без остатка. В результате мы получили квадратный трехчлен $12x^2+5x-3$. Его дискриминант $d=25-4\cdot 12\cdot(-2)=169=13^2$. Корни

$x_{1,2} = \frac{-5\pm13}{24} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$$12x^2 + 5x - 3 = 12\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Выражение $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Ответ:

$$24x^5 + 22x^4 - 73x^3 - 69x^2 + 3x + 9 =$$

$$= 24 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right).$$

Не будем забывать один из выжнейших математических методов – метод замены переменной.

$\boxed{\Omega\ 197}$ **Пример 12.** Разложить на множители выражение

$$(10x - 5)^2(10x - 4)(10x - 6) - 72.$$

Решение. Сделав замену $t = 10x - 5$, придем к трехчлену, квадратному относительно t^2:

$$t^2(t + 1)(t - 1) - 72 = \left(t^2\right)^2 - t^2 - 72 =$$

$$= (t^2 + 8)(t^2 - 9) = (t^2 + 8)(t - 3)(t + 3).$$

Подставим в последнее равенство выражение $t = 10x - 5$:

$$[(10x-5)^2+8](10x-8)(10x-2) = (100x^2-100x+33)(10x-8)(10x-2).$$

Ответ:

$$(10x-5)^2(10x-4)(10x-6)-72 = (100x^2-100x+33)(10x-8)(10x-2).$$

Иногда перед поиском корней многочлена полезно оценить их границы (с. 164).

Задачи к параграфу на с. 197, п. 19–26. $\boxed{\Omega}$

§ 3.3. Неравенства

$\boxed{107 \Leftrightarrow 132}$ Рассмотрим многочлен третьей степени с одной неизвестной, графиком которого является **кубическая парабола** (рис. 21). В общем виде уравнение кубической параболы выглядит так:

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Кубический многочлен имеет один или три вещественных корня, при этом допускаются **кратные корни**, т. е. совпадающие. Совпадать могут два корня, либо все три, в последнем случае многочлен представляется в виде $a(x-c)^3$. Функция $y = P_3(x)$ может иметь один локальный максимум и один локальный минимум, которые находятся из условия равенства нулю производной $P_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

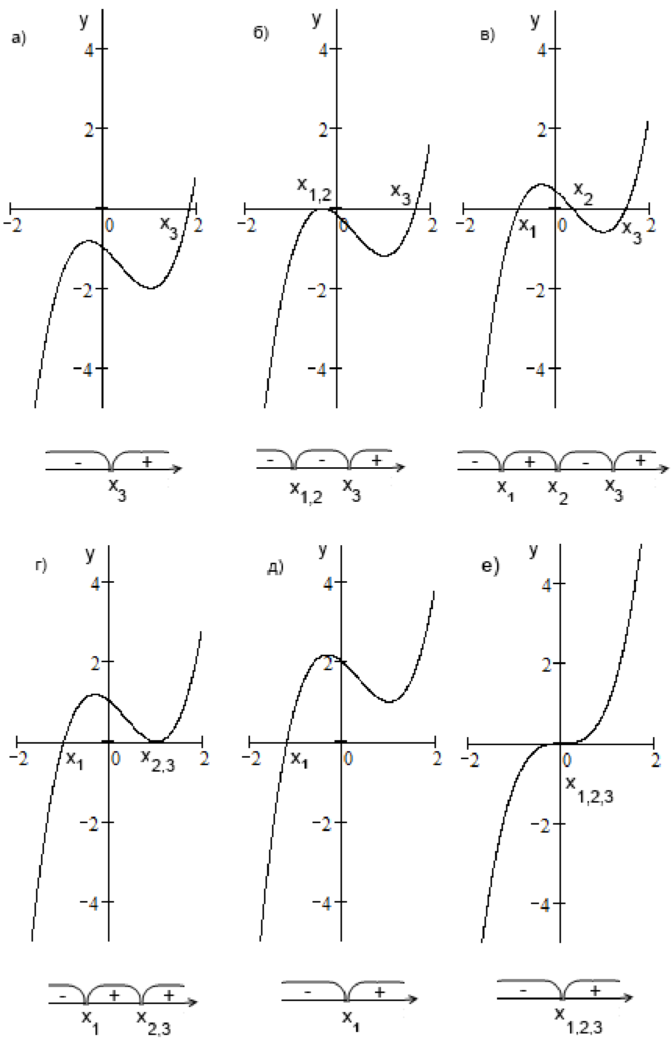

Рис. 21. Кубическая парабола

Если старший коэффициент $a > 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty.$$

Если $a < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty.$$

На рис. 21а изображен график кубической параболы $P_3(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Уравнение $P_3(x) = 0$ имеет единственное решение, соответствующее точке пересечения графика с осью Ox. Формула Кардано (с. 149) дает значение $x_3 = \frac{98+15\sqrt{33}}{9}$. Теперь начнем увеличивать свободный член d до тех пор, пока график не коснется оси Ox в точке локального максимума (см. рис. 21б). Это произойдет, когда свободный член достигнет значения $d = -\frac{5}{27}$ и уравнение примет вид $x^3 - x^2 - x - \frac{5}{27} = 0$. Теперь многочлен имеет кратный корень $x_{1,2} = -\frac{1}{3}$, соответствующий точке касания графика с осью Ox и $x_3 = -\frac{1}{3}$. Положим, $d = \frac{11}{27}$, многочлен примет вид $x^3 - x^2 - x + \frac{11}{27}$ (см. рис. 21в). Формула Кардано даст значения трех корней: $x_1 = \frac{1-2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ и $x_3 = \frac{1+2\sqrt{3}}{3}$. Поднимем график еще выше, так, чтобы он касался оси Ox в точке локального минимума (см. рис. 21г). Свободный член $d = 1$, и $P_3(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Многочлен легко раскладывается на множители $(x-1)^2(x+1)$ и имеет три корня: $x_1 = -1$ и кратный корень $x_{2,3} = 1$. Еще раз поднимем кубическую параболу вверх, увеличив d на 1 (см. рис. 21д). Многочлен примет вид $P_3(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ и теперь имеет один вещественный корень, который можно получить по формуле Кардано:

$$x_1 = \frac{(172+12\sqrt{177})^{\frac{2}{3}} - 2(172+12\sqrt{177})^{\frac{1}{3}}}{(172+12\sqrt{177})^{\frac{1}{3}}} \approx -1,2.$$

Уже само аналитическое представление корня объясняет, почему мы не спешим предъявить соответствующую формулу. На рис. 21е также изображена кубическая парабола $P_3(x) = x^3$, имеющая корень третьей кратности $x = 0$. Как видно на графиках (см. рис. 21а–21д), если корень имеет единичную кратность, многочлен в соответствующей точке пересекает ось Ox и меняет знак на противоположный. Корни единичной кратности называют **простыми**. Если встречается корень второй кратности, в этой точке график только касается оси Ox, но многочлен не меняет знак. Многочлен на рис. 21е в точке $x = 0$ имеет корень третьей кратности и в этой точке меняет знак на противоположный. Под каждым графиком помещена схема промежутков знакопостоянства, на основании которой можно сразу записывать ответы к соответствующим неравенствам.

$\boxed{\Omega\ 200}$ **Пример 1.** Решить неравенство $P_3(x) > 0$ (см. рис. 21а).

Ответ: $(x_3; +\infty)$.

$\boxed{\Omega\ 200}$ **Пример 2.** Решить неравенство $P_3(x) < 0$ (см. рис. 21б).

Ответ: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; x_3)$.

$\boxed{\Omega\ 200}$ **Пример 3.** Решить неравенство $P_3(x) \geq 0$ (см. рис. 21в).

Ответ: $[x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $P_3(x) \leq 0$ (см. рис. 21г). $\boxed{\Omega\ 200}$
Ответ: $(-\infty; x_1] \cup \{x_2\}$.
Теперь немного теории. До сих пор мы не определили понятие кратности корня. По теореме на с. 110, если число c является корнем многочлена $P_n(x)$, многочлен делится на $(x-c)$ без остатка. Иначе говоря, $P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x)$. Если имеет место равенство

$$P_n(x) = (x-c)^k Q_{n-k}(x),$$

но $P_n(x)$ не делится без остатка на $(x-c)^{k+1}$, то c является **k-кратным корнем** многочлена. Линейный член $(x-c)^k$ сохраняет знак при переходе через точку c, если k – четное число (см. рис. 21б и 21г), и меняет знак на противоположный в противном случае (см. рис. 21е). Одновременно при этом меняется и знак всего многочлена. Примем без доказательства тот факт, что любой многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение линейных членов, соответствующих вещественным корням, и квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Теперь можно сформулировать **алгоритм решения неравенств с многочленом в левой части:**
1) разложить многочлен на степени линейных множителей, соответствующие их кратности, и квадратные трехчлены с отрицательным дискриминантом;

2) отметить на оси корни, которые войдут в решение и которые следует исключить из множества решений;
3) отметить дугами промежутки знакопостоянства (рис. 22);
4) определить подстановкой знак на любом из промежутков знакопостоянства и расставить знаки для остальных по принципу чередования.

Ω 200 **Пример 5.** Решить неравенство

$$(x+2)x^2(x-1)^3(x-2)^2 > 0.$$

Решение. Многочлен в левой части неравенства обращается в ноль в точках $-2, 0, 1, 2$. Отметим их на схеме (рис. 22) крестиками, как не входящие в множество решений. Знак меняется только в точках, соответствующих корням нечетной кратности: (-2) и 1. Отметим промежутки знакопостоянства дугами и определим знак на одном из промежутков. Для этого подставим в многочлен, например, значение 3 из крайнего справа промежутка. Многочлен примет положительное значение. Теперь расставим по принципу чередования знаки в остальных промежутках, как показано на рис. 22.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ω 200 **Пример 6.** Решить неравенство

$$(x+3)(x+2)(x-3)(2-x)(x-1) \geq 0.$$

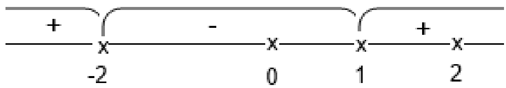

Рис. 22. Промежутки знакопостоянства из примера 5

Решение. Многочлен в левой части неравенства обращается в ноль в точках $-3, -2, 1, 2, 3$. Отметим их на схеме (рис. 23) жирными точками, поскольку они войдут в решение. Все корни простые, т. е. единичной кратности, а значит, делят вещественную ось на шесть промежутков знакопостоянства. Подставив в многочлен $x = 0$, найдем знак на интервале $(-2; 1)$. На этом интервале будет знак «$-$». Опять по принципу чередования расставим знаки в остальных интервалах, как показано на рис. 23.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [-2; 1] \cup [2; 3]$.

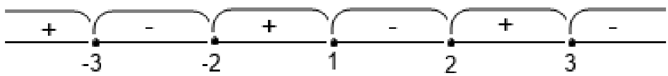

Рис. 23. Промежутки знакопостоянства из примера 6

Пример 7. Решить неравенство $\boxed{\Omega\ 200}$

$$(x^2 + x + 1)(x - 1)^2(x - 3)(2 - x)(x - 4)^3 \leq 0.$$

Решение. Многочлен в левой части неравенства обращается в ноль в точках $1, 3, 4$. Мы отметим их, как решения, жирными точками (рис. 24). Квадратный трехчлен $(x^2 + x + 1)$ при всех вещественных x сохраняет знак «+». Два корня – 3 и 4 – нечетной кратности, в них многочлен меняет знак. Таким образом, точки 3 и 4 разбивают вещественную ось на три промежутка знакопостоянства. Расставим на схеме (рис. 24) знаки и запишем ответ. Ответ включает подмножество, состоящее из **изолированной** точки 1, которая расположена внутри «знакоположительного» интервала.

Ответ: $\{1\} \cup [3; 4]$.

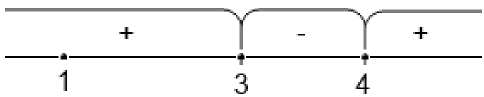

Рис. 24. Промежутки знакопостоянства из примера 7

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 200, п. 27–28.

§ 3.4. Комплексные корни многочлена

$\boxed{125 \Leftrightarrow 149}$ На протяжении всей истории развития человеческого общества развивалось и понятие «число». В ряде открытых европейскими путешественниками первобытных племен Африки и Океании люди знали только натуральные числа: 1, 2 и 3. Все, что больше, – это «много». Наверное, также обстояло дело с арифметикой и у наших далеких предков. Сейчас это может показаться смешным, но такая числовая система вполне удовлетворяла потребности их общественной практики. Древние греки уже рассматривали не только натуральные числа, но и их отношения, т. е. положительные рациональные числа, а в школе Пифагора знали о существовании величин, которые нельзя измерить и в этой числовой системе. Так, диагональ единичного квадрата не может быть измерена рациональной дробью. Сейчас мы сказали бы, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения на множестве рациональных чисел или не существует таких целых чисел n и m, что $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$. В средневековой Европе величины, не измеряемые отношением целых чисел, называли иррациональными, т. е. «неразумными». Только в XVI веке эти числа несколько реабилитировал Симон Стевин, внедривший в обиход десятичные дроби. Наконец, в XIX веке благодаря трудам Георга Кантора, Карла Вейерштрасса и Юлиуса Вильгельма Рихарда Дедекинда иррациональные числа получили строгое определение, а следовательно, прописку на числовой оси. Множество рациональных чисел, дополненное иррациональными, назвали множеством вещественных чисел. Оказалось, что иррациональные числа «заткнули» все дыры на числовой оси и теперь любая величина может быть измерена. На этом в истории развития «числа» можно было бы поставить жирную точку, если бы не одна беда. Еще Кардано при нахождении корней многочленов третьей степени, даже если они были вещественными, использовал вспомогательные величины вида $a+b\sqrt{-1}$. Существование таких величин не укладывалось в традиционное мировоззрение, и сам Кардано считал их лишенными какого-либо смысла, однако совсем отказаться от их использования не получалось. Декарт также рассматривал их как нечто нереальное, и с его легкой руки в XVI–XVII веках величины вида $a+b\sqrt{-1}$ стали называть мнимыми. Впрочем, как мы заметили выше, тогда даже иррациональные числа еще «не добились равноправия» на вещественной оси да и на отрицательные нередко посматривали неодобрительно даже математики. И все-таки практическая польза постепенно теснила «эстетику». В XVIII веке Леонард Эйлер ввел мнимую единицу $i=\sqrt{-1}$, а в XIX веке Карл Фридрих Гаусс доказал **алгебраическую замкнутость** множества комплексных чисел, т. е. чисел вида $a+ib$. Последнее означает, что любой многочлен степени выше нулевой имеет хотя бы один комплесный корень. Если степень многочлена $P_n(z)$ больше единицы и z_1 его комплексный корень, то, разделив многочлен на линейный член $(z-z_1)$, мы получим многочлен степени на единицу меньшей (с. 102), который также должен иметь по крайней мере один комплексный корень. Продолжим процесс понижения степени многочлена до тех пор, пока в результате деления не получим многочлен нулевой степени a_0. Теперь мы можем утверждать, что любой многочлен n-й степени имеет n комплексных корней и

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Сейчас **мнимую единицу** определяют как некую величину (не являющуюся вещественным числом), для которой верно утверждение $i^2 = -1$, а **комплексное число** как выражение вида $x + iy$, где $x, y \in \Re$. Если $z = x + iy$, то вещественное число $x = Re(z)$ называют **действительной частью**, а $y = Im(z)$ – **мнимой частью**.

Сразу сделаем два важных замечания. Иногда мнимую единицу i определяют как решение уравнения $x^2 = -1$. Такое определение некорректно, поскольку точно также решением будет и $(-i)$. И второе. Поначалу сложилась практика в записи комплексного числа ставить отрицательное число под знак квадратного корня. Тогда

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Но, с другой стороны,

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1.$$

Подобных недоразумений можно избежать, если, например, вместо $\sqrt{-3}$ писать $i\sqrt{3}$, т. е. не допускать записи отрицательного числа под корнем. Дело в том, что обычно символом $\sqrt{\ }$ мы обозначаем арифметический квадратный корень, определяемый как положительное вещественное число, квадрат которого равен подкоренному выражению. Данное определение исключает возможность нахождения под знаком квадратного корня отрицательного числа. В более широком смысле под квадратным корнем подразумевают решение уравнения $z^2 = a$. Уравнение имеет два корня. Определенный таким образом «корень» сложно использовать в выражениях.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда основные арифметические операции с комплексными числами определяются так:

$$1)\ z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$2)\ z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$3)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Имеет место равенство $a(x+iy) = ax+iy$. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$Re(z_1) = Re(z_2) \text{ и } Im(z_1) = Im(z_2).$$

Иначе говоря, $(x_1 = x_2)\&(y_1 = y_2)$. Отношение неравенства для комплексных чисел не определено. Теперь обобщим алгоритм нахождения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (с. 59) на случай произвольного дискриминанта. Пусть $a \neq 0$. Тогда квадратный трехчлен имеет два комплексных корня. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Корни

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D \geq 0; \\ \frac{b\pm i\sqrt{-D}}{2a}, \text{ если } D < 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы избегаем ситуаций, когда под знаком квадратного корня может оказаться отрицательное число.

Пример 1. Найти корни квадратного трехчлена $2x^2+2x+3$. $\boxed{\mathit{\Omega}\ 200}$

Решение. На с. 61 мы установили, что этот трехчлен не имеет вещественных корней. Найдем комплексные:

$$D = 4 - 24 = -20 < 0 \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{20}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 2. Найти корни многочлена $2x^3 + x^2 + 4x - 15$. $\boxed{\mathit{\Omega}\ 201}$

Решение. В примере на с. 116 мы разложили этот многочлен на множители:

$$2x^3 + x^2 + 4x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5).$$

Корни неполного квадратного трехчлена x^2+5: $x_{2,3} = \pm i\sqrt{5}$.
Ответ: $x_1 = 1,5$; $x_2 = -i\sqrt{5}$ и $x_3 = i\sqrt{5}$.

Ω 201 **Пример 3.** Найти корни многочленаа $2x^4+x^3+4x^2+x+2$.
Решение. В примере на с. 120 мы разложили многочлен в произведение двух квадратных трехчленов:

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = (2x^2 + x + 2)(x^2 + 1).$$

Рассмотрим первый квадратный трехчлен $2x^2 + x + 2$.
$D = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}$.
Корни неполного квадратного трехчлена: $x_{3,4} = \pm i$.
Ответ:

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{15}}{4}; \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{15}}{4}; \quad x_3 = -i \quad \text{и} \quad x_4 = i.$$

Комплексному числу $x+iy$ можно поставить в соответствие точку плоскости с координатами $(x;y)$. Таким образом, если раньше мы говорили о вещественной оси, то теперь можем говорить о комплексной плоскости. Комплексные числа образуют векторное пространство, базисом которого являются вещественная единица *1* и мнимая единица i, и складываются по правилу сложения векторов (с. 136): если $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z1 + z2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (рис. 25). Также $az = ax + iay$.

Для задания точки на плоскости, кроме декартовых прямо-

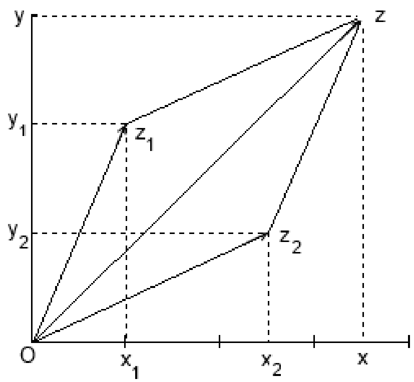

Рис. 25. Сумма комплексных чисел

угольных координат, в математике часто используют и так называемые полярные координаты. Причем в повседневной жизни последние нам гораздо привычней. Действительно, если человек в лесу спросит у вас: «Как пройти в Ольховку?», то что вы ответите? Назовете координаты квадрата, в котором находится село? Нет! Вы скажете, что «это в двух километрах на северо-западе», т. е. укажете направление и расстояние относительно вашего текущего местонахождения. Это и есть полярные координаты. Мы введем их, отталкиваясь от декартовых. Пусть M – точка плоскости с кординатами $(x; y)$ (рис. 26). Проведем из начала координат O в точку M радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Пусть радиус-вектор образует с осью Ox угол ϕ, а $r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – длина вектора. Направление и расстояние образуют пару полярных координат $(\phi; r)$, задающих положение точки M. Для

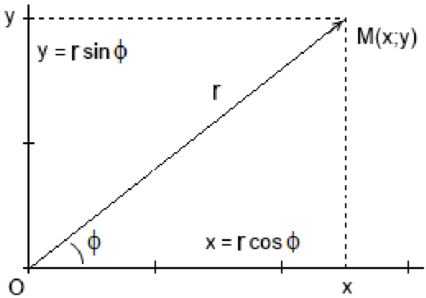

Рис. 26. Тригонометрическое представление комплексного числа

всех точек плоскости, кроме начала координат, имеет место взаимнооднозначное соответствие между парами координат $(x; y)$ и $(\phi; r)$, задаваемое уравнениями

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi; \\ y = r \cdot \sin\phi. \end{cases}$$

Комплексное число можно представить в **тригонометрической форме**:

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi),$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют **модулем**, а $\phi = Arg(z)$ – **аргументом** числа z. Леонард Эйлер расширил область определения элементарных и ряда других функций на комплексную плоскость и установил тождество

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi,$$

которое называют **формулой Эйлера**. Таким образом, в **теории функций комплексной переменной** экспонента выражается через тригонометрические функции и наоборот:

$$\begin{cases} \cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}; \\ \sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2}. \end{cases}$$

Отсюда еще одна форма представления комплексного числа – экспоненциальная:

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi) = re^{i\phi} = e^{\ln r + i\phi}.$$

Из формулы Эйлера следует интересное отношение

$$e^{i\pi} = -1.$$

На множестве вещественных чисел мы лишены возможности видеть эти связи, как человек, рассматривающий с берега моря живописные острова, не подозревает, что они всего лишь вершины сложной горной системы подводного царства. На комплексной плоскости «в порядке вещей» многое из того, что категорически запрещено на вещественной оси. Здесь существуют решения уравнений $sin(x) = 5$, $2^x = -3$ и т. д. Конечно, и теперь мы рассматриваем комплексное число как некую абстракцию, но не в большей мере, чем число «три». Ведь числа «три» также в природе не существует! Естественно возникает вопрос: не придется ли для решения других уравнений, например $x^4 + 1 = 0$, и дальше расширять понятие «число». Оказывается, на множестве комплексных чисел любой многочлен, как с действительными, так и с комплексными коэффициентами, имеет корни. Однако вернемся к тригонометрической форме. Как найти аргумент и модуль комплексного числа? Если $z = x + iy$, то $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумет $\phi = Arg(z)$ можно определить, приняв во внимание, что $\forall\ t \in \Re\ arccos\ t \in (0; \pi)$, следующим образом (рис. 27):

$$\phi = \begin{cases} arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ если } y \geq 0; \\ -arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ если } y < 0. \end{cases}$$

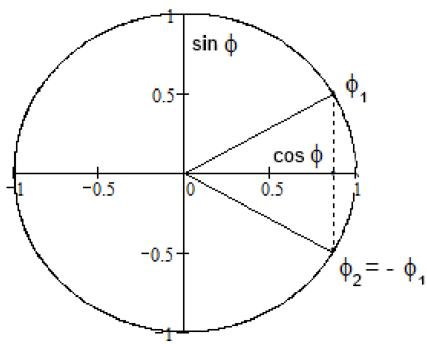

Рис. 27. Аргумент комплексного числа

Ω 202 **Пример 4.** Преобразовать комплексное число $z = 2 + i2$ в тригонометрическую форму.

Решение:
$z = 2 + i2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$
Ответ: $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$
Пример 5. Преобразовать комплексное число $\boxed{\mathit{\Omega}\ 202}$
$z = 3 + i4$ в тригонометрическую форму.
Решение: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow z = 3 + i4 = 5\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$.
Ответ: $5(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)$, где $\phi = arccos\frac{3}{5}$.
Пример 6. Преобразовать комплексное число $z = 5 - i7$ $\boxed{\mathit{\Omega}\ 202}$
в тригонометрическую форму.
Решение:
$|z| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} \Rightarrow z = 5 - i7 = \sqrt{74}\left(\frac{5}{\sqrt{74}} + i\frac{-7}{\sqrt{74}}\right).$
Ответ: $\sqrt{74}(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)$, где $\phi = -arccos\frac{5}{\sqrt{74}}$.
Операции сложения и вычитания комплексных чисел подчиняются правилу сложения и вычитания векторов (рис. 25). Но формулы умножения и деления комплексных чисел выглядят сложновато (с. 136).
Попробуем теперь выполнить эти операции с числами в тригонометрическом представлении. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha), \quad z_2 = r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta).$$

Тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) =$

$$= r_1 r_2[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)] =$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Таким образом, при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (рис. 28).

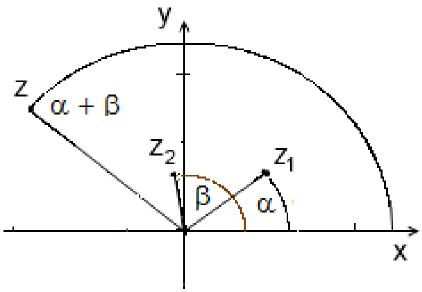

Рис. 28. Умножение комплексных чисел

Аналогично

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)(\cos\beta - i\cdot\sin\beta)}{r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)(\cos\beta - i\cdot\sin\beta)} =$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)].$$

Следовательно,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2),$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2).$$

В частности,

$$\frac{1}{\cos\phi + i\cdot\sin\phi} = \cos\phi - i\cdot\sin\phi.$$

Поскольку целая степень числа означает многократное произведение,

$$z^n = [r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\cdot\sin n\phi).$$

Последнее тождество известно как **формула Муавра**.
Отрицательная степень

$$z^{-n} = [r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)]^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\phi - i\cdot\sin n\phi).$$

Пример 7. Найти девятую степень числа $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. $\boxed{\mathit{\Omega}\ 202}$
Решение:

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^9 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Ответ: $-i$.
Пусть $z = r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)$ и требуется найти все решения уравнения $z^n = \rho(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$.

$$r^n(\cos\phi n + i\sin\phi n) = \rho(\cos(\alpha + 2\pi k) + i\cdot\sin(\alpha + 2\pi k)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^n = \rho,\ \phi n = \alpha + 2\pi k \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho},\ \phi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n},$$

где k=0,1,..., n-1. Следовательно,

$$z_{0,1,\cdots n-1} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right).$$

Если k принимает значения $0, 1, \dots n-1$, то z – принимает n различных значений. В следующем параграфе нам понадобятся все кубические корни из 1, т. е. все решения уравнения $z^n = 1$. Представим вещественную единицу в тригонометрической форме: $z^n = \cos 2\pi k + i \cdot \sin 2\pi k$. Тогда

$$z = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi k}{3}, \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

Кубические корни из единицы показаны на диаграмме (рис. 29). Таким образом, $z_1 = 1, \quad z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

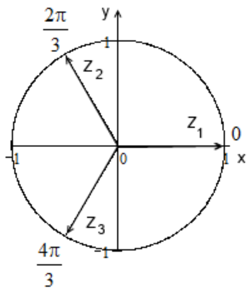

Рис. 29. Кубические корни единицы

Ω 202 **Пример 8.** Решить уравнение $z^3 = 5 + i \cdot 5$.
Решение:

$$z^3 = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Подставляя поочередно в правую часть равенства значения k, получим

Ответ:

$$z_1 = \sqrt[6]{50}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[3]{20}}{4}\left[1+\sqrt{3}+i\cdot(-1+\sqrt{3})\right];$$

$$z_2 = \sqrt[6]{50}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[3]{20}}{2}\,(-1+i);$$

$$z_3 = \sqrt[6]{50}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[3]{20}}{4}\left[1-\sqrt{3}+i\cdot(-1-\sqrt{3})\right].$$

Прежде чем перейти к следующему вопросу, коротко коснемся проблемы графического представления многочлена, определенного на комплексной плоскости. Пусть дан многочлен с вещественными коэффициентами $f(z) = z^3+z^2+z+1$ от комплексной переменной $z = x + iy$. Его график для действительных значений z, т. е. для $z = x$, изображен на рис. 30г. Как видно на графике, многочлен имеет один вещественный корень $z = -1$. Теперь рассмотрим комплексные значения $z = x + iy$. В таком случае и $f(z)$ – комплексное число. Для построения графика функции, отображающей комплексную плоскость на комплексную плоскость, нам пришлось бы выйти в четырехмерное пространство, но мы поступим проще, рассмотрев отдельно графики $Re[f(x)]$ и $Im[f(x)]$, т. е. графики действительной и мнимой частей функции $f(z)$. Каждый график – это поверхность в трехмерном пространстве, а поверхность можно задать линиями уровня, как на географической карте. Такой график мы уже видели на рис. 13а (с. 73). График вещественной части

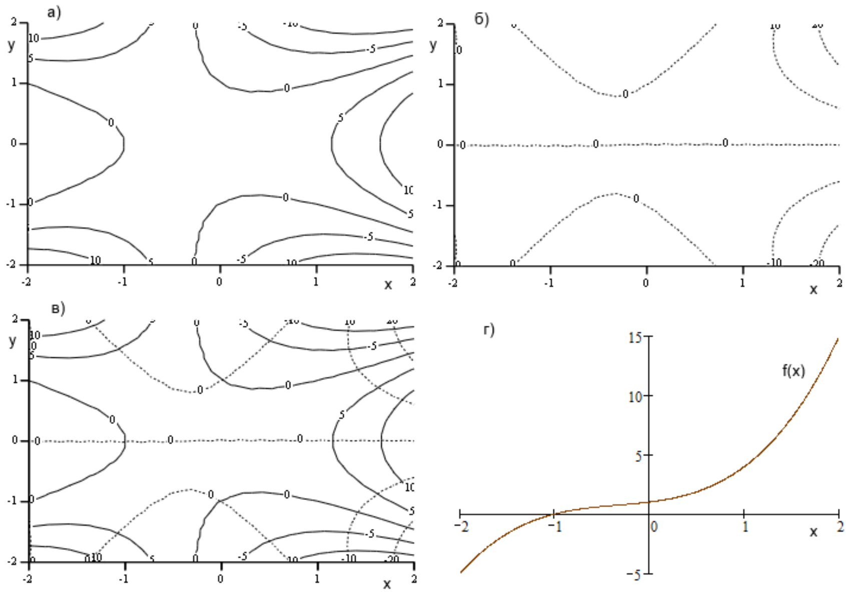

Рис. 30. Графики многочлена $z^3 + z^2 + z + 1$

$f(z)$ показан на рис. 30а, комплексной – на рис. 30б. Обратите внимание на нулевые линии уровня. На рис. 30б одна из таких линий задана уравнением $y = 0$, поскольку действительным значениям z соответствуют действительные значения функции. Корнями многочлена будут те значения z, для которых одновременно $Re[f(x)] = 0$ и $Im[f(x)] = 0$, т. е. точки пересечения нулевых линий уровня, представленных на рис. 30а и 30б. На рис. 30в мы разместили оба графика на одной комплексной плоскости. Сплошные линии уровня соответствуют действительной, а пунктирные – комплексной части функции $f(z)$. На графике видны точки пересечения нулевых линий. Это точки $(-1; 0)$, $(0; 1)$ и $(0; -1)$. Поскольку уже известен один действительный корень $z = -1$, мы можем разделить многочлен $z^3 + z^2 + z + 1$ на линейный член $(x + 1)$ и найти два комплексных корня полученного квадратного трехчлена $z^2 + 1$. Таким образом, мы подтвердили расчетом обнаруженные на рис. 30в корни многочлена $z^3 + z^2 + z + 1$. Это числа (-1), i и $-i$.

Вы познакомились с комплексными числами. Функции комплексного переменного нашли широкое применение в гидромеханике, аэродинамике, электротехнике, теории поля и других областях науки и техники.

Задачи к параграфу на с. 200, п. 29–35. $\boxed{\Omega}$

§ 3.5. Формула Кардано

$\boxed{132 \Leftrightarrow 161}$ Несмотря на последние достижения в области кораблестроения и судовождения, в хорошем мореходном училище курсантов обязательно учат ходить под парусом, поскольку только так они смогут почувствовать море. Вот и нам формулы Кардано и Феррари помогут «почувствовать» алгебраические уравнения. Формула Кардано служит для нахождения корней многочленов третьей степени. Согласно теории (с. 135), такой многочлен имеет три комплексных корня. При этом, как показано на рис. 21 (с. 126), у многочлена с вещественными коэффициентами может быть один вещественный (рис. 21а и 21д) или же три вещественных корня. Если все корни вещественные, возможны случаи: все корни простые (рис. 21в), существует корень второй (рис. 21б и 21г) или третьей (рис. 21е) кратности. Пусть дано уравнение, в левой части которого находится многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Путем подстановки $x = y - \frac{a}{3}$ перейдем к уравнению с **неполным многочленом** в левой части $y^3 + py + q = 0$. Теперь сделаем еще одну подстановку $y = z - \frac{p}{3z}$, в результате которой получим:

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0 \Rightarrow z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно z^3.
I. В случае положительного дискриминанта его решения:

$$z_{1,2}^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{Q}, \quad \text{где } Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

$$\text{Тогда } z_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{Q}, \ \ z_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{Q}, \text{ где } Q > 0.$$

Уравнение $z^3 = a$, где $a > 0$, - имеет три решения: одно вещественное и два комплексно-сопряженных. Эти решения получаются как произведения $\sqrt[3]{a}$ на корни из единицы, т. е. на решения уравнения $z^3 = 1$ (рис. 29 на с. 146):

$$\sqrt[3]{a};\ \ \sqrt[3]{a}\cdot\varepsilon = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } \sqrt[3]{a}\cdot\varepsilon^2 = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Мы перешли к переменной z путем подстановки $y = z - \frac{p}{3z}$. Возьмем вещественное значение z_1:

$$-\frac{p}{3z_1} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = -\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{(\frac{q}{2})^2 - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} =$$

$$= -\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3\left(-\frac{p}{3}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = z_2. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = z_1 - \frac{p}{3z_1} = z_1 + z_2.$$

Заметим, что

$$\left((\varepsilon)^3 = 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} = (\varepsilon)^2 \\ \frac{1}{(\varepsilon)^2} = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = -\frac{p}{3z_1\varepsilon} = z_2\varepsilon^2 \\ z_2 = -\frac{p}{3z_1\varepsilon^2} = z_2\varepsilon \end{cases}$$

В последнем нетрудно убедиться, проделав соответствующие операции с комплексными числами (с. 136). Тогда

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \cdot (\varepsilon)^2;$$

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot (\varepsilon)^2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon.$$

Многочлен $y^2 + px + q$ имеет корни:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}};$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon^2;$$

$$y_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \cdot \varepsilon.$$

Теперь нетрудно найти корни исходного многочлена:
$x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$ и $x_3 = y_3 - \frac{a}{3}$.

II. Рассмотрим случай $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Тогда

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ y_{2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}(\varepsilon + \varepsilon^2)$$

и, поскольку $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$,

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ y_{2,3} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Многочлен имеет три вещественных корня: один простой и два кратных. Если же уравнение имеет корень третьей кратности, после первой подстановки неполный многочлен примет вид $y^3 = 0$. Это означает, что $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{a}{3}$.

III. Осталось рассмотреть случай $Q < 0$. Тогда квадратное относительно z^3 уравнение

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \text{ имеет решения:}$$
$$z^3_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = -\frac{q}{2} \pm i \cdot \sqrt{-Q}.$$

Запишем их в тригонометрической форме:

$$r = |z^3_{1,2}| = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^3 - Q} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \begin{cases} \cos\phi = -\frac{q/2}{r}; \\ \sin\phi = -\frac{Q}{r}. \end{cases}$$

Неравенство $Q < 0$ выполняется только при $p < 0$. Поэтому в выражении r под корнем будет неотрицательное число. Таким образом,

$$z_1^3 = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi) \;\text{ и }\; z_2^3 = r(\cos\phi - i \cdot \sin\phi).$$

По формуле Муавра, уравнения имеют решения:

$$z_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{\phi + 2\pi k}{3}\right) \quad \text{и}$$
$$z_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{3} - i \cdot \sin\frac{\phi + 2\pi k}{3}\right),$$
$$\text{где } k = 0; 1; 2,\ \sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

$$-\frac{p}{3z_1}=\frac{-p}{3\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\phi+2\pi k}{3}\right)}=$$
$$=\frac{-p\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}-i\cdot\sin\frac{\phi+2\pi k}{3}\right)}{3\sqrt[3]{r}\left(\cos^2\frac{\phi+2\pi k}{3}+\sin^2\frac{\phi+2\pi k}{3}\right)}=$$
$$=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}-i\cdot\sin\frac{\phi+2\pi k}{3}\right)=z_2\Rightarrow y_1=z_1+z_2.$$

Поскольку z_1 и z_2 при любом k – комплексно-сопряженные величины, $z_1+z_2=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}$ и неполное кубическое уравнение будет иметь вещественные решения:

$$y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\phi}{3},\quad y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\phi+2\pi}{3}\ \text{ и }\ 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\phi+4\pi}{3}.$$

Корни исходного многочлена $x_k=y_k-\frac{a}{3}$.

Таким образом, если $Q=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$:

1) при $Q>0$ уравнение имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня;

2) при $Q=0$ – три вещественных корня: один простой и два кратных;

3) при $Q<0$ – три простых вещественных корня.

$\boxed{\mathit{\Omega}\ 203}$ **Пример 1.** Найти корни многочлена x^3-3x^2-3x-4.

Решение. Выполнив подстановку $x=y+1$, получим многочлен y^3-6y-9. Найдем

$$Q=\left(-\frac{6}{3}\right)^3+\left(-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{49}{4}.$$

Поскольку $Q > 0$, воспользуемся алгоритмом I (с. 150).

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 1; \quad z_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = 2;$$

$$y_1 = z_1 + z_2 = 3;$$

$$y_2 = z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$y_3 = z_1\varepsilon^2 + z_2\varepsilon = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Вернемся к переменной $x = y + 1$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Эту задачу можно решить иначе, заметив, что 4 является корнем, и разделив многочлен на $(x-4)$ (с. 114):

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x^2 + x + 1),$$

Остается только найти корни квадратного трехчлена.

Пример 2. Найти корни многочлена $x^3 + 2x - 3$. $\boxed{\Omega\ 203}$

Решение. Многочлен неполный, и мы сразу определим $Q = \frac{9}{4} + \frac{8}{27} = \frac{825}{4 \cdot 81} > 0$. Найдем

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{825}}{18}} = \sqrt[3]{\frac{27 + 5\sqrt{33}}{18}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{\frac{27 - 5\sqrt{33}}{18}}.$$

Из теории мы знаем, что при $Q > 0$ многочлен должен иметь один вещественный корень и два комплексно-сопряженных.

Вещественный корень $x = 1$ «виден невооруженным глазом». Но у нас он равен

$$z_1 + z_2 = \sqrt[3]{\frac{27 + 5\sqrt{33}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{27 - 5\sqrt{33}}{18}},$$

что мало напоминает единицу. Тем не менее никакой ошибки здесь нет: просто на этот раз мы наткнулись на «подводный камень». Дело в том, что

$$\sqrt[3]{\frac{27 + 5\sqrt{33}}{18}} = \frac{3 + \sqrt{33}}{6}, \quad \text{а} \quad \sqrt[3]{\frac{27 - 5\sqrt{33}}{18}} = \frac{3 - \sqrt{33}}{6}.$$

Действительно, умножим числитель и знаменатель дроби под знаком кубического корня на такое число, чтобы кубический корень из знаменателя стал целым числом; после соответствующей группировки выражение в числителе окажется полным кубом:

$$\sqrt[3]{\frac{27 + 5\sqrt{33}}{18}} = \sqrt[3]{\frac{324 + 60\sqrt{33}}{216}} = \\ = \frac{\sqrt[3]{27 + 3 \cdot 9\sqrt{33} + 3 \cdot 3 \cdot 33 + 33\sqrt{33}}}{6} = \\ = \frac{\sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{33}\right)^3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{33}}{6}.$$

Аналогично поступим и для z_2. Это не всегда приводит к результату, зато трудно найти лучший тренажер для тренировки интуиции. Если выражения для z_1 и z_2 не удалось упростить, можно с тем же успехом использовать и изначально полученные громоздкие выражения. В таком случае ваше выражение может не совпадать с выражением в ответе. Возможно, наш совет не всем понравится, но мы предлагаем тогда вычислить на компьюторе и сравнить значения ваших выражений со значениями выражений в ответе. В любом случае это даст информацию для размышлений. Таким образом,

$$x_1 = z_1 + z_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{6} + \frac{3-\sqrt{33}}{6} = 1.$$

Как и в предыдущем примере, найдем комплексные корни:

$$x_2 = z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 =$$
$$= \frac{3+\sqrt{33}}{6}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3-\sqrt{33}}{6}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$x_3 = z_1\varepsilon^2 + z_2\varepsilon =$$
$$= \frac{3+\sqrt{33}}{6}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3-\sqrt{33}}{6}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Осталось раскрыть скобки и привести подобные.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}$.

$\boxed{\Omega\ 203}$ **Пример 3.** Найти корни многочлена $x^3 + x^2 - 16x + 20$.

Решение. Введем замену переменной $x = y - \frac{1}{3}$, раскроем скобки и приведем подобные. В результате получим многочлен $y^3 - \frac{49}{3}y + \frac{686}{27}$.

$$\text{Найдем } Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{342}{27}\right)^2 - \left(\frac{49}{9}\right)^3 = 0.$$

Поскольку $Q = 0$, обратимся к алгоритму II (с. 152).

$$z_1^3 = z_2^3 = -\frac{q}{2} = -\left(\frac{7}{3}\right)^3 \Rightarrow z_1 = z_2 = -\left(\frac{7}{3}\right).$$

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1.$$

$$y_1 = z_1 + z_2 = -\frac{14}{3}; \quad y_2 = y_3 = -\frac{7}{3}(\varepsilon + \varepsilon^2) = \frac{7}{3}.$$

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{3} = -5; \quad x_2 = x_3 = y_2 - \frac{1}{3} = 2.$$

Ответ: $x_1 = -5$; $x_2 = x_3 = 2$.

$\boxed{\Omega\ 203}$ **Пример 4.** Найти корни многочлена $x^3 - 6x^2 - 3x + 26$.

Решение. Подстановка $x = y + 2$ даст многочлен $y^3 - 15y + 4$:

$$Q = 4 - 125 = -121, \quad z_{1,2}^3 = -2 \pm i \cdot 11.$$

Теперь мы можем действовать в соответствии с алгоритмом III (с. 153) или идти своим тернистым путем.

Первый способ. Приведем правую часть последнего ра-

венства к тригонометрической форме:
$-2 \pm i \cdot 11 = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$, где $r = \sqrt{4+121} = \sqrt{125}$, $\phi = arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{125}}\right)$. Тогда

$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3} + i\sqrt{5}\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}\right);$$
$$z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3} - i\sqrt{5}\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi}{3},\ y_2 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi+2\pi}{3},\ y_3 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi+4\pi}{3},$$

где $k = 0, 1, 2$. Таким образом,

$$x_1 = y_1 + 2 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi}{3} \approx 5,732;$$
$$x_2 = y_2 + 2 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi+2\pi}{3} = -2;$$
$$x_3 = y_3 + 2\sqrt{5}\cos\frac{\phi+4\pi}{3} \approx 2,268,$$
$$\text{где } \phi = arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{125}}\right).$$

Второй способ:

$z_1^3 = -2 + i \cdot 11 = -8 + 12i + 6 - i = (-2+i)^3 \Rightarrow z_1 = -2 + i.$

Здесь снова сработала «угадайка», и такие комбинации проходят только с целыми числами. В общем случае корни уравнения не выражаются через его коэффициенты при помощи радикалов с действительными подкоренными выражениями. Аналогично $z_2 = -2 - i$ и, таким образом,

$$y_1 = z_1 + z_2 = -4;$$

$$y_2 = z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 = z_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + z_2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3};$$

$$y_3 = z_1\varepsilon^2 + z_2\varepsilon = z_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + z_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}.$$

Значит, $x_1 = y_1 + 2 = -2;\quad x_2 = y_1 + 2 = 4 - \sqrt{3} \approx 2,268;$

$$x_3 = y_3 + 2 = 4 + \sqrt{3} \approx 5,732.$$

Оба способа решения задачи дают один ответ. Разумеется, нумерация корней не обязана совпадать. По форме ответ во втором случае выглядит иначе, и не всегда просто доказать тождественность соответствующих выражений. Если приведенный в конце книги ответ к задаче не совпадает с вашим, полезно найти численные значения результатов с некоторой точностью. Если они не совпадают – кто-то из нас ошибся.

Ответ: $x_1 = -2,\quad x_2 = 4 - \sqrt{3},\quad x_3 = 4 + \sqrt{3}.$

В инженерных приложениях часто представляет интерес значение корня только с точностью до заданного количества знаков после запятой. В таком случае гораздо эффективней работают численные методы, с которыми мы обязательно познакомимся в одном из следующих выпусков нашей серии. Аналитическое представление корней кубического многочлена может иметь очень даже громоздкий вид. При этом, чтобы примерно установить место корня на вещественной оси, нам все равно потребуется поработать. Поэтому аналитическое решение интересно прежде всего в тех случаях, когда мы в дальнейшем собираемся исследовать полученное решение. Задачи, которые приведены в конце книги, предназначены для закрепления теории, и их решение не предполагает чрезмерно громоздких выкладок.

Задачи к параграфу на с. 203, п. 36–38. $\boxed{\Omega}$

§ 3.6. Формула Феррари

$\boxed{149\Leftrightarrow 164}$ Первый шаг алгоритма нахождения корней многочлена четвертой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

также связан с заменой переменной. Сделаем подстановку $x = y - \frac{a}{4}$, раскроем скобки и приведем подобные. Теперь задача сводится к нахождению корней неполного многочлена вида

$$y^4 + py^2 + qy + r.$$

Введем вспомогательную переменную α и преобразуем выражение многочлена к виду

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right]. \quad (6)$$

Полученное выражение тождественно исходному при любом значении α. Теперь подберем такое значение α, при котором выражение в квадратных скобках будет полным квадратом. Для этого достаточно найти значение α, обращающее в ноль дискриминант квадратного трехчлена

$$2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right).$$

$$D = q^2 - 8\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) =$$

$$= -8\alpha^3 - 8p\alpha^2 - 8\left(\frac{p^2}{4} - r\right)\alpha + q^2.$$

$$D = 0 \Rightarrow \alpha^3 + p\alpha^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)\alpha - \frac{q^2}{8} = 0.$$

Кубическое уравнение всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. После того как выражение в квадратных скобках из формулы (6) будет представлено в виде полного квадрата, мы применим тождество для разности квадратов. Таким образом, многочлен четвертой степени раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов, а задача нахождения корней многочлена сводится к задаче нахождения корней двух квадратных трехчленов.

Пример. Найти корни многочлена $\boxed{\Omega\ 204}$

$$4x^4 + 80x^3 + 540x^2 + 1496x + 1465.$$

Решение. Разделим левую и правую части уравнения на 4.

$$x^4 + 20x^3 + 135x^2 + 374x + \frac{1465}{4} = 0.$$

Сделаем подстановку $x = y-5$. Тогда уравнение примет вид

$$y^4 - 15y^2 + 24y - \frac{15}{4} = 0.$$

Перепишем выражение в виде

$$\left(y^2 - \frac{15}{2} + \alpha\right)^2 - (2\alpha y^2 - 24y + \alpha^2 - 15\alpha + 60).$$

$$D = 276 - 8\alpha(\alpha^2 - 15\alpha + 60) = -8\alpha^2 + 120\alpha - 480\alpha + 12.$$

$$D = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 15\alpha^2 + 60\alpha - 72 = 0.$$

Один вещественный корень $\alpha = 3$ мы можем «угадать» (теорема на с. 111). При $D = 0$ квадратный трехчлен

$$2\alpha y^2 - 24y + \alpha^2 - 15\alpha + 60 = 6y^2 - 24y + 24 = 6(y^2 - 4y + 4) = 6(y-2)^2.$$

Следовательно,

$$\left(y^2 - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\cdot(y-2)\right)^2 =$$

$$= \left(y^2 - \sqrt{6}y - \frac{9}{2} + 2\sqrt{6}\right)\left(y^2 + \sqrt{6}y - \frac{9}{2} - 2\sqrt{6}\right).$$

1) Найдем корни трехчлена $y^2 - \sqrt{6}y - \frac{9}{2} + 2\sqrt{6}$.
$D = 4(6 - 2\sqrt{6})$; $x_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$.
2) Найдем корни трехчлена $y^2 + \sqrt{6}y - \frac{9}{2} - 2\sqrt{6}$.
$D = 4(6 + 2\sqrt{6})$; $x_{1,2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}$.
Ответ: $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$; $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$;
$x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}$; $x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}$.
Формула Феррари так же, как и формула Кардано, не нашла широкого применения на практике по причине своей громоздскости. Если бы в примере мы взяли многочлен со случайными коэффициентами, вероятно, для записи ответа не хватило бы места на странице.

$\boxed{\Omega}$ Задачи к параграфу на с. 204, п. 39.

§ 3.7. Границы корней многочлена

$\boxed{161\Leftrightarrow168}$ В этом параграфе нас будут интересовать только вещественные корни многочлена. Мы уже знаем, что поиск корней многочленов степени выше второй – дело непростое. Даже если мы применяем численные методы, для начала неплохо бы знать, на каком интервале следует вести поиск. Ведь ось бесконечная! Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{a_0x^n}{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_0}\right| = \\ = \lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{a_0x}{a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}}}\right| = +\infty.$$

Таким образом, старший член по модулю растет быстрей всех остальных и, начиная с некоторой точки, превосходит модуль их суммы. Значения $|x|$, выходящие за эту границу, не могут быть корнями. Теперь рассмотрим модуль многочлена $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_0$. Очевидно,

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_0|\leq |a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\cdots+|a_n|\leq \\ \leq M\big(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots+1\big), \text{ где } M = max\{|a_1|, |a_2|, \cdots |a_n|\}.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии,

$$M\big(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots+1\big) = M\frac{|x|^n-1}{|x|-1} < M\frac{|x|^n}{|x|-1}.$$

Считаем $|x|> 1$. Тогда условие

$$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_0|\leq |a_0x^n|$$

выполняется, если

$$M\frac{|x|^n}{|x|-1} \le |a_0||x|^n \Rightarrow \ \frac{M}{|x|-1} \le |a_0| \Rightarrow \ |x| \ge \frac{M}{|a_0|}+1.$$

Заметим, что условие $|x|> 1$ здесь действительно выполняется. Последнее неравенство задает два интервала, на которых не может быть корней многочлена. В таком случае корни следует искать только на интервале $|x|< \frac{M}{|a_0|}+1$. Иначе говоря, $x \in \left(-\left(\frac{M}{|a_0|}+1\right);+\left(\frac{M}{|a_0|}+1\right)\right)$. Мы только что определили верхнюю границу для корней многочлена. Сделаем замену переменной $x=\frac{1}{z}$. Тогда

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = \frac{1}{z^n}(a_nz^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0).$$

При этом будем считать, что $a_n \neq 0$, т. е. $x=0$ не является корнем исходного многочлена. Каждому корню z нового многочлена будет соответствовать корень $x=\frac{1}{z}$ исходного многочлена и наоборот. Теперь займемся границами корней многочлена в скобках. Пусть $N = max\{|a_0|,|a_1|,\cdots|a_{n-1}|\}$. Тогда, как доказано выше, $|z|< \frac{N}{|a_n|}+1$. Отсюда

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{N}{|a_n|}+1 \ \Rightarrow \ |x| > \frac{a_n}{N+|a_n|}.$$

Следовательно, **для корней многочлена всегда справедливо неравенство**

$$\frac{|a_n|}{N+|a_n|} < |x| < \frac{M}{|a_0|}+1$$

или, что то же самое,

$$x \in \left(-\frac{M}{|a_0|}-1; -\frac{a_n}{N+|a_n|}\right) \cup \left(\frac{a_n}{N+|a_n|}; \frac{M}{|a_0|}+1\right),$$

где $M = max\{|a_1|, |a_2|, \cdots |a_n|\}$, $N = max\{|a_0|, |a_1|, \cdots |a_{n-1}|\}$.

Пример 1. Определить границы вещественных корней многочлена $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$. $\boxed{\Omega\ 204}$

Решение. С этим многочленом мы уже встречались на с. 154.

$$N = max\{1, 3, 3\} = 3,\ M = max\{3, 3, 4\} = 4 \Rightarrow |x| \in \left(\frac{4}{7}; 5\right).$$

Ответ: $|x| \in \left(\frac{4}{7}; 5\right)$.

Пример 2. Определить границы вещественных корней многочлена $3x^6 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2$. $\boxed{\Omega\ 204}$

Решение:

$$N = max\{3, 2, 1, 3\} = 3,\ M = max\{2, 1, 3, 2\} = 3 \Rightarrow |x| \in (0{,}4;\ 2).$$

Ответ: $|x| \in (0{,}4;\ 2)$.

Задачи к параграфу на с. 204, п. 40. $\boxed{\Omega}$

§ 3.8. Интерполяционный многочлен Лагранжа

164⇔173 Всем известно, что через две точки на плоскости можно провести одну единственную прямую. Многие знают, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная парабола с уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Возникает вопрос: как построить многочлен, график которого проходит через заданные n точек плоскости? Рассмотрим задачу для случая четырех точек: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ и $(x_4; y_4)$. Поскольку мы строим функцию, естественно потребовать различные значения x_i для $i = 1, 2, 3, 4$; значения y_i могут совпадать. Теперь построим четыре вспомогательных функции:

$$f_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)};$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)};$$

$$f_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)};$$

$$f_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}.$$

Нетрудно понять принцип их построения. Поскольку все x_i имеют различные значения, знаменатели дробей отличны от нуля. Каждая из четырех функций является многочленом третьей степени от x. А теперь попробуем в качестве аргумента $f_i(x)$ подставить одно из значений x_j, где $i, j = 1, 2, 3, 4$.

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Осталось записать выражение:

$$f(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x).$$

Это и есть **интерполяционный многочлен Лагранжа**. Сумма многочленов третьей степени является многочленом степени не выше третьей, но может быть ниже третьей, если коэффициенты при старших членах сократятся. Из свойств вспомогательных функций следует: $f(x_i) = y_i$. Таким образом, график построенного многочлена проходит через четыре заданные точки. Аналогичные рассуждения нетрудно воспроизвести и при построении многочлена по пяти и более точкам. Своим названием многочлен обязан выдающемуся французскому ученому Жозефу Луи Лагранжу, а под **интерполяцией** в математике подразумевают метод нахождения промежуточных значений функции по имеющемуся набору известных.

Пример 1. Построить многочлен Лагранжа, график которого проходит через точки $(0; 2), (3; 3), (4; 4), (7; 10)$ и $(8; 12)$. $\boxed{\Omega\ 204}$

Решение. По известным значениям абсцисс $\{0, 3, 4, 7, 10\}$ построим вспомогательные функции:

$$f_1(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)}{672};$$
$$f_2(x) = \frac{x(x-4)(x-7)(x-8)}{-60};$$
$$f_3(x) = \frac{x(x-3)(x-7)(x-8)}{48};$$
$$f_4(x) = \frac{x(x-3)(x-4)(x-8)}{-84};$$
$$f_5(x) = \frac{x(x-3)(x-4)(x-7)}{160}.$$

Поставив в качестве коэффициентов при вспомогательных функциях ординаты соответствующих точек, получим интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$f(x) = 2f_1(x) + 3f_2(x) + 4f_3(x) + 10f_4(x) + 12f_5(x).$$

На графике (рис. 31) видно, что кривая действительно проходит через точки $(0; 2), (3; 3), (4; 4), (7; 10)$ и $(8; 12)$. Обычно не требуется приведения подобных в выражении многочлена Лагранжа, но если раскрыть скобки и привести подобные, многочлен будет выглядеть так:

$$f(x) = -\frac{13}{1680}x^4 + \frac{101}{840}x^3 - \frac{653}{1680}x^2 + \frac{263}{420}x + 2.$$

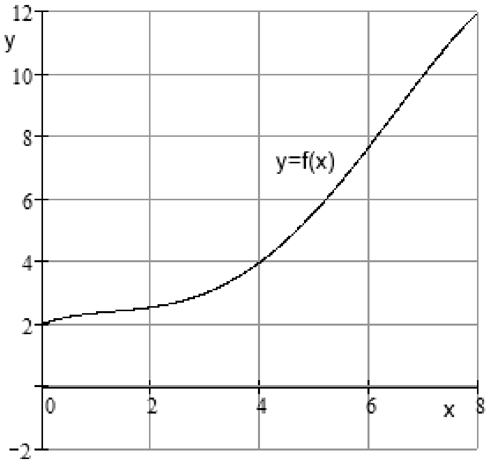

Рис. 31. График многочлена Лагранжа

Сомневающиеся могут убедиться в том, что
$f(0) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(7) = 10$ и $f(8) = 12$.
В курсе математики средней школы выводят уравнение прямой, проходящей через заданные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y1} \Rightarrow y = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1}x.$$

Это же уравнение можно получить, сгруппировав по x члены интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$f(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Теперь зададимся вопросом: какой вид будет иметь интерполяционный многочлен Лагранжа, если заданы три лежащие на одной прямой точки? Из теории (с. 80) следует, что прямая не может пересечь параболу более чем в двух точках.

Ω 204 **Пример 2.** Построить многочлен Лагранжа, график которого проходит через точки $(1;2), (3;6)$ и $(9;18)$.

Решение. Построим три вспомогательных многочлена:

$$f_1(x) = \frac{(x-3)(x-9)}{(1-3)(1-9)} = \frac{(x-3)(x-9)}{16};$$
$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(3-1)(3-9)} = \frac{(x-1)(x-9)}{-12};$$
$$f_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(9-1)(9-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{48}.$$

Тогда многочлен Лагранжа примет вид

$$f(x) = 2\frac{(x-3)(x-9)}{16} + 6\frac{(x-1)(x-9)}{-12} + 18\frac{(x-1)(x-3)}{48}.$$

Раскрыв скобки в правой части равенства, придем к уравнению $y = 2x$. Алгоритм «распознал», что ему вместо параболы «подсунули» прямую.

Ответ: $y = 2x$.

Рассмотрим еще одну задачу. Требуется найти квадратный трехчлен, если известны его корни x_1 и x_2, а его график проходит через точку $(x_0; y_0)$. В таком случае коэффициенты при вспомогательных многочленах, соответствующих x_1 и x_2, нулевые, поэтому достаточно построить один вспомогательный многочлен, соответствующий x_0, и многочлен

Лагража будет равен произведению этого многочлена на y_0:

$$f(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} =$$

$$= \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2].$$

Пример 3. Найти квадратный трехчлен, если его корни (-1) и 4, а график проходит через точку с координатами $(6, 3)$. $\boxed{\Omega\ 205}$

Решение. Многочлен Лагранжа примет вид

$$f(x) = \frac{3}{(6+1)(6-4)}[x^2 - (-1+4)x - 4] = \frac{3}{14}(x^2 - 3x - 4).$$

Ответ: $\frac{3}{14}(x^2 - 3x - 4)$.

Задачи к параграфу на с. 204, п. 41–42. $\boxed{\Omega}$

§ 3.9. Многочлены в других задачах

$\boxed{168\Leftrightarrow 188}$ Охватить все приложения многочленов в элементарной и высшей математике нереально. В этом параграфе мы ограничимся несколькими примерами.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6$. $\boxed{\Omega\ 205}$

Решение. Введем переменные $u = \sqrt[3]{x+24}$ и $v = \sqrt{12-x}$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u^3 + (6-u)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u^3+u^2-12u=0 \Rightarrow u(u^2+u-12)=0 \Rightarrow u(u+4)(u-3)=0.$

Рассмотрим три случая:

1) $u=0 \Rightarrow x=-24$. Проверка: $\sqrt[3]{0}+\sqrt{36}=6$;

2) $u=-4 \Rightarrow x=-88$. Проверка: $\sqrt[3]{-64}+\sqrt{100}=6$;

3) $u=3 \Rightarrow x=3$. Проверка: $\sqrt[3]{27}+\sqrt{9}=6$.

Ответ: $x_1=-24,\ x_2=-88,\ x_3=2$.

Теперь немного теории. Пусть дано неравенство

$$log_a b > log_a c \Leftrightarrow log_a b - log_a c > 0.$$

Разумеется, для входящих в неравенство переменных должны выполняться условия:

$$(a>0)\&(a\neq 1)\&(b>0)\&(c>0).$$

1) $a<1 \Rightarrow b<c$, поскольку в таком случае логарифм – убывающая функция: $(a-1<0)\&(b-c<0) \Rightarrow (a-1)(b-c)>0$;
2) $a>1 \Rightarrow b>c$, поскольку теперь логарифм – возрастающая функция: $(a-1>0)\&(b-c>0) \Rightarrow (a-1)(b-c)>0$.
Значит, неравенство $log_a b - log_a c > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $(a-1)(b-c)>0$. Повторив те же рассуждения для случая $log_a b < log_a c$, мы придем к заключению, что в области определения соответствующих выражений знак $log_a b - log_a c$ совпадает со знаком $(a-1)(b-c)$.
В математике имеется функция **sgn** («сигнум»), название

которой происходит от латинского *signum* — знак. Определяется функция так:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Ее впервые ввел Леопольд Кронекер. Теперь вывод относительно разности логарифмов можно сформулировать следующим образом: $sgn(log_a b - log_a c) = sgn[(a-1)(b-c)]$. В дальнейшем два выражения $\varphi(a, b, c, \ldots)$ и $\psi(a, b, c, \ldots)$ будем называть **знакоэквивалентными**, если

$$sgn[\varphi(a, b, c, \ldots)] = sgn[\psi(a, b, c, \ldots)]$$

для любого набора значений $a, b, c, \ldots$, при котором определены все входящие в равенство выражения. Отношение знакоэквивалентности будем обозначать:

$$\varphi(a, b, c, \ldots) \sim \psi(a, b, c, \ldots).$$

Если $\varphi(a, b, c, \ldots)$ принимает только положительные значения на всей области определения, то $\varphi(a, b, c, \ldots) \sim 1$, если отрицательные, то $\varphi(a, b, c, \ldots) \sim -1$. Ниже представлены некоторые знакоэквивалентные пары выражений.

Знакоэквивалентные выражения:

1. $\log_a b - \log_a c \sim (a-1)(b-c)$.
2. $\log_a b \sim (a-1)(b-1)$.
3. $\log_b a - \log_c a \sim (a-1)(b-1)(c-1)(c-b)$.
4. $\left(a^b - a^c\right) \sim (a-1)(b-c)$.
5. $(b^a - c^a) \sim a(b-c)$.
6. $\frac{1}{a-b} \sim (a-b)$.
7. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \sim (a-b)$.
8. $\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \sim (b-a)$.
9. $\left(\sqrt{a-c} - \sqrt{a-b}\right) \sim (b-c)$.
10. $\left(\sqrt{a+c} - \sqrt{a+b}\right) \sim (c-b)$.

Предлагаем читателю в порядке упражнений доказать знакоэквивалентность выражений начиная со второго пункта. Обратите внимание, что правые части всех перечисленных выше отношений – многочлены от $a, b, c, \ldots$ Эти отношения не стоит заучивать. При наличии навыка они выводятся довольно легко.

$\boxed{\Omega\ 205}$ **Пример 2.** Решить неравенство

$$\log_{x+1}(x^2 - 2x - 2) - \log_{\frac{1}{x+1}}(7 - x) < 1.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x^2-2x-2>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\in\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3};+\infty\right) \\ x<7 \end{cases}$$

Таким образом, $x\in\left(-1;1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3};7\right)$. Область допустимых значений отражена в верхней части схемы (рис. 32).

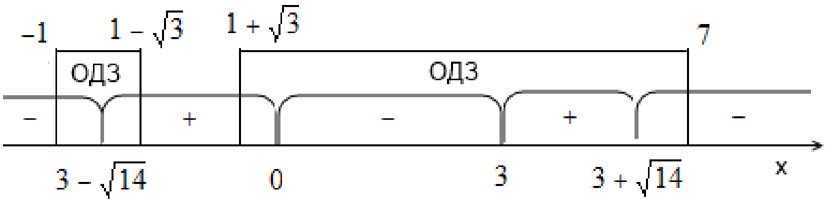

Рис. 32. Промежутки знакопостоянства

Преобразуем неравенство к виду

$$\log_{x+1}(x^2-2x-2)+\log_{x+1}(7-x)-\log_{x+1}(x+1)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\log_{x+1}\left[(x^2-2x-2)(7-x)\right]-\log_{x+1}(x+1)<0.$$

В левой части последнего неравенства заменим разность логарифмов на знакоэквивалентное выражение (п. 1, с. 176):

$$x\left[(x^2-2x-2)(7-x)-(x+1)\right]<0\Rightarrow -x(x^3-9x^2-13x+15)<0.$$

Найдем среди делителей свободного члена целый корень $x = 3$ и разделим многочлен на $(x-3)$ по схеме Горнера (см. пр. на с. 114). Результат деления – квадратный трехчлен x^2-6x-5. Найдем его корни и запишем исходный многочлен в виде произведения линейных членов:

$$-x(x-3)\left(x-(3-\sqrt{14})\right)\left(x-(3+\sqrt{14})\right).$$

Точки $0,\ 3,\ 3-\sqrt{14}, 3+\sqrt{14}$ делят вещественную ось на 5 промежутков знакопостоянства. Определим знак на одном из интервалов, а знаки остальных расставим по принципу чередования (см. пр. на с. 130). Промежутки знакопостоянства отмечены на схеме (см. рис. 32). Нас интересуют значения $x \in \left(-\infty; 3-\sqrt{14}\right) \cup (0;3) \cup \left(3+\sqrt{14}; +\infty\right)$.
С учетом ОДЗ,

$$\begin{cases} x \in \left(-1; 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3}; 7\right) \\ x \in \left(-\infty; 3-\sqrt{14}\right) \cup (0;3) \cup \left(3+\sqrt{14}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-1; 3-\sqrt{14}) \cup (0;3) \cup (3+\sqrt{14}; 7).$$

Ответ: $(-1; 3-\sqrt{14}) \cup (0;3) \cup (3+\sqrt{14}; 7)$.

Ω 205 **Пример 3.** Решить неравенство

$$\log_{x+2}(2x^2-7x+8) - \log_{x+2}(x^2-2x+2) > 0.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \\ 2x^2-7x+8>0 \\ x^2-2x+2>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty).$$

Разность логарифмов знакоэквивалентна (п. 1, с. 176) выражению $(x+1)(x^2-5x+6)$, и, таким образом,

$$(x+1)(x-2)(x-3)>0 \Rightarrow x\in(-1;2)\cup(3;+\infty).$$

Решение входит в ОДЗ.
Ответ: $(-1;2)\cup(3;+\infty)$.
Пример 4. Решить неравенство $\boxed{\Omega\ 205}$

$$\left(x^2-1\right)^{x^2-5x+6}-\left(x^2-1\right)^{x^2-x-2}\leq 0.$$

Решение. Здесь следует сначала решить задачу со строгим неравенством, а затем исследовать поведение функции

$$f(x)=\left(x^2-1\right)^{x^2-5x+6}-\left(x^2-1\right)^{x^2-x-2}$$

на границах промежутков знакопостоянства. В противном случае мы можем сделать поспешные выводы. Например, по виду уравнения заключить, что значения $x=\pm1$ – решения,

а это, как видно на графике функции $f(x)$ (рис. 33а), не так.
ОДЗ: $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

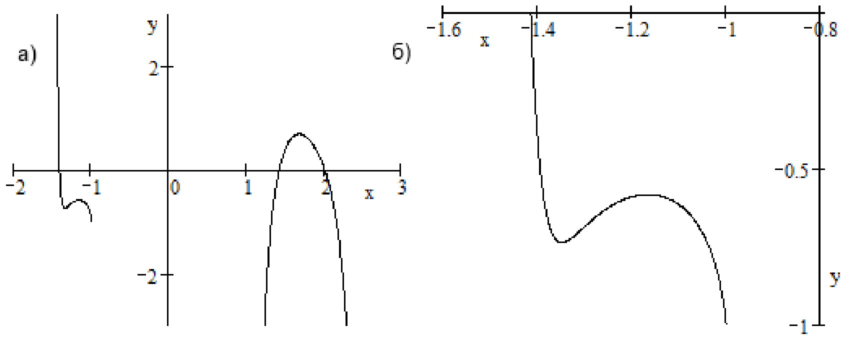

Рис. 33. График функции $f(x)$

Разность показательных функций знакоэквивалентна (п. 4, с. 176) выражению $(x^2 - 2)(-4x + 8)$, и, таким образом,

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2 - x) < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty).$$

С учетом ОДЗ, $x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$. Теперь пора вспомнить, что в условии задачи речь шла о нестрогом неравенстве. У нас имеется 5 граничных точек: $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$ и 2. В точках $\pm\sqrt{2}$ и 2 график функции пересекает ось Ox, но с точками ± 1 дело обстоит иначе:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = -\infty.$$

Поскольку $f(x)$ не определена на интервале $(-1; 1)$, переменная x стремится к (-1) слева, а к 1 – справа. Первый предел равен (-1), т. е. график функции обрывается в точке с координатами $(-1; -1)$ (см. рис. 33б). Тем не менее в самой точке $x = -1$ функция не определена, так как выражение $(x^2 - 1)^{x^2-x-2}$ имеет в этой точке неопределенность вида 0^0 (любая степень ноля – ноль, но любое число в нулевой степени – единица). $x = 1$ – вертикальная ассимптота. Сам по себе график может стать источником заблуждений. Например, рассматривая рис. 33а, можно заподозрить, что график функции слева и справа прижимается к двум вертикальным ассимптотам. Однако это не так. Просто при $x \to \pm\infty$ функция очень быстро стремится к бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Поэтому предположения, сделанные на основе графика, требуют теоретического обоснования. Обратите внимание на тот замечательный факт, что решение строгого неравенства заняло у нас всего несколько минут и три строки. Основной объем работы ушел на обоснование границ.

Ответ: $[-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\boxed{\Omega\ 205}$

$$\frac{\log_{x+3}(2x^2-6x+4)-\log_{x+3}(x^2-5x+4)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{6-x}\right)\left((8-x)^{-2x^2+5x-6}-(8-x)^{-x^2}\right)}<0.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ:}\ \begin{cases} \begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty) \\ \begin{cases} 2x^2-6x+4>0 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty) \\ \begin{cases} 5-x\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;5] \\ 8-x>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in(-3;-2)\cup(-2;1)\cup(4;5].$$

Заметим, что из отношений знакоэквивалентности (с. 176) следует:

$$\log_{x+3}(2x^2-6x+4)-\log_{x+3}(x^2-5x+4)\sim(x+2)(x^2-x)=$$
$$=x(x-1)(x+2),\quad \left(\sqrt{5-x}-\sqrt{6-x}\right)\sim -1;$$
$$(8-x)^{-2x^2+5x-6}-(8-x)^{-x^2}\sim(7-x)(-x^2+5x-6)=$$
$$=(x-7)(x-2)(x-3),$$
$$\frac{x(x-1)(x+2)}{(-1)(x-7)(x-2)(x-3)}\sim -x(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)(x+2).$$

Неравенство $-x(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)(x+2) < 0$ выполняется для $x \in (-3;-2) \cup (0;1) \cup (2;3) \cup (7;+\infty)$. В ответе учтем ОДЗ.

Ответ: $x \in (-3;-2) \cup (0;1)$.

Пример 6. Выразить $\cos(6\phi)$ и $\sin(6\phi)$ через $\cos(\phi)$ и $\sin(\phi)$. $\boxed{\Omega\ 206}$

Решение. Достроим снизу изображенный на с. 58 треугольник Паскаля. Теперь последняя строка содержит коэффициенты бинома $(a+b)^6$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

По формуле Муавра (с. 145),

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^6 = \cos 6\phi + i\sin 6\phi. \tag{7}$$

С другой стороны, по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{gathered}
(\cos\phi + i\sin\phi)^6 = (\cos\phi)^6 + 6(\cos\phi)^5 i\sin\phi + \\
+ 15(\cos\phi)^4(i\sin\phi)^2 + 20(\cos\phi)^3(i\sin\phi)^3 + \\
+ 15(\cos\phi)^2(i\sin\phi)^4 + 6\cos\phi(i\sin\phi)^5 + (\sin\phi)^6 = \\
= \cos^6\phi + i\cdot 6cos^5\phi\sin\phi - 15\cos^4\phi\sin^2\phi - \\
- i\cdot 20\cos^3\phi\sin^3\phi + 15\cos^2\phi\sin^4\phi + i\cdot 6\cos\phi\sin^5\phi - \sin^6\phi = \\
= \cos^6\phi - 15\cos^4\phi\sin^2\phi + 15\cos^2\phi\sin^4\phi - \sin^6\phi + \\
+ i\cdot(6cos^5\phi\sin\phi - 20\cos^3\phi\sin^3\phi + 6\cos\phi\sin^5\phi).
\end{gathered} \tag{8}$$

Осталось приравнять правые части равенств (7) и (8).

Ответ:

$$\cos 6\phi = \cos^6\phi - 15\cos^4\phi\sin^2\phi + 15\cos^2\phi\sin^4\phi - \sin^6\phi,$$
$$\sin 6\phi = 6cos^5\phi\sin\phi - 20\cos^3\phi\sin^3\phi + 6\cos\phi\sin^5\phi.$$

Следующая задача связана с **рядом Фибоначчи**. Первые два члена этого ряда – единицы, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144\ldots\ .$$

$\boxed{\mathit{\Omega}\ 206}$ **Пример 7.** Найти формулу n-го члена ряда Фибоначчи.

Решение. Пусть a_n – n-й член ряда Фибоначчи, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $a_0 = a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n = 2, 3, \ldots$

Введем **производящую функцию**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Операции с такими суммами требуют теоретического обоснования, но все же мы рискнем продолжить рассуждения. Умножим левую и правую части равенства $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$

на x^k и просуммируем полученные равенства по k:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k =$$
$$= x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2}. \quad \text{Здесь}$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = f(x) - a_0 - a_1 x, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = f(x) - 1,$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) \text{ и, таким образом,}$$

$$f(x) - a_0 - a_1 x = x(f(x) - 1) + x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Разложим на множители квадратный трехчлен

$$x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$f(x) = \frac{-1}{\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{A}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Теперь найдем значения A и B, при которых выполняется последнее равенство:

$$\frac{A}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{(A+B)x - A\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - B\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+B\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\sqrt{5}}{5} \\ B=-\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}-\dfrac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)=$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{\sqrt{5}+1}}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}\right).$$

Нетрудно доказать: $\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Тогда

$$f(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}\right).$$

Мы знаем, что при $|x|<1$ имеют место равенства:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Следовательно, $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)^k+\right.$

$$\left.+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)^k\right)=$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{k+1}x^k\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{5}-1)^{(}k+1)+(\sqrt{5}+1)^{k+1}}{2^{k+1}}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Приравняв коэффициенты степенных рядов в последнем равенстве, получим формулу k-го члена ряда Фибоначчи.

Ответ:

$$a_k = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{(-1)^k(\sqrt{5}-1)^{k+1}+(\sqrt{5}+1)^{k+1}}{2^{k+1}},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Сомневающиеся могут проверить результат численно.

Задачи к параграфу на с. 205, п. 43–46. $\boxed{\Omega}$

Задачи

$\boxed{173 \Leftrightarrow 207}$

1. Решить линейные уравнения с параметром (отв. на с. 207):

   (a) $(a^2 - 2a + 1) \cdot x = a^2 + 2a - 3.$

   (b) $(a^3 - a^2 - 4a + 4) \cdot x = a - 1.$

   (c) $(a^2 - 1) \cdot x + (a^2 - 1) \cdot y = a^2 - 3a + 2.$

   (d) $(a^2 - 2a - 3) \cdot x + (a - 2) \cdot y = a^2 - 4a + 3.$

2. Решить системы линейных уравнений (отв. на с. 208):

   (a) $\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 3x + y = 3. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1; \\ 2x + 4y = 2. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 4x + 2y = 2. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 3x + 2y = 3; \\ 6x + 4y = 5. \end{cases}$

3. Решить системы линейных уравнений с параметром (отв. на с. 208):

   (a) $$\begin{cases} (3+a)\cdot x + 2\cdot y = 3; \\ a\cdot x - y = 3. \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} (7-a)x + ay = 5; \\ (1+a)x + 3y = 5. \end{cases}$$

   (c) $$\begin{cases} -4x + ay = 1 + a; \\ (6+a)x + 2y = 3 + a. \end{cases}$$

4. Решить системы линейных уравнений (отв. на с. 209):

   (a) $$\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + 2y + 4z = -2. \end{cases}$$

   (c) $$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + 8y + 2z = -6. \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + 8y + 2z = 8. \end{cases}$$

5. Решить линейные неравенства с параметром (отв. на с. 210):

   (a) $(a^2 - 1) \cdot x > a^2 - a - 2.$

   (b) $(a^2 - a - 6) \cdot x \geq a^2 + 3a + 2.$

   (c) $(a^2 - 4a + 3) \cdot x \leq a^2 + a - 2.$

6. Отобразить на плоскости геометрическое место точек $(x; y)$, заданное системой неравенств (отв. на с. 211):

   (a) $$\begin{cases} 2x - y \geq 0; \\ x + 2y \leq 5; \\ 3x - 4y \leq 5. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + y \leq 3; \\ 2x - y \leq 6; \\ 3x + y \geq 0; \\ x - 2y \geq -6. \end{cases}$$

7. Турбаза располагает следующими ресурсами для организации лодочных походов с одной ночевкой: 12 инструкторов, 7 палаток и 15 лодок. Имеются два маршрута: средней и повышенной сложности. Для похода по маршруту средней сложности требуется 1 инструктор, 1 палатка и 3 лодки. По маршруту повышенной сложности – 2 инструктора, 1 палатка и 1 лодка. Изобразите на чертеже область производственных возможностей турбазы, если обозначить x – количество походов по первому маршруту, y – по второму. Сколько и каких походов следует организовать, чтобы извлечь максимальный доход, а также чему будет равен доход (отв. на с. 211):

   (a) если один поход по маршруту средней сложности даст 10 тысяч рублей, повышенной сложности – 8 тысяч;

   (b) если один поход по маршруту средней сложности даст 7 тысяч рублей, повышенной сложности – 15 тысяч?

8. Найти вещественные корни (отв. на с. 212):

   (a) $2x^2 - 5x + 10$.

   (b) $x^2 + 2x + 7$.

   (c) $3x^2 + 2x - 5$.

   (d) $2x^2 - 3x + 1$.

9. Решить квадратные уравнения с параметром (отв. на с. 212):

   (a) $(2a - 1)x^2 - (3a + 1)x + a - 1 = 0$.

   (b) $ax^2 - (1 - 2a)x + a - 2 = 0$.

10. Решить неравенства (отв. на с. 213):

    (a) $x^2 + 3x - 10 > 0$.

    (b) $2x^2 - x - 15 \leq 0$.

    (c) $x^2 - 2x + 7 > 0$.

    (d) $x^2 + 3x + 3 < 0$.

11. Решить неравенства с параметром (отв. на с. 213):

    (a) $x^2 + 2x + a < 0$.

(b) $x^2 + 2ax + 1 > 0$.

12. Решить симметричные системы (отв. на с. 214):

(a) $\begin{cases} x + y = 9; \\ xy = 14. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = 5; \\ xy = -14. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 7; \\ xy = 1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = 14; \\ xy = 2. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y = 1; \\ xy = 7. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + y = 2; \\ xy = 5. \end{cases}$

13. Свести системы к симметричным и решить (отв. на с. 214):

(a) $\begin{cases} 2x + 5y = 9; \\ xy = 2. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8; \\ xy = 8. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y = 3; \\ xy = 2. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x - 3y = 2; \\ xy = -7. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 7y = 10; \\ xy = 1. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 7x - 3y = 11; \\ xy = -1. \end{cases}$

14. Решить симметричные системы (отв. на с. 214):

(a) $\begin{cases} x + y + xy = 11; \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100; \\ xy = 48. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28; \\ x + y = 4. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2(x+y) - xy = 4; \\ 3xy + x + y = 23. \end{cases}$

15. Решить симметричные системы (отв. на с. 215):

(a) $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ xy + xz + yz = -7; \\ xyz = 6. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ xy + xz + yz = -5; \\ xyz = -6. \end{cases}$

16. Решить однородные системы (отв. на с. 215):

(a) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 2y^2 = 0; \\ 2x^2 + 5xy - 7y^2 = 12. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 4y^2 = 0; \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0; \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29; \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$

17. Представить многочлен $P_n(x)$ в виде $D_m(x) \cdot Q_{n-m}(x) + R_s(x)$, где степень остатка от деления $s < m$. Деление многочлена на многочлен выполнить «лесенкой» (отв. на с. 215):

    (a) $P_5(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 7;$
    $D_2(x) = x^2 + x + 1.$

    (b) $P_6(x) = x^6 - x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 13x + 4;$
    $D_2(x) = x^2 - x + 3.$

    (c) $P_7(x) = 2x^7 - x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 20x^2 - 16x - 33;$
    $D_3(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5.$

    (d) $P_7(x) = 3x^7 - 11x^6 + 13x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 17x - 7;$
    $D_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$

18. Представить многочлен $P_n(x)$ в виде $L(x) \cdot Q_{n-1}(x) + r$, где $L(x)$ – линейный член, r – остаток. Деление многочлена на линейный член $L(x)$ выполнить по схеме Горнера (отв. на с. 216):

    (a) $P_4(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x - 4; \quad L(x) = x - 1.$

    (b) $P_5(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 14x + 3; \quad L(x) = x + 3.$

    (c) $P_5(x) = 2x^5 + 13x^4 + 16x^3 + 3x^2 - 17x - 24;$
    $L(x) = x + 5.$

(d) $P_5(x) = 3x^5 - 8x^4 + 5x^3 - 5x^2 + x + 7;$
$L(x) = x - 2.$

19. Разложить многочлены на множители (отв. на с. 216):

    (a) $x^4 - a^4.$

    (b) $x^2 + 14ax + 49a^2.$

    (c) $x^3 - 6x^2a + 12xa^2 - 8a^3.$

    (d) $x^4 + x^2 + 1.$

    (e) $x^4 + a^4.$

20. Разложить многочлены на множители (отв. на с. 217):

    (a) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2.$

    (b) $x^5 + x^3a^2 - x^2a^3 - a^5.$

    (c) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1.$

    (d) $4x^4 + 5x^2 + 1.$

21. Разложить многочлены на множители, предварительно заметив, что числа 1 и 2 – их корни. Деление на $x^2 - 3x + 2$ выполнить «лесенкой» (отв. на с. 217):

    (a) $x^4 - 13x^3 + 53x^2 - 83x + 42.$

(b) $x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 43x + 42$.

(c) $x^5 - 8x^4 + 10x^3 + 46x^2 - 119x + 70$.

(d) $x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 66x^2 + 119x - 70$.

22. Разложить многочлены на множители. Для понижения степени многочлена «угадать» его целый корень (теор. на с. 111). Деление многочлена на линейный член выполнить по схеме Горнера (отв. на с. 217):

(a) $x^3 - 11x^2 + 31x - 21$.

(b) $x^3 + 12x^2 + 39x + 28$.

(c) $x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 56x - 105$.

(d) $x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 56x + 105$.

23. Разложить многочлены на множители. Для понижения степени многочлена «угадать» его рациональный корень (теор. на с. 112). Деление многочлена на линейный член выполнить по схеме Горнера (отв. на с. 217):

(a) $5x^3 + 4x^2 + 9x - 2$.

(b) $2x^3 + 9x^2 + 11x + 3$.

(c) $2x^3 + 5x^2 - 5x + 1$.

(d) $3x^3 + 17x^2 + 4x - 4$.

24. Разложить многочлен четвертой степени с симметричными коэффициентами на множители (отв. на с. 218):

   (a) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1$.

   (b) $3x^4 - 23x^3 + 48x^2 - 23x + 3$.

   (c) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1$.

   (d) $x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 9x + 1$.

25. Разложить многочлен шестой степени с симметричными коэффициентами на множители (отв. на с. 218):

   (a) $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1$.

   (b) $x^6 - 12x^5 + 50x^4 - 84x^3 + 50x^2 - 12x + 1$.

26. Разложить многочлен на множители, исходя из предположения, что он имеет делитель вида $x^2 + q$ (отв. на с. 219):

   (a) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$.

   (b) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 6$.

   (c) $6x^5 - 11x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 18x + 8$.

(d) $6x^5 - x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 30x - 12.$

27. Решить неравенства (отв. на с. 219):

(a) $(x + 4)(x - 5)(x + 1)(x - 2)(3 - x) > 0.$

(b) $(x - 2)x(x - 3)(x + 1) \leq 0.$

(c) $(x + 3)^3(x + 2)^2x(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0.$

(d) $(x + 5)^2(x + 3)(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) < 0.$

(e) $(x^2 + 2x + 5)(x + 3)^3(x - 2)^2(x - 3) \geq 0.$

(f) $(x + 5)^2(x^2 + 3x + 3)(x + 2)(x - 1)^2(x - 2) < 0.$

28. Решить неравенства (отв. на с. 220):

(a) $x^3 + 2x^2 + x - 18 > 0.$

(b) $2x^3 + x^2 + 4x - 15 \leq 0.$

(c) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 > 0.$

(d) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 > 0.$

29. Найти комплексные корни квадратных трехчленов (отв. на с. 220):

(a) $x^2 + 4x + 5.$

(b) $x^2 + 5x + 7$.

(c) $3x^2 - 2x + 1$.

(d) $5x^2 - 3x + 3$.

30. Найти комплексные корни многочленов (отв. на с. 220):

(a) $x^3 + 2x - 3$.

(b) $2x^3 - 2x^2 + x - 10$.

(c) $6x^3 - 9x^2 + 5x - 1$.

(d) $9x^3 - 18x^2 + 17x - 4$.

31. Найти комплексные корни многочленов (отв. на с. 220):

(a) $x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3$.

(b) $2x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x + 10$.

(c) $6x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 1$.

(d) $9x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 5x + 4$.

32. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ (отв. на с. 221):

(a) $z_1 = 2 - i \cdot 3, \quad z_2 = 2 + i \cdot 3$.

(b) $z_1 = 5 + i, \quad z_2 = 5 + i \cdot 2.$

(c) $z_1 = 2 + i \cdot \sqrt{24}, \quad z_1 = 1 + i \cdot \sqrt{6}.$

(d) $z_1 = -1 + i \cdot \sqrt{2}, \quad z_2 = 5 + i \cdot 2\sqrt{2}.$

33. Привести комплексные числа к тригонометрической форме (отв. на с. 222):

(a) $-2 + i \cdot 2\sqrt{3}.$

(b) $\frac{7\sqrt{3} - i \cdot 7}{2}.$

(c) $6 + i \cdot 5.$

(d) $5 - i \cdot 2.$

34. Найти степень комплексного числа (отв. на с. 222):

(a) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3.$

(b) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2.$

(c) $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^3.$

(d) $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)^7.$

35. Решить уравнения (отв. на с. 222):

(a) $z^3 - 8i = 0.$

(b) $z^4 - 16i = 0$.

(c) $z^4 + 81 = 0$.

36. Найти корни кубических многочленов по формуле Кардано (отв. на с. 223):

    (a) $x^3 + 9x^2 + 27x + 28$.

    (b) $x^3 + 6x^2 + 18x + 22$.

    (c) $x^3 - 5x^2 + 10x - 8$.

    (d) $x^3 + 7x^2 + 18x + 18$.

37. Найти корни кубических многочленов по формуле Кардано (отв. на с. 223):.

    (a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

    (b) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$.

    (c) $4x^3 + 16x^2 + 13x + 3$.

    (d) $9x^3 - 42x^2 + 25x - 4$.

38. Найти корни кубических многочленов по формуле Кардано (отв. на с. 223):

    (a) $x^3 - 15x^2 + 60x - 28$.

(b) $x^3 - 15x^2 + 60x - 72$.

(c) $x^3 - 3x^2 - 12x + 36$.

(d) $x^3 - 7x^2 + 13x - 3$.

39. Найти корни многочленов по формуле Феррари (отв. на с. 224):

(a) $4x^4 + 16x^3 + 4x^2 + 8x + 1$.

(b) $4x^4 + 32x^3 + 36x^2 - 16x + 1$.

40. Найти границы корней многочленов (отв. на с. 224):

(a) $8x^3 - 3x^2 + x - 7$.

(b) $x^3 + 2x^2 - 5x + 2$.

(c) $5x^4 + x^3 - x^2 + 4$.

(d) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 - x + 2$.

41. Построить по трем точкам интерполяционный многочлен Лагранжа и сгруппировать его члены по степеням x (отв. на с. 224):

(a) $(2; 5)$, $(3; 7)$, $(5; 8)$.

(b) $(-3; 2)$, $(0; 8)$, $(5; 2)$.

(c) $(-1;3),\ (1;0),\ (4;6)$.

42. Найти квадратный трехчлен, график которого проходит через заданную точку M_0, если известны его корни x_1 и x_2 (отв. на с. 224):

    (a) $M_0(8;5),\ x_1=2,\ x_2=4$.

    (b) $M_0(0;2),\ x_1=-2,\ x_2=5$.

    (c) $M_0(-1;5),\ x_1=3,\ x_2=7$.

43. Решить уравнения (отв. на с. 224):

    (a) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

    (b) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$.

44. Решить неравенства (отв. на с. 225):

    (a) $\log_{x-3}(3x^2+5x+2)-\log_{x-3}(2x^2+6x+4)>0$.

    (b) $\log_{x+4}(2x^3+x^2-3x)+\log_{\frac{1}{x+4}}(x^3+x-2)\geq 0$.

    (c) $(4-x^2)^{2x^2-2x}-(4-x^2)^{x^2-1}<0$.

    (d) $(x^2-16)^{x^2-2x+3}-(x^2-16)^{x^2-3x+2}>0$.

    (e) $\frac{\left(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-3}\right)(\log_x x^2-\log_x 4)}{(x+2)^{x^2}-(x+2)^x}<0$.

(f) $$\frac{\left((x-2)^{x^2-5x+7}-(x-2)^{x^2+1}\right)\left(\sqrt{3x+6}-\sqrt{2x+4}\right)}{\left(\log_{(x^2)}(x^3+x^2)-\log_{(x^2)}(x^2+x)\right)} > 0.$$

45. Выразить через $\cos\phi$ и $\sin\phi$ (отв. на с. 225):

    (a) $\cos 3\phi$ и $\sin 3\phi$.

    (b) $\cos 4\phi$ и $\sin 4\phi$.

46. Известны первые три члена последовательности: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Каждый следующий член выражается через предыдущие посредством отношения $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$. Таким образом, первые 7 членов последовательности: 2, 1, 2, 13, 62, 241, 842. Построив производящую функцию, найти формулу общего члена последовательности (отв. на с. 225):

Ответы

$\boxed{188 \Leftrightarrow 9}$

№ – номер задачи,

З – номер страницы с заданием,

П – номер страницы с похожим примером,

Т – номер страницы соответствующего раздела теории.

№	Ответ	З	П	Т
1	Линейные уравнения с параметром	188	—	19
1a	$\Re$ при $a = 1$; иначе $\dfrac{a+3}{a-1}$	188	19	19
1b	$\Re$ при $a = 1$; $\varnothing$ при $a = \pm 2$; иначе $\dfrac{1}{a^2-4}$	188	19	19
1c	$\varnothing$ при $a = -1$; $(\Re;\Re)$ при $a = 1$; $\{(x;y)\}$, где $y = \dfrac{a-2}{a+1} - x$, $x \in \Re$, иначе	188	22	20

№	Ответ	З	П	Т
1d	$\left(\frac{1}{3}; \Re\right)$ при $a = 2$; иначе $\{(x; y)\}$, где $y = \frac{a^2 - 4a + 3}{a - 2} - \frac{a^2 - 2a - 3}{a - 2} \cdot x$, $x \in \Re$	188	22	20
2	Системы двух линейных уравнений	188	—	28
2a	$(1/5; 12/5)$	188	32	28
2b	$(5/13; 4/13)$	188	32	28
2c	$\{(x; y) \| 2x + y = 1\}$, где $x, y \in \Re$	188	33	28
2d	$\emptyset$	188	33	28
3	Системы двух линейных уравнений с параметрами	189	—	28
3a	$\emptyset$ при $a = -1$; иначе $\left(\frac{3}{a+1}; -\frac{3}{a+1}\right)$	189	34	28

№	Ответ	З	П	Т
3b	$\varnothing$ при $a=-7$; $\{(x;y)\|4x+3y=5\}$, где $x,y\in\Re$, при $a=3$; иначе $\left(\dfrac{5}{a+7};\dfrac{10}{a+7}\right)$	189	34	28
3c	$\{(x;y)\|4x+2y=1\}$, где $x,y\in\Re$, при $a=-2$; $\varnothing$ при $a=-4$; иначе $\left(\dfrac{a-1}{a+4};\dfrac{a+9}{a+4}\right)$	189	34	28
4	Системы трех линейных уравнений	189	—	35
4a	$(3;1;1)$	189	37	35
4b	$(0;3/2;-5/4)$	189	37	35
4c	$(2;-2;3)$	189	37	35
4d	$\{(x;y;z)\}$, где $\begin{cases} x=\frac{13}{5}-\frac{1}{5}z; \\ y=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}z; \\ z\in\Re \end{cases}$	190	43	35
4e	$\varnothing$	190	44	35

№	Ответ	З	П	Т
5	Линейные неравенства с параметром	190	—	45
5a	$\varnothing$ при $a=-1$; $\Re$ при $a=1$; $\left(-\infty;\dfrac{a-2}{a-1}\right)$ при $a\in(-1;1)$; $\left(\dfrac{a-2}{a-1};+\infty\right)$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$	190	46	45
5b	$\Re$ при $a=-2$; $\varnothing$ при $a=3$; $\left(-\infty;\dfrac{a+1}{a-3}\right]$ при $a\in(-2;3)$; $\left[\dfrac{a+1}{a-3};+\infty\right)$ при $a\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$	190	46	45

№	Ответ	З	П	Т
5c	$\Re$ при $a=1$ и $a=3$; $\left(\dfrac{a+2}{a-3};+\infty\right)$ при $a\in(1;3)$; $\left(-\infty;+\dfrac{a+2}{a-3}\right)$ при $a\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$	190	46	45
6	Геометрическое место точек	190	—	45
6a	Область, ограниченная треугольником с вершинами в точках $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(-1;-2)$, включая границу	190	47	45
6b	Область, ограниченная четырехугольником с вершинами в точках $A(0;3)$, $B(3;0)$, $C\left(\frac{6}{5};-\frac{18}{5}\right)$, $D\left(-\frac{6}{7};\frac{18}{7}\right)$, включая границу	190	47	45
7	Область производственных возможностей ограничена пятиугольником с вершинами: $O(0;0)$, $A(0;6)$, $B(2;5)$, $C(4;3)$, $D(5;0)$.	191	49	45
7a	4 маршрута средней сложности и 3 маршрута повышенной сложности, доход – 64 тысячи рублей	191	49	45

№	Ответ	З	П	Т
7b	2 маршрута средней сложности и 5 маршрутов повышенной сложности, доход – 89 тысяч рублей	191	49	45
8	Корни квадратных трехчленов	192	—	59
8a	$\varnothing$	192	61	59
8b	$\varnothing$	192	61	59
8c	$-\frac{5}{3}$ и 1	192	62	59
8d	$\frac{1}{2}$ и 1	192	62	59
9	Квадратные уравнения с параметром	192	—	59
9a	$-0,2$ при $a=0,5$; $\varnothing$ при $a \in (-9-2\sqrt{21}; -9+2\sqrt{21})$; $\dfrac{3a+1 \pm \sqrt{a^2+18a-3}}{2(2a-1)}$ при $a \in (-\infty; -9-2\sqrt{21}] \cup [-9+2\sqrt{21}; 0,5) \cup$ $\cup\, (0,5; +\infty)$	192	64	59

№	Ответ	З	П	Т
9b	-2 при $a=0$; $\varnothing$ при $a\in(-\infty;-0,25)$; $\dfrac{1-2a\pm\sqrt{4a+1}}{2a}$ при $a\in[-0,25;0)\cup(0;+\infty)$	192	64	59
10	Квадратные неравенства	192	—	59
10a	$(-\infty;-5)\cup(2;+\infty)$	192	66	59
10b	$[-\frac{5}{2};3]$	192	66	59
10c	$\Re$	192	66	59
10d	$\varnothing$	192	66	59
11	Квадратные неравенства с параметром	192	—	59
11a	$\varnothing$ при $a\in[1;+\infty)$; $(-1-\sqrt{1-a};-1+\sqrt{1-a})$ при $a\in(-\infty;1)$	192	69	59

№	Ответ	З	П	Т
11b	$(-\infty; -a-\sqrt{a^2-1})\cup(-a+\sqrt{a^2-1}; +\infty)$ при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-1; 1)$	193	69	59
12	Симметричные формы	193	—	84
12a	$(2; 7)$ и $(7; 2)$	193	85	84
12b	$(-2; 7)$ и $(7; -2)$	193	85	84
12c	$\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)$	193	85	84
12d	$(7-\sqrt{47}; 7+\sqrt{47})$ и $(7+\sqrt{47}; 7-\sqrt{47})$	193	85	84
12e	$\varnothing$.	193	86	84
12f	$\varnothing$.	193	86	84
13	Сводящиеся к симметричным формы	193	—	84
13a	$(2,5; 0,8)$ и $(2; 1)$	193	87	84
13b	$(-4/3; -6)$ и $(4; 2)$	194	87	84
13c	$\varnothing$	194	87	84
13d	$\varnothing$	194	87	84
13e	$\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}; \frac{5+\sqrt{11}}{7}\right)$ и $\left(\frac{5+\sqrt{11}}{2}; \frac{5-\sqrt{11}}{7}\right)$	194	87	84
13f	$\left(\frac{11-\sqrt{37}}{14}; \frac{-11-\sqrt{37}}{6}\right)$ и $\left(\frac{11+\sqrt{37}}{14}; \frac{-11+\sqrt{37}}{6}\right)$	194	87	84
14	Симметричные формы	194	—	84

№	Ответ	З	П	Т
14a	$(1;5)$ и $(5;1)$	194	88	84
14b	$(-6;-8),\ (-8;-6),\ (6;8)$ и $(8;6)$	194	88	84
14c	$(1;3)$ и $(3;1)$	194	88	84
14d	$(2;3)$ и $(3;2)$	195	88	84
15	Симметричные формы	195	—	84
15a	$(-1;-2;3),\ (-1;3;-2),\ (-2;-1;3),$ $(-2;3;-1),\ (3;-1;-2),\ (3;-2;-1)$	195	93	84
15b	$(1;-2;3),\ (1;3;-2),\ (-2;1;3),$ $(-2;3;1),\ (3;1;-2),\ (3;-2;1)$	195	93	84
16	Однородные многочлены	195	—	94
16a	$\varnothing$	195	97	94
16b	$\varnothing$	195	97	94
16c	$(2;3),\ (-2;-3)$	195	98	94
16d	$(2;3),\ (-2;-3),\ (3;2),\ (-3;-2)$	195	98	94
17	Деление многочлена на многочлен	196	—	102
17a	$Q_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4;\quad R_1(x) = 2x + 3$	196	104	102
17b	$Q_3(x) = x^4 + 2x^2 - 5x + 1;\quad R_1(x) = 3x + 1$	196	104	102

№	Ответ	З	П	Т
17c	$$Q_3(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 7;$$ $$R_2(x) = 3x^2 + x + 2$$	196	104	102
17d	$$Q_3(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5;$$ $$R_2(x) = 2x^2 - x + 3$$	196	104	102
18	Схема Горнера	196	—	102
18a	$Q_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4; \quad r = 0$	196	106	102
18b	$Q_3(x) = x^4 + 2x^2 - 5x + 1; \quad r = 0$	196	106	102
18c	$Q_3(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 7; \quad r = 11$	196	106	102
18d	$Q_3(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5; \quad r = -3$	197	106	102
19	Разложение на множители	197	—	107
19a	$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$	197	109	107
19b	$(x+7a)^2$	197	109	107
19c	$(x-2a)^3$	196	109	107
19d	$(x^2-x+1)(x^2+x+1)$	197	109	107
19e	$\left(x^2-\sqrt{2}ax+a^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}ax+a^2\right)$	197	109	107

№	Ответ	З	П	Т
20	Разложение на множители	197	—	107
20a	$x^2(x+3)(x-2)(x+2)$	197	109	107
20b	$(x-a)(x^2+a^2)(x^2+ax+a^2)$	197	109	107
20c	$(x-1)(x+1)^3$	197	109	107
20d	$(4x^2+1)(x^2+1)$	197	109	107
21	Разложение на множители	197	—	107
21a	$(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)$	197	113	107
21b	$(x-1)(x-2)(x+3)(x+7)$	198	113	107
21c	$(x-1)(x-2)(x-5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$	198	113	107
21d	$(x-1)(x-2)(x-5)(x^2+7)$	198	113	107
22	Разложение на множители	198	—	107
22a	$(x-1)(x-3)(x-7)$	198	114	107
22b	$(x+1)(x+4)(x+7)$	198	114	107
22c	$(x-3)(x-5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$	198	114	107
22d	$(x+3)(x+5)(x^2+7)$	198	114	107
23	Разложение на множители	198	—	107
23a	$(5x-1)(x^2+x+2)$	198	116	107
23b	$(2x+3)(x^2+3x+1)$	198	116	107
23c	$(2x-1)\left(x+\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$	198	116	107
23d	$(3x+2)\left(x+\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x+\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$	199	116	107

№	Ответ	З	П	Т
24	Разложение на множители	199	—	107
24a	$\left(x-(3-2\sqrt{2})\right)\left(x-(3+2\sqrt{2})\right)(x-1)^2$	199	116	107
24b	$3\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot$ $\cdot\left(x-\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$	199	116	107
24c	$\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\cdot$ $\cdot\left(x-(3+2\sqrt{2})\right)\left(x-(3-2\sqrt{2})\right)$	199	116	107
24d	$\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\cdot$ $\cdot\left(x-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$	199	116	107
25	Разложение на множители	199	—	107
25a	$(x-1)^2(x^2-x+1)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	199	117	107

№	Ответ	З	П	Т
25b	$\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\cdot$ $\cdot\left(x-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\cdot$ $\cdot\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	199	117	107
26	Разложение на множители	199	—	107
26a	$(x^2+2)(2x+1)(x-2)$	199	120	107
26b	$2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$	199	120	107
26c	$6(x^2+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$	199	121	107
26d	$6(x^2+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{3}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{3}\right)$	200	121	107
27	Неравенства	200	—	125
27a	$(-\infty;-4)\cup(-1;2)\cup(3;5)$	200	130	129
27b	$[-1;0]\cup[2;3]$	200	130	129
27c	$[-3;0]\cup[1;+\infty)$	200	130	129
27d	$(-\infty;-5)\cup(-5;-3)\cup(1;2)\cup(2;3)$	200	130	129
27e	$(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$	200	131	129
27f	$(-2;1)\cup(1;2)$	200	131	129

№	Ответ	З	П	Т
28	Неравенства	200	—	125
28a	$(2; +\infty)$	200	114	129
28b	$(-\infty; 1,5]$	200	116	129
28c	$(-\infty; 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}; +\infty)$	200	116	129
28d	$\Re$	200	120	129
29	Комплексные корни	200	—	132
29a	$-2-i$ и $-2+i$	200	137	132
29b	$\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$	201	137	132
29c	$\frac{1-i\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{1+i\sqrt{2}}{3}$	201	137	132
29d	$\frac{3-i\sqrt{51}}{10}$ и $\frac{3+i\sqrt{51}}{10}$	201	137	132
30	Комплексные корни	201	—	132
30a	$1,\ \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$ и $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$	201	137	132
30b	$2,\ \frac{-1-i3}{2}$ и $\frac{-1+i3}{2}$	201	137	132
30c	$\frac{1}{2},\ \frac{3-i\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{3+i\sqrt{3}}{6}$	201	137	132
30d	$\frac{1}{3},\ \frac{5-i\sqrt{23}}{6}$ и $\frac{5+i\sqrt{23}}{6}$	201	137	132
31	Комплексные корни	201	—	132
31a	$\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}, -i,$ и i	201	138	132
31b	$\frac{-1-i3}{2}, \frac{-1+i3}{2}, -i\sqrt{2}$ и $i\sqrt{2}$	201	138	132
31c	$\frac{3-i\sqrt{3}}{6}, \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, -\frac{i\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{i\sqrt{2}}{2}$	201	138	132
31d	$\frac{5-i\sqrt{23}}{6}, \frac{5+i\sqrt{23}}{6}, -\frac{i\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{i\sqrt{3}}{3}$	201	138	132

№	Ответ	З	П	Т
32	Операции с комплексными числами	201	—	132
32a	$z_1 + z_2 = 4,\ z_1 - z_2 = -i \cdot 6,$ $z_1 \cdot z_2 = 13,\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-5 - i \cdot 12}{13}$	201	137	132
32b	$z_1 + z_2 = 10 + i \cdot 3,\ z_1 - z_2 = -i,$ $z_1 \cdot z_2 = 23 + i \cdot 15,\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{27 - i \cdot 5}{29}$	202	137	132
32c	$z_1 + z_2 = 3 + i \cdot 3\sqrt{6},\ z_1 - z_2 = 1 + i \cdot \sqrt{6}$ $z_1 \cdot z_2 = -10 + i \cdot 4\sqrt{6},\quad \dfrac{z_1}{z_2} = 2$	202	137	132

№	Ответ	З	П	Т
32d	$z_1+z_2=4+i\cdot 3\sqrt{2},\ z_1-z_2=-6-i\cdot\sqrt{2},$ $z_1\cdot z_2=-9+i\cdot 3\sqrt{2},\quad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-1+i\cdot 7\sqrt{2}}{33}$	202	137	132
33	Тригонометрическая форма	202	—	132
33a	$4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	202	142	132
33b	$7\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\cdot\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$	202	142	132
33c	$\sqrt{61}\left(\cos\phi+i\cdot\sin\phi\right),$ где $\phi=arccos\frac{6}{\sqrt{61}}$	202	143	132
33d	$\sqrt{29}\left(\cos\phi+i\cdot\sin\phi\right),$ где $\phi=-arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$	202	143	132
34	Степень комплексного числа	202	—	132
34a	-27	202	145	132
34b	$i\cdot 4$	202	145	132
34c	$\frac{125\sqrt{2}}{2}(-1+i)$	202	145	132
34d	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	202	145	132
35	Уравнения вида $z^n=a$	202	—	132
35a	$\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -i2$	202	146	132

№	Ответ	З	П	Т
35b	$\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$	203	146	132
35c	$\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i),\ \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$	203	146	132
36	Формула Кардано	203	—	149
36a	$-4,\ \frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$	203	154	149
36b	$\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-2,\quad \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}-2$, $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}-2$	203	154	149
36c	$2,\ \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$	203	155	149
36d	$-3,\ -2-i\sqrt{2}$ и $-2+i\sqrt{2}$	203	155	149
37	Формула Кардано	203	—	149
37a	$-5,\ 1$ и 1	203	158	149
37b	$2,\ -3$ и -3	203	158	149
37c	$-3,\ -\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$	203	158	149
37d	$4,\ \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$	203	158	149
38	Формула Кардано	203	—	149
38a	$7,\ 4+2\sqrt{3}$ и $4-2\sqrt{3}$	203	158	149
38b	$3,\ 6+2\sqrt{3}$ и $6-2\sqrt{3}$	204	158	149
38c	$3,\ 2\sqrt{3}$ и $-2\sqrt{3}$	204	158	149

№	Ответ	З	П	Т
38d	$3,\ 2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$	204	158	149
39	Формула Феррари	204	—	161
39a	$i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ -i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ -2+\frac{\sqrt{14}}{2}$ и $-2-\frac{\sqrt{14}}{2}$	204	163	161
39b	$-2+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6-2\sqrt{6}},\ \ -2+\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{6-2\sqrt{6}},$ $-2-\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6+2\sqrt{6}}$ и $-2-\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{6+2\sqrt{6}}$	204	163	161
40	Границы корней многочленов	204	—	164
40a	$\lvert x\rvert\in\left(\frac{7}{15};\frac{15}{8}\right)$	204	167	164
40b	$\lvert x\rvert\in\left(\frac{2}{7};6\right)$	204	167	164
40c	$\lvert x\rvert\in\left(\frac{4}{9};\frac{9}{4}\right)$	204	167	164
40d	$\lvert x\rvert\in\left(\frac{1}{5};9\right)$	204	167	164
41	Многочлен Лагранжа	204	—	168
41a	$-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x-2$	204	172	168
41b	$-\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{5}x+8$	204	172	168
41c	$\frac{7}{10}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{4}{5}$	205	172	168
42	Многочлен Лагранжа	205	—	168
42a	$\frac{5}{24}(x^2-6x+8)$	205	173	168
42b	$-\frac{2}{10}(x^2-3x-10)$	205	173	168
42c	$\frac{5}{32}(x^2-10x+21)$	205	173	168
43	Уравнения	205	—	173

№	Ответ	З	П	Т
43a	1, 2 и 10	205	173	173
43b	1 и 20	205	173	173
44	Неравенства	205	—	173
44a	$(4; +\infty)$	205	178	173
44b	$(1; +\infty)$	205	178	173
44c	$(-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$	205	179	173
44d	$(-\sqrt{17}; -4) \cup (\sqrt{17}; +\infty)$	205	179	173
44e	$\varnothing$	205	181	173
44f	$(2; 3)$	206	181	173
45	Тригонометрические тождества	206	—	173
45a	$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$, $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$	206	183	173
45b	$\cos 4\phi = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1$, $\sin 4\phi = 4(\cos^3\phi\sin\phi - \cos\phi\sin^3\phi)$	206	183	173
46	Коэффициенты степенного ряда $$a_k = \frac{9 - 4\cdot 2^{k+1} + 3^{k+1}}{2}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots$$	206	184	173

Древнегреческий алфавит

$\boxed{9 \Leftrightarrow 227}$

Буква	Название	Число	Буква	Название	Число
$A\alpha$	альфа	1	$N\nu$	ню	50
$B\beta$	бета	2	$\Xi\xi$	кси	60
$\Gamma\gamma$	гамма	3	Oo	омикрон	70
$\Delta\delta$	дельта	4	$\Pi\pi$	пи	80
$E\varepsilon$	эпсилон	5	$P\rho$	ро	100
$Z\zeta$	дзета	7	$\Sigma\sigma$	сигма	200
$H\eta$	эта	8	$T\tau$	тау	300
$\Theta\theta$	тета	9	$\Upsilon\upsilon$	ипсилон	400
$I\iota$	йота	10	$\Phi\varphi$	фи	500
$K\kappa$	каппа	20	$X\chi$	хи	600
$\Lambda\lambda$	лямбда	30	$\Psi\psi$	пси	700
$M\mu$	мю	40	$\Omega\omega$	омега	800

Биографические справки

226⇔237

1. Абель Нильс (1802–1829) – норвежский математик, член Королевского научного общества Норвегии; окончил университет в Христиании (ныне Осло). Доказал, что корни уравнения 5-й степени в общем случае не выражаются через радикалы.

2. Валлис Джон (1616–1703) – английский математик, один из предшественников математического анализа. После окончания Кембриджского университета служил священником англиканской церкви. Не только самостоятельно изучал математику но и вел собственные научные исследования. В период революции занимался расшифровкой перехваченных писем сторонников короля. После реставрации монархии был священником при дворе Карла I. Участвовал в создании Лондонского королевского общества (Британской академии наук). С 1649 г. возглавлял в Оксфорде кафедру геометрии. Ввел знаки «нестрогого неравенства»: «больше или равно» ($\geq$) и «меньше или равно» ($\leq$).

3. Вейерштрасс Карл (1815–1897) – немецкий математик, основоположник современного математического анализа. Четыре года учился на юридическом факульте-

те Боннского университета, где заработал репутацию отличного фехтовальщика и дуэлянта. Увлечение математикой побудило Вейерштрасса покинуть университет, после чего он длительное время преподавал в гимназии небольшого провинциального городка Дейл-Кроне. После того как за ряд опубликованных научных работ Кенигсбергский университет присвоил ему степень доктора без защиты, Вейерштрасс получает должность профессора в Берлинском промышленном институте, а затем становится экстраординарным профессором Берлинского университета.

4. Виет Франсуа (1540–1603) – французский математик. Родился в семье прокурора. Закончил университет в Пуатье, после чего занимался адвокатской практикой, состоял советником при короле Генрихе III, а затем Генрихе IV. Труды Виета по алгебре приобрели широкую известность в Европе. Увлечение математикой один раз помогло Виету выполнить важное поручение Генриха IV: расшифровать переписку испанских агентов во Франции, за что он был обвинен испанским королем Филиппом II в черной магии.

5. Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Часто Гаусса называют «королем математики». Дед Гаусса был

бедным крестьянином, отец – садовником и каменщиком. С молоду Гаусс проявлял интерес к наукам, знал множество языков. Говорят, однажды школьный учитель математики, чтобы надолго занять детей, предложил им найти сумму всех чисел от 1 до 100. Гаусс заметил, что попарные суммы одинаково удаленных от концов ряда чисел равны $1 + 100 = 2 + 99 = \ldots = 50 + 51 = 101$, и мгновенно нашел искомую сумму $101 \cdot 50 = 5050$.

6. Горнер Уильям Джордж (1786–1837) – английский математик, в честь которого названа схема Горнера. Получил образование в Кингсвудской школе Бристоля; в возрасте 16 лет стал помощником директора школы, а еще через 4 года – директором. Открыл способ приближенного вычисления действительных корней многочлена.

7. Дедекин Юлиус Вильгельм Рихард (1831–1916) – немецкий математик, один из основоположников теории вещественных чисел. Закончил Геттингенский университет. Получив докторскую степень, продолжил образование в Берлинском университете, после чего преподавал теорию вероятностей и геометрию в Геттингенском университете.

8. Декарт Рене (1596–1650) – французский философ, математик, механик, физик и физиолог. Закончил иезуитский колледж Ла Флеш. С 1617 г. в офицерском чине находился на военной службе в революционной Голландии, затем в Германии, сражался за Прагу, принимал участие в осаде крепости Ла-Рошель. Как человек, отличавшийся свободомыслием, по возвращении во Францию вскоре был заподозрен иезуитами в ереси и потому вынужден переехать в Голландию, где в течение 20 лет им были написаны выдающиеся научные работы. Декарт переработал математическую символику Виета и создал новую, близкую к современной. Введенная им «декартова» система координат позволила установить соответствие между алгебраическими уравнениями и широким классом кривых на плоскости. Задолго до Ньютона пришел к выводу, что основным видом движения является движение по инерции, ввел понятие «количество движения» и впервые сформулировал закон сохранения движения.

9. Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик, создатель теории множеств. Учился в Федеральном политехническом институте в Цюрихе, затем в Берлинском университете. После присвоения степени доктора философии преподавал в Галльском университете.

10. Канторович Леонид Витальевич (1912-1986) – советский математик и экономист, лауреат Ленинской, Сталинской и Нобелевской премий, академик АН СССР. В 1930 г. закончил математический факультет Ленинградского университета. Незадолго до начала войны вступил в должность заведующего кафедрой математики Военного инженерно-технического университета; участник обороны Ленинграда. В 1948 г. по распоряжению И. В. Сталина привлечен к участию в ядерном проекте, однако прежде всего известен как основоположник линейного программирования.

11. Кардано Джероламо (1501–1576) – итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог; закончил Падуанский университет. Завоевал репутацию одного из лучших врачей Европы. Его имя носит формула для нахождения корней кубического уравнения. Также его именем назван карданный вал.

12. Крамер Габриэль (1704–1752) – швейцарский математик, автор работ по небесной механике, геометрии, истории математики и философии. Один из создателей линейной алгебры.

13. Кронекер Леопольд (1823–1914) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской и Берлинской

академий наук. После окончания Берлинского университета до 30 лет занимался семейным бизнесом, связанным с сельским хозяйством, а математике посвящал свободное время. Став состоятельным человеком, перебрался в Берлин, где преподавал в университете. Направление основных научных работ – алгебра и теория чисел. Именно Кронекеру принадлежит известное изречение «Бог создал простые числа, все остальное – дело рук человека».

14. Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик, астроном и механик. С 1755 г. преподавал математику в Королевской артиллерийской школе в Турине. В 1766 г. по приглашению прусского короля Фридриха II переезжает в Берлин, где вначале руководит физико-математическим отделением Академии наук, а затем становится президентом Академии наук.

15. Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-–1716) – немецкий философ, логик, математик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской академии наук. Ставил вопрос о машинном моделировании функций человеческого мозга. Изобрел собственную конструкцию арифмометра, способного выполнять операции сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадрат-

ных и кубических корней. Неоднократно встречался с российским императором Петром I, сформулировал идею распространения научных знаний в России. За заслуги перед отечеством получил от Петра I титул тайного советника юстиции и пенсию в 2000 гульденов.

16. Маклорен Колин (1698–1746) – шотландский математик, член Лондонского королевского общества с 1719 г. Один из первых применил определители для решения систем линейных уравнений. Внес большой вклад в обоснование разработанного Ньютоном и Лейбницем анализа бесконечно малых.

17. Минехм (IV в. до н. э.) – греческий математик, ученик Евдокса, член академии Платона. Открыл конические сечения и даже создал приборы для их вычерчивания.

18. Муавр Абрахим де (1667–1754) – английский математик, член Лондонского королевского общества, Парижской и Берлинской академий наук. Открыл формулу для возведения в степень комплексных чисел, внес большой вклад в теорию вероятностей. Был близким другом Ньютона.

19. Ньютон Исаак (1642–1727) – английский физик, математик, астроном. В 1661 г. поступил в Тринити-

колледж Кембриджского университета. Является одним из создателей классической механики и закона всемирного тяготения, разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Некоторое время Ньютон находился на должности управляющего королевского монетного двора, дважды избирался в члены парламента.

20. Паскаль Блез (1623–1662) – французский математик, механик, физик, литератор и философ, классик французской литературы, один из основоположников теории вероятностей. Достиг выдающихся успехов во многих науках, занимаясь самообразованием. Так, в 19 лет он создал механическую счетную машину, которая на следующие три столетия стала основой для большинства арифмометров.

21. Рекорд Роберт (1510–1558) – английский врач и математик. Окончил Оксфордский университет, занимался врачебной практикой, некоторое время преподавал в Оксфорде математику и риторику, был управляющим королевского монетного двора Великобритании, личным врачом короля Эдуарда IV и королевы Марии I. За долги был арестован и помещен в тюрьму Кингз Бенг в округе Саутворк, где в 1558 г. и умер. Рекорд впервые ввел в математическую символику знак ра-

венства («=»).

22. Стевин Симон (1548–1620) – фламандский математик, механик и инженер. В своей книге «Десятая» дал практическое описание арифметики десятичных дробей, а также убедительно обосновал большие перспективы их применения в системах мер и монетном деле. После его работ в Европе стали широко применяться десятичные дроби.

23. Феррари Лудовико (1522–1565) – итальянский математик. Окончил Миланский университет, где в дальнейшем некоторое время заведовал кафедрой математики. Ученик Кардано. Феррари нашел общее решение уравнения четвертой степени.

24. Фибоначчи Леонардо (1170–1250) – итальянский математик, известный также под именем Леонардо Пизанский, автор ряда математических трактатов. Математику изучал у арабских учителей в Алжире, где его отец часто бывал по торговым делам. Работы Фибоначчи способствовали распространению в Европе позиционной системы счисления.

25. Хэрриот Томас (1560–1621) – английский астроном, математик, этнограф и переводчик. Окончил Оксфордский университет. Ввел знаки «строгого неравенства»:

«больше» ($>$) и «меньше» ($<$). Переписывался с Кеплером. Составил одну из первых карт Луны, которую начал наблюдать в телескоп раньше Галилея. Одним из первых заметил и описал солнечные пятна.

26. Эйлер Леонард (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, автор более 850 научных работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории числел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, воздухоплаванию, кораблестроению, кораблевождению, теории музыки, медицине и другим наукам. Академик Петербургской, Берлинской, Парижской и ряда других академий наук. Более тридцати лет работал в России и внес огромный вклад в подготовку кадров для российской науки, образования, армии и промышленности.

Список литературы

227⇐

1. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва : Наука, 1986. – 544 с.

2. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1977. – 832 с.

3. Королёва Т. М. Пособие по математике для поступающих в вузы. Часть 1 / Т. М. Королёва, Е. Г. Маркарян, Ю. М. Нейман – Москва : Изд-во МИИГА и К, 2008. – 144 с.

4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва : Наука, 1975. – 432 с.

5. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1991. – 352 с.

6. Лунц Г. Л. Функции комплексного переменного / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 300 с.

7. Моденов В. П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод / В. П. Моденов. – Москва : Экзамен, 2007. – 285 с.

8. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов – Москва : Наука, 1978. – 208 с.

9. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / под ред. М. И. Сканави. – Москва : Мир и образование, 2003. – 608 с.

10. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов [и др.] – Москва : Просвещение, 1991. – 540 с.

11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. I / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – 480 с.

12. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – Москва : Наука, 1984. – 336 с.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович
Дорофеева Юлия Александровна

Математика не для ЕГЭ

Алгебраические уравнения

Учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса

Редактор *Е. Е. Порывакина*
Оформление обложки *Е. Ю. Тихоновой*
Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано в печать 20.8.15. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 200 экз.
Изд. № 287

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33